République Algérienne Démocratique et Populaire

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CENTRE UNIVERSITAIRE BELHADJ BOUCHAIB D'AÏN-TÉMOUCHENT

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

MÉMOIRE

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique

Option : Équations différentielles et modélisation

Présenté par :

Melle. Hanaâ ACHOUR

ÉTUDE DE QUELQUES INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Encadrante :

Mme. Kheira MEKHALFI

Maitre de Conférence "B" à C.U.B.B.A.T.

Soutenu en 09/06/2019

Devant le jury composé de :

Présidente :	Mme. Zokha SAIAH BELATTAR (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	Mr. Abd Rahmen BENIANI (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Encadrante :	Mme. Kheira MEKHALFI (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Co-Encadrant :	Mr. Amine BENAISSA CHERIF (M.C.A)	U.S.T.O.M.B.

Année Universitaire : 2018 – 2019

DÉDICACE

Je dédie ce modeste mémoire : A mes très chers parents.

Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de l'amour Dont ils ne cessent de me combler.

Que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

À tous mes enseignants pour leur utiles conseils, leur patiences, leur persévérances.

À mes très chers sœurs et mon frère,

À mes amis,

À toute ma famille.

À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce projet soit possible,

Je vous dis merci.

REMERCIENT

Tout d'abords, je remercie Dieu le Tout Puissant pour m'avoir guidé dans le bon chemin afin d'accomplir et de pouvoir présenter ce modeste travail.

J'adresse mes profondes reconnaissances et mon chaleureux remerciement à mes encadreurs Madame MEKHALFI Kheira et BENAISSA CHERIF Amine pour les connaissances qu'ils n'ont cessé de me prodiguer, et leurs assistances tout au long de mon projet.

J'adresse mes vifs remerciements aux membres du jury Madame SAIAH Belattar Zokha et Monsieur BENIANI Abd Rahmen pour avoir fait l'honneur d'être membre de mon jury.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs du "département Mathématique et Informatique", intervenants et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à mes questions durant mes recherches.

Je remercie mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous m'avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d'une éducation dont je suis fière ».

Je remercie mon frère et mes sœurs pour leur encouragement. Sans oublier de remercier très spécialement mes amies qui m'ont apporté leur soutient moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Enfin, je témoigne ma gratitude à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin. En me dispensant temps et conseils.

Hanaâ ACHOUR.

Résumé

Dans ce mémoire, nous établirons des conditions suffisantes pour l'existence des solutions pour certaines classes de problèmes aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire. On considère les deux cas soit le membre à droite est convexe ou non convexe. Ces résultats ont été obtenus en utilisant certains théorèmes du points fixes comme l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le théorème de points fixe de Covitz et Nadler pour les multifonctions contractives.

Mots-clés: *inclusion différentielle, dérivée fractionnaire au sens de Caputo, intégrale fractionnaire, analyse multivoque, existence de solution, la théorie de point fixe.*

Table des matières

INTRODUCTION

Au tournant de ce siècle, de nombreux simulateurs ont la conviction étrange que les équations différentielles décrivent tout ce qui se passe dans le monde réel. Cette approche de la modélisation peut donner lieu à des tentatives de modification de la réalité pour s'adapter aux outils de simulation, alors que la méthode correcte devrait être complètement opposée. Le défi consiste à rechercher de nouveaux outils ou à utiliser ceux qui sont connus depuis longtemps, mais qui sont simplement oubliés.

Les inclusions différentielles sont d'une grande importance car elles modélisent les performances de divers dispositifs mécaniques et électriques ainsi que le comportement des systèmes de contrôle automatique, comme nous voyons que l'incertitude inhérente à la modélisation du système dynamique conduit toujours à des inclusions différentielles en tant qu'outil mathématique correspondant.

Cette dernière est une généralisation de la notion d'équation différentielle ordinaire. Par conséquent, tous les problèmes considérés pour celui-ci sont présents dans la théorie des inclusions différentielles. Puisqu'elles comportent généralement de nombreuses solutions à partir d'un point donné, de nouveaux problèmes apparaissent mais pour les résoudre des techniques mathématiques spéciales ont été développées, comme celle de l'analyse multivoque qui a connus de grandes progressions récemment. En effet, l'analyse multivoque a été outil de base dans tous les domaines mathématiques appliqués.

Les inclusions différentielles sont connues depuis environ 70 ans. Les premiers travaux ont été publiés entre 1931 et 1932 par `A. Marchaud` *[31, 32] et* `K. Zaremba` *[45, 46]. Le développement rapide de la théorie a eu lieu entre 1960-1970, lorsque* `T. Wazewski` *[44] et ses collaborateurs firent référence sur les inclusions différentielles en tant que conditions d'orientation et orientés. Des années après les premières publications sur les inclusions différentielles ont été l'outil de base de la théorie du contrôle optimal. Une enquête plus complète les concernant est disponible dans l'un des meilleurs livres de* `Aubin` *et* `Cellina` *[1].*

Récemment, les ingénieurs trouvent dans les équations différentielles d'ordre fractionnaire un outil précieux pour la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science. En effet, on peut trouver de nombreuses applications en viscoélasticité, électrochimie, contrôle, milieux poreux, électromagnétique, etc. (voir [13, 19, 20, 23, 30, 33]).

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul des intégrales et des dérivées de tout ordre arbitraire, réel ou complexe. On croit généralement que le concept de calcul fractionnel découle d'une question posée en 1695 par `M. Hôpital` *(1661-1704) à* `G. Leibniz` *(1646-1716), qui cherchait le sens de celui de* `Leibniz` *actuellement populaire notation* $\dfrac{d^n y}{dx^n} = D^n y$ *pour la dérivée d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ *sur la possibilité que* n *soit une fraction (Et si* $n = \dfrac{1}{2}$ *?). Dans sa réponse, datée du 30 septembre 1695,* `Leibniz` *écrit à* `L'Hôpital` *comme suit : "Cela conduira à un paradoxe". Mais il a ajouté prophétiquement :*

"De cet apparent paradoxe, des conséquences utiles d'un jour seront tirées."

De ces paroles là, on voit un développement important des équations différentielles fractionnaires ces dernières années, inclut les monographies et article de `Kilbas et al.` *[27],* `Miller et Ross` *[35],* `Podlubny` *[38],* `Samko et al.` *[40],* `Oldham et Spanier` *[37]. Dans une série de document (voir [28, 1, 3, 4]) qui ont présenté une théorie de base concernant les problèmes aux valeurs initiales pour les équations différentielles fractionnaires impliquant l'opérateur différentiel de Riemann-Liouville où* $\alpha \in (0, 1]$ *et* `Caputo`. `El-Sayed` *et* `Ibrahim` *[16] ont initié l'étude d'inclusions différentielles fractionnaires multivaluées dans le cas où* $\alpha \in (1, 2]$.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude de l'existence des solutions pour certaines classes d'inclusion différentielles d'ordre fractionnaire. Le contenu de ce mémoire est basé sur les travaux de `Benchohra et Hamani` *[5, 6].*

Notre travail est reparti en trois chapitres qui sont organisée selon le plan suivant :

*Le premier chapitre intitulé "**Préliminaires**", contient un ensemble de définitions et résultats qui nous seront utiles dans la suite de cette étude. Ce chapitre est partagé en quatre sections.*

La première section, présente un rappelle de quelques définitions et notations pour la bonne compréhension de ce manuscrit.

La deuxième section, est consacré aux définitions et résultats importants concernant *la théorie du calcul fractionnaire.*

La troisième section, est consacrée pour donner quelques définitions et résultats de l'analyse multivoque.

La quatrième section, est réservée pour le rappel de quelques théorèmes du point fixe.

*Le deuxième chapitre intitulé "**Problème aux limites d'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire cas où** $0 < \alpha < 1$", on traitera l'existence des solutions d'un problème d'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire suivant :*

$$\begin{gathered} {}^cD^\alpha y(t) \in F(t, y(t)), \quad \textit{pour tout} \ \ t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha < 1, \\ ay(0) + by(T) = c. \end{gathered}$$

Où ${}^cD^\alpha$ *est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo,* $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *est une application multivoque,* a, b, c *sont des constantes réelles avec* $a + b \neq 0$*.*

*Le troisième chapitre intitulé "**Problème aux limites d'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire cas où** $1 < \alpha \leq 2$", on s'intéresse à l'existence des solutions d'un problème d'inclusion différentielle d'ordre fractionnaire avec des conditions non locales suivant :*

$$\begin{gathered} {}^cD^\alpha y(t) \in F(t, y(t)), \quad \textit{pour tout} \ \ t \in J = [0, T], \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T. \end{gathered}$$

Où ${}^cD^\alpha$ *est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo,* $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *est une application multivoque,* y_0, y_T *sont des constantes réelles.*
Puis on donne une conclusion du travail effectué et on termine ce mémoire par une bibliographie riche.

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions de base et résultats sur les différentes approches de calcul fractionnaire, analyse multivoque et la théorie du point fixe qui seront nécessaires tout au long de ce mémoire.

I.1 Notations et définitions

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions, notations et résultats d'analyse fonctionnelle (espaces, opérateur,...) et quelques théorèmes qui nous seront utiles dans notre étude.
Soit $J = [a, b]$ *un intervalle fini ou infinie de* $\mathbb{R}$ *où* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $a < b$ *et soit* $(X, |\ .\ |)$ *un espace de Banach.*

▶ $C(J, X)$ *l'espace de Banach des fonctions continues* $y : J \to X$*, muni de la norme*

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| \ : \ t \in J\}.$$

▶ $L^1(J, X)$ *l'espace de Banach des fonctions mesurables* $y : J \to X$ *qui sont Lebesgue intégrable, muni de la norme*

$$\|y\|_{L^1} = \int_a^b |y(s)| \, ds.$$

▶ $AC^1(J, X)$ *l'espace de Banach des fonctions dérivables* $y : J \to X$ *dont la première dérivée est absolument continue.*

Définition I.1.1 [34]
On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet sur le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Définition I.1.2 [42]
Soit f une application définie dans un intervalle J de la droite réelle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace affine normé $\mathcal{E}$. On dit que f est absolument continue dans J, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalle ouverts deux à deux disjoints de J, $(]a_i, b_i[)_{i=1}^{n}$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \eta, \quad \text{qui entraîne} \quad \sum_{i=1}^{n}\|f(b_i) - f(a_i)\| \leq \varepsilon.$$

Définition I.1.3 [34]
Soient X et Y deux espaces de Banach, et $A : X \to Y$ une application linéaire. On dit que A est bornée si elle envoie les parties bornées de X sur des parties bornées de Y.

Définition I.1.4 [34]
Soient X et Y deux espaces de Banach. On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de X dans Y.

Proposition I.1.1 [41]
Soient $\mathcal{C}(J, X)$ l'espace des fonctions continues de J dans l'espace de Banach X et $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}(J, X)$. $\mathcal{M}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}(J, X)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) L'ensemble $\mathcal{M}$ est uniformément borné, i.e :

$$\exists K \geq 0 \ : \ \|f\|_\infty \leq K, \quad \forall t \in J, \ \ \forall f \in \mathcal{M}.$$

(ii) L'ensemble $\mathcal{M}$ est équicontinu, i.e :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \ \forall t_1, t_2 \in J, \ \ |t_1 - t_2| \leq \delta \Rightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon, \ \ \forall f \in \mathcal{M}.$$

(iii) Pour tout $x \in J$, l'ensemble $\{f(x), \ \ f \in \mathcal{M}\}$ est relativement compacte dans X.

Définition I.1.5 [34]
Soient X, Y deux espaces de Banach et A un opérateur définie de X dans Y ;

- A est dit compact, si l'image de X par A, i.e. l'ensemble $A(X)$ est relativement compact dans Y.
- A est dit complètement continu, s'il est continu et l'image de tout borné de X est relativement compact dans Y.

Théorème I.1.1 (Arzelà-Ascoli) [29]
Soient X un sous-ensemble compact d'un espace métrique et $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X)$. Alors, $\mathcal{F}$ est relativement compacte (précompact) dans $\mathcal{C}(X)$, si et seulement si $\mathcal{F}$ est équicontinue et uniformément bornée.

Théorème I.1.2 (Bolzano-Weierstrass) [41]
Soit X un espace métrique, $A \subseteq X$ est compact, si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui convergente dans A.

Théorème I.1.3 (Mazur) [39, 36]
Soit E un espace normé. Si $(x_n)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ une suite convergeant faiblement vers $x \in E$, alors il existe une suite de combinaisons convexes

$$y_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} x_k, \qquad \text{pour } k = 1, 2, \cdots, m;$$

et

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} = 1, \qquad \text{avec } \alpha_{mk} > 0,$$

qui converge fortement vers x.

Définition I.1.6 [41]
Soient E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$ et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de T si $Tx = x$.

Définition I.1.7 [47, 25]
Soit (X, d) un espace métrique complet. Une application $T : X \to X$ est dit Lipschitzienne, s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que :

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{M}. \tag{I.1}$$

- Si $k \leq 1$, l'application T est dite non-expansive.
- Si $k < 1$, l'application T est dite k-contractive.

Définition I.1.8 (Fonction de Carathéodory) [17]
L'application $f : J \times X \to X$est dite Carathéodory si

(i) $t \to f(t, x)$ est mesurable pour tout $x \in E$.

(ii) $x \to f(t, x)$ est continue pour tout $t \in J$.

f est dite L^1-Carathéodory. Si de plus, elle vérifie la condition suivante :

(iii) pour tout $r > 0$, il existe une fonction $\phi_r \in L^1(J, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$|f(t, x)| \leq \phi_r(t), \quad \text{pour tout } \ t \in J \quad \text{ et } \quad \forall x \ : \ |x| \leq r.$$

I.2 Calcul fractionnaire

Dans cette section, nous introduisons quelques fonctions spéciales qui nous seront utile dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent le rôle le plus important dans la théorie du calcul fractionnaire. Nous définissons aussi l'intégral et dérivation fractionnaire, ainsi que la dérivation fractionnaire au sens de Caputo et quelques propriétés, lemmes important concernant ce calcul.

I.2.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base de calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$*, qui généralise la factorielle* $n!$ *permettant à* n *de prendre des valeurs non entiers et même des valeur complexe.*

Définition I.2.1 [38]
La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale d'Euler suivant :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \mathfrak{Re}(z) > 0. \tag{I.2}$$

Cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, si $\mathfrak{Re}(z) > 0$.

Proposition I.2.1 [38]
L'une des propriétés fondamentales de la fonction Gamma est qu'elle satisfait à l'équation fonctionnel suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{I.3}$$

En particulier :

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma, est qu'elle a des pôles simples aux points $z = -n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Preuve.
On démontre cette proposition par une intégration par partie de (I.2)

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \ t^{(z+1)-1} \, dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t} \ t^{z} \, dt \\
&= \left[-e^{-t} \ t^z\right]_{+\infty}^{0} + z \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} \ t^{z-1} \, dt}_{\Gamma(z)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En particulier, on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ \ t^{1-1}\, dt = 1.$$

et en utilisant (I.3), on obtient pour $z \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma(2) & = & 1.\Gamma(1) & = & 1.1 & = & 1! \\
\Gamma(3) & = & 2.\Gamma(2) & = & 2.1! & = & 2! \\
\Gamma(4) & = & 3.\Gamma(3) & = & 3.2! & = & 3! \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\Gamma(n+1) & = & n.\Gamma(n) & = & n(n-1)! & = & n!.
\end{array}$$

Par conséquent

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

Proposition I.2.2 [38, 37]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\ \ \sqrt{\pi}}{4^n\ \ n!}, \tag{I.4}$$

avec

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve.
On a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

En effet, On pose le changement de variable suivant :

$$u = \sqrt{t} \quad \Longrightarrow \quad t = u^2 \quad \text{et} \quad dt = 2u\, du,$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du.$$

D'après l'intégral de Gauss on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Calculons maintenant (I.4) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right).\Gamma\left(n-\frac{3}{2}+1\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right).\left(n+\frac{3}{2}\right).\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&= \left(n+\frac{1}{2}\right).\left(n+\frac{3}{2}\right)\ \dots\ \frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right).\left(\frac{2n-3}{2}\right)\ \dots\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \frac{1}{2^n}.(2n-1).(2n-3)\ \dots\ 3.1.\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

En multipliant et divisant par $(2n-2).(2n-4)\ \dots\ 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n-1).(2n-2)\ \dots\ 3.2.1}{2^n.(2n-2).(2n-4)\ \dots\ 2}.\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-1)!\,\sqrt{\pi}}{2^n.2^{n-1}.(n-1)!} \\
&= \frac{(2n-1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}.(n-1)!}.
\end{aligned}$$

En multipliant et divisant par $2n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{2n.(2n-1)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}.2n.(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{4^n\ n!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent (I.4) est prouvée. ■

Théorème I.2.1 [9]
La fonction Gamma est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, ses dérivées successives sont données par la formule

$$\Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}(\ln t)^k\ dt.$$

I.2.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction Gamma.

Définition I.2.2 [38, 37]
La fonction Bêta est définie par l'intégral d'Euler de seconde espèce

$$B(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1}\,(1-t)^{\omega-1}\,dt, \quad \mathfrak{Re}(z) > 0,\ \mathfrak{Re}(\omega) > 0, \tag{I.5}$$

cette intégrale est convergente pour tout $z, \omega \in \mathbb{C}$.

Proposition I.2.3 [38]
La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0, \mathfrak{Re}(\omega) > 0. \tag{I.6}$$

D'où il résulte que Bêta est symétrique :

$$B(z,\omega) = B(\omega, z), \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0, \mathfrak{Re}(\omega) > 0.$$

I.2.3 Intégrale et dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\mathfrak{Re}(\alpha) > 0)$ *au sens de Riemann-Liouville généralise la célèbre formule attribuée à Cauchy d'intégrale répété* n*-fois,*

$$\begin{aligned} I_a^n f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_n-1} f(t_n)\,dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1}\,f(t)\,dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{I.7}$$

D'après la généralisation du factoriel par la fonction Gamma ; $(n-1)! = \Gamma(n)$*. Riemann Observent que le second membre de (I.7) pourrait avoir un sens même pour des valeurs non-entières de* n*, il était donc naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suite :*

Définition I.2.3 (Intégrale de Riemann-Liouville) [38, 27]
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville de f notée I_a^α, l'intégrale suivante :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt, \qquad (x > a, \mathfrak{Re}(\alpha) > 0). \tag{I.8}$$

Où Γ est la fonction Gamma et on note I_0^α par I^α.
En particulier, pour $\alpha = 0$, on a :

$$I_a^0 f(x) = f(x).$$

Exemple I.2.1
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-a)^{\beta}, \quad x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta > -1, \quad \alpha > 0.$$

On a alors

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta}\, dt. \tag{I.9}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$t = a + (x-a)\tau, \quad \text{avec} \quad 0 \le \tau \le 1, \quad \text{donc} \quad dt = (x-a) d\tau. \tag{I.10}$$

Donc, (I.9) devient

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1} (a+(x-a)\tau-a)^{\beta} (x-a)\, d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left[(x-a)(1-\tau)\right]^{\alpha-1} \left[(x-a)\tau\right]^{\beta} (x-a)\, d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau^{(\beta+1)-1} (1-\tau)^{\alpha-1}\, d\tau. \end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (I.5) puis de la relation (I.6), on aura :

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} f(x) &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient l'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction f, telle que :

$$I_a^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{I.11}$$

Cas particulier,
Si $\alpha = 1$. D'après (I.3) on déduit que

$$I_a^1 (x-a)^{\beta} = \frac{1}{\beta+1} (x-a)^{1+\beta}.$$

Si $\beta = 0$. On a dans ce cas

$$I_a^{\alpha} 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^{\alpha}.$$

Proposition I.2.4 [27]
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Pour α et β des nombres complexes où $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$ et $\mathfrak{Re}(\beta) > 0$, alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x) \right] = I_a^{\alpha+\beta} f(x). \tag{I.12}$$

Preuve.
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$, On a par définition de I_a^α

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[I_a^\beta f \right](t)\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1}\, f(s)\, ds \right] dt. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on aura :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{s-1}\, f(s)\, ds\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \underbrace{\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}\, dt}_{\mathcal{I}}\, ds. \end{aligned} \tag{I.13}$$

En effectuant le changement de variable suivant dans l'intégrale $\mathcal{I}$, telle que :

$$t = s + (x-s)\tau, \quad \text{avec} \quad (0 \le \tau \le 1), \quad \text{donc} \quad dt = (x-s)d\tau.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^1 (x - s - (x-s)\tau)^{\alpha-1}(s + (x-s)\tau - s)^{\beta-1}(x-s)\, d\tau \\ &= \int_0^1 \left[(x-s)(1-\tau)\right]^{\alpha-1} \left[(x-s)\tau\right]^{\beta-1} (x-s)\, d\tau \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}\, d\tau. \end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de Bêta (I.5) puis de la relation (I.6), on aura :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} B(\beta, \alpha) \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

En retournant à la formule (I.13), on obtient alors

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha\left[I_a^\beta f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)\left[(x-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right]\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\,ds \\
&= I_a^{\alpha+\beta}f(x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ∎

Définition I.2.4 (Dérivée de Riemann-Liouville) [38, 27]
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha)\in\,]n-1,n[$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $f\in\mathcal{C}([a,b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha\in\mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f notée D_a^α, la fonction définie par :

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha f(x) &= D^n\left[I_a^{n-\alpha}f(x)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}\,f(t)\,dt, \quad (n=[\mathfrak{Re}(\alpha)]+1, x>a)\,. \qquad \text{(I.14)}
\end{aligned}$$

Où $[\,.\,]$ la partie entière d'un nombre réel et $D^n=\left(\frac{d}{dx}\right)^n$.
En particulier, pour $\alpha\in\mathbb{N}$ la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique ;

- Si $\alpha=0$, on a :
$$D_a^0 f(x)=D^1[I_a^1 f(x)]=f(x).$$
- Si $\alpha=n\in\mathbb{N}$, on a :
$$D_a^n f(x)=D^{n+1}[I_a^{n+1-n}f(x)]=D^{n+1}[I_a^1 f(x)]=D^n f(x).$$

Exemple I.2.2
On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=(x-a)^\beta,\quad x\in[a,b]\quad \text{où}\quad \beta\in\mathbb{R}.$$

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha\geq 0$ tel que $\alpha\in]n-1,n[$, Nous avons

$$D_a^\alpha(x-a)^\beta = D^n\left[I_a^{n-\alpha}(x-a)^\beta\right].$$

D'après (I.11), on obtient :

$$D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = D^n\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha+\beta}\right]$$
$$= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}\right]. \tag{I.15}$$

On sait que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} = (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)\cdots(n-\alpha+\beta-n+1)(x-a)^{n-\alpha+\beta-n}$$
$$= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)\cdots(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha}$$
$$= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \tag{I.16}$$

Par substitution de (I.16) dans (I.15), on aura :

$$D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}\left[\frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\right].$$

Alors, on obtient la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f, telle que :

$$D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Cas particulier,
Si $\alpha = 1$. D'après (I.3) on déduit que

$$D_a^1(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} = \beta(x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx}(x-a)^{\beta}.$$

Si $\beta = 0$. On a dans ce cas

$$D_a^{\alpha}1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

Ce qui montre que la dérivé fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constant n'est pas nulle.

Lemme I.2.1 [27]
Si $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}([a,b])$, alors on a l'égalité

$$\left(D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f\right)(x) = f(x).$$

Preuve.
En se basant sur la propriété classique :

$$(D^n I_a^n f)(x) = f(x),$$

Et en utilisant la définition I.2.4 et de proposition I.2.4, on déduit

$$\begin{aligned}(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) &= D^n\Big[I_a^{n-\alpha}\left(I_a^\alpha f(x)\right)\Big]\\ &= D^n\Big[I_a^n f(x)\Big]\\ &= f(x).\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Propriété I.2.1 [27]
Si $n > \mathfrak{Re}(\alpha) > \mathfrak{Re}(\beta) > n-1 > 0$, alors pour $f(x) \in \mathcal{C}([a,b])$, on a la relation

$$\left(D_a^\beta I_a^\alpha f\right)(x) = I^{\alpha-\beta} f(x).$$

En particulier, si $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $\mathfrak{Re}(\alpha) > k$, alors

$$\left(D_a^k I_a^\alpha f\right)(x) = I^{\alpha-k} f(x). \tag{I.17}$$

Preuve.
En utilisant la définition I.2.4 et de proposition I.2.4, on obtient

$$\begin{aligned}\left(D_a^\beta I_a^\alpha f\right)(x) &= D^n\Big[I_a^{n-\beta}\left(I_a^\alpha f(x)\right)\Big]\\ &= D^n\Big[I_a^{n+\alpha-\beta} f(x)\Big]\\ &= D^n\Big[I_a^n\left(I_a^{\alpha-\beta} f(x)\right)\Big]\\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x).\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Remarque I.2.1
La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est non-commutative, i.e :

$$D_a^\alpha \circ D_a^\beta \neq D_a^\beta \circ D_a^\alpha.$$

Propriété I.2.2 (Linéarité) [38]
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et soient les deux fonctions f et g pour lesquelles les dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ de Riemann-Liouville existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :

$$D_a^\alpha (\lambda f + g)(x) = \lambda(D_a^\alpha f)(x) + (D_a^\alpha g)(x).$$

I.2.4 Dérivée fractionnaire de Caputo

La notion de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie du calcul fractionnaire. Cependant, les demandes de la technologie moderne exigent une certaine révision de l'approche mathématique pure bien établie, car les problèmes appliqués nécessitent l'utilisation des condition initiales $f(a), f'(a)$, *etc. Ces besoins ont bientôt conduit à la naissance d'une définition alternative des dérivées fractionnaires qui a été introduit par M.Caputo à la fin des années soixante.*

Définition I.2.5 (Dérivée de Caputo) [38]
Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Caputo de f notée ${}^cD_a^\alpha$, la fonction définie par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(x) &= I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1, x > a). \end{aligned} \tag{I.18}$$

On note ${}^cD_0^\alpha$ par ${}^cD^\alpha$.

Exemple I.2.3
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta \geq 0.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \in [n-1, n[$, Nous avons

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{n-\alpha}\left[D^n (x-a)^\beta\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[(t-a)^\beta\right]^{(n)} dt. \end{aligned}$$

On sait que

$$\left[(t-a)^\beta\right]^{(n)} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n},$$

et donc

$$
{}^{c}D_{a}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \underbrace{\int_{a}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta-n}\, dt}_{\mathcal{I}}. \tag{I.19}
$$

En y effectuant le changement de variable (I.10) dans l'intégrale $\mathcal{I}$, On obtient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_{0}^{1} (x-a-(x-a)\tau)^{n-\alpha-1}(a+(x-a)\tau-a)^{\beta-n}(x-a)\, d\tau \\
&= \int_{0}^{1} \left[(x-a)(1-\tau)\right]^{n-\alpha-1} \left[(x-a)\tau\right]^{\beta-n} (x-a)\, d\tau \\
&= (x-a)^{\beta-\alpha} \int_{0}^{1} \tau^{(\beta-n+1)-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}\, d\tau.
\end{aligned}
$$

En tenant compte de la définition de Bêta (I.5) puis de la relation (I.6), on aura :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= (x-s)^{\beta-\alpha} B(\beta-n+1, n-\alpha) \\
&= (x-s)^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.
\end{aligned}
$$

En retournant à la formule (I.19), on obtient alors

$$
{}^{c}D_{a}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \left[\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha} \right].
$$

Ainsi, on obtient la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction f, telle que :

$$
{}^{c}D_{a}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.
$$

D'où

$$
{}^{c}D_{a}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}, & \text{si } \ \beta > n-1 \\ \\ 0. & \text{si } \ \beta \in \{0,\ 1,\ 2, \cdots,\ n-1\} \end{cases}
$$

Remarque I.2.2
La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante $f(t) = C$ est nulle, autrement dit : ${}^{c}D_{a}^{\alpha} C = 0$.

Propriété I.2.3 (Linéarité) [38]
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et soient les deux fonctions f et g pour laquelle les dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ de Caputo (I.18) existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :

$$^{c}D_a^{\alpha}\left(\lambda f + g\right)(x) = \lambda\, ^{c}D_a^{\alpha} f(x) + {}^{c}D_a^{\alpha} g(x).$$

Propriété I.2.4 [27]
Si $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, la relation reliant la dérivée Riemann-Liouville (I.14) et celle de Caputo (I.18) est donnée par :

$$\begin{aligned} ^{c}D_a^{\alpha} f(x) &= D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] \\ &= D_a^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1, x > a). \end{aligned} \tag{I.20}$$

En particulier, lorsque $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]0,1[$, on a :

$$^{c}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha+1)}(x-a)^{-\alpha}. \tag{I.21}$$

A partir de (I.20), on déduit que la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Riemann-Liouville coïncide avec celle de Caputo, si a est un point zéro d'ordre n de f. Plus précisément, on a :

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{I.22}$$

Alors,

$$^{c}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} f(x).$$

Preuve.
Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, par définition I.2.4, on a :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] &= D^n I_a^{n-\alpha}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k\right] dt}_{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Par intégration par partie de l'intégrale $\mathcal{I}$, on obtient :

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left[\left(f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k\right)(x-t)^{n-\alpha}\right]_{t=a}^{t=x}$$
$$+\int_a^x \frac{((x-t)^{n-\alpha+1)-1}}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)\left[f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(t-a)^k\right]dt.$$

Donc,

$$\mathcal{I} = I_a^{n-\alpha+1}D\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right].$$

De même façon pour n fois on aura :

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= I_a^{n-\alpha+n}D^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right]\\ &= I_a^nI_a^{n-\alpha}D^n\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right]\\ &= I_a^nI_a^{n-\alpha}\left[D^nf(x)-D^n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right].\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k$ est un polynôme de degré $n-1$, donc :

$$\mathcal{I} = I_a^nI_a^{n-\alpha}\left[D^nf(x)\right].$$

Alors,

$$\begin{aligned}D_a^\alpha\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^nI_a^{n-\alpha}\left[D^nf(x)\right]\\ &= D^nI_a^nI_a^{n-\alpha}\left[D^nf(x)\right].\end{aligned}$$

En tenant compte de (I.17) de la propriété I.2.1 et de la définition I.2.5, on obtient :

$$\begin{aligned}D_a^\alpha\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] &= \underbrace{D^nI_a^n}_{Id}I_a^{n-\alpha}\left[D^nf(x)\right]\\ &= I_a^{n-\alpha}\left[D^nf(x)\right]\\ &= {}^cD_a^\alpha f(x).\end{aligned}$$

En plus par linéarité de l'opérateur D_a^α, on a :

$$D_a^\alpha\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right]=D_a^\alpha f(x)-D_a^\alpha\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right].$$

Et d'après l'exemple I.2.2, on aura :

$$\begin{aligned}D_a^\alpha\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right]&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}\ D_a^\alpha(x-a)^k\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}\,\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.\end{aligned}$$

Alors,

$$D_a^\alpha\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right]=D_a^\alpha f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Ce qui montre (I.20). ■

Lemme I.2.2 [27]
Soient $\mathfrak{Re}(\alpha)\in\,]n-1,n[,\ n\in\mathbb{N}^*$ et $f\in\mathcal{C}^n([a,b])$, alors

$$\left({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x)=f(x). \tag{I.23}$$

Preuve.
Soient $\mathfrak{Re}(\alpha)\in\,]n-1,n[,\ n\in\mathbb{N}^*$ et $f\in\mathcal{C}^n([a,b])$, La relation (I.20) de propriété I.2.4 permet d'obtenir le résultat suivant :

$$\left({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x)=\left(D_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(I_a^\alpha f\right)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Puis d'après le lemme I.2.1, on a

$$\left({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(I_a^\alpha f\right)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Et comme $k\le n-1<\mathfrak{Re}(\alpha)$, pour $k=0,1,\cdots,n-1$, alors les dérivées

$$\left(I_a^\alpha f\right)^{(k)}(a)=0.$$

Ce qui donne

$$\left({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f\right)(x) = f(x).$$

■

Lemme I.2.3 [27]
Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, alors l'équation différentielle d'ordre fractionnaire

$${}^cD_a^\alpha f(x) = 0,$$

Admet une solution

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1).$$

Où les $c_k \in \mathbb{R}$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ sont des constantes arbitraires.

Preuve.
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$, on a l'équation différentielle d'ordre fractionnaire ;

$${}^cD_a^\alpha f(x) = 0.$$

D'après la définition I.2.5, on a :

$$I^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right] = 0.$$

On applique l'opérateur ${}^cD_a^{n-\alpha}$ à cette formule, on aura :

$${}^cD_a^{n-\alpha} I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right] = 0.$$

D'après le Lemme I.2.2, il résulte que :

$${}^cD_a^{n-\alpha} I_a^{n-\alpha}\left[D^n f(x)\right] = D^n f(x) = 0.$$

Puisque $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ alors elle est développable en série de Taylor, ce qui montre que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k.$$

Où $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Lemme I.2.4 [27]
Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, alors

$$\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1).$$

Preuve.
Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, d'après la définition I.2.5, on a :

$$\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) = I_a^\alpha [I_a^{n-\alpha} f^{(n)}(x)].$$

Et d'après la proposition I.2.4, il résult que

$$\begin{aligned}\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) &= (I_a^n f^{(n)})(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt}_{(I_1)}.\end{aligned}$$

Par intégration par partie de l'intégrale (I_1), on aura

$$\begin{aligned}\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \left[(x-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t)\right]_a^x + \frac{(n-1)}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-2)}(t)\, dt \\ &= -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-1)} \underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-2} f^{(n-2)}(t)\, dt}_{(I_2)}.\end{aligned}$$

En faisant le même pour (I_2), on aura

$$\begin{aligned}\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n-2)} \int_a^x (x-t)^{n-3} f^{(n-3)}(t)\, dt.\end{aligned}$$

En poursuivant par une intégration par partie successive, on obtient finalement

$$\begin{aligned}\left(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f\right)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\ &\quad - \ldots + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x f^{(1)}(t)\, dt \\ &= -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) \\ &\quad - \ldots + f(x) - f(a) \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k.\end{aligned}$$

■

I.3 Analyse multivoque

Dans cette section, on se propose d'introduire quelques notions d'analyse multivoque qui seront utile dans notre étude. L'analyse multivoque est une branche très important en mathématique. Les problème impliquant cette dernière surgissent, lorsque l'ensemble de solution n'est pas réduit à un point, comme dans le cas des problèmes mal posés.

Soient X, Y deux espaces topologiques (espace métrique, normé). On dénote la classe de tous les sous-ensembles de X par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X) &= \{Y \subseteq X : Y \neq \emptyset\}, \\
\mathcal{P}_{cl}(X) &= \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ est fermée}\}, \\
\mathcal{P}_{b}(X) &= \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ est bornée}\}, \\
\mathcal{P}_{cp}(X) &= \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ est compact}\}, \\
\mathcal{P}_{cv}(X) &= \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ est convexe}\}, \\
\mathcal{P}_{cp,cv}(X) &= \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ est compact et convexe}\}.
\end{aligned}$$

Où $\mathcal{P}(X)$: Ensemble des parties de X.

Définition I.3.1 (Application multivoque) [2, 12]
Une multifonction (où application multivoque) F de X vers Y est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un ensemble $F(x) \subset \mathcal{P}(Y)$. On désigne par la notation suivante,

$$F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y).$$

Définition I.3.2 (Application univoque) [12]
Soient X et Y deux espaces. On dit que F est une application univoque, si pour tout x on fait correspondre un singleton. Autrement dit, pour tout $x \in X$,

$$F(x) := \{f(x)\}.$$

Où f est une fonction de X dans Y.

Définition I.3.3 (Sélection) [24]
On appelle sélection (noté :$f \subset F$) d'une multifonction $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$, toute fonction $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant :

$$f(x) \in F(x), \qquad \forall x \in X.$$

Définition I.3.4 [1, 2, 43]
Soit $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ une application multivoque.

(1) On appelle **domaine** de F, l'ensemble :

$$Dom(F) := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}.$$

F est dit **stricte** (resp. **propre**), si $Dom(F) = X$ (resp. $Dom(F) \neq \emptyset$)

(2) On appelle **image** de F, l'ensemble :

$$Im(F) := \{y \in Y \mid \exists x \in X;\ y \in F(x)\} := \bigcup_{x \in X} F(x).$$

(3) On appelle **image d'une partie** A de X par F, l'ensemble :

$$F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x).$$

(4) On appelle **graphe** de F le sous ensemble de $X \times Y$, définie par :

$$Graph(F) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

(5) On appelle **image réciproque** de F, l'ensemble F^{-1} de $\mathcal{P}(Y)$ dans X est définie par :

$$F^{-1}(y) := \{x \in X \mid (x, y) \in Graph(F)\}.$$

(6) On appelle **image réciproque d'une partie** non vide D de Y par F, l'ensemble :

$$F^{-1}(y) := \{x \in X \mid F(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

$F(x)$ est dite **image** où **valeur** de F en x.

(7) On dit que F admet un **point fixe** s'il existe un point $x \in X$ (appelé point fixe de F), tel que :

$$x \in F(x).$$

L'ensemble des points fixes de l'opérateur F est désigné par :

$$Fix(F) := \{x \in X \mid x \in F(x)\}.$$

Définition I.3.5 [2]
Une application multivoque $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est dit :

(1) Fermée (resp. convexe, mesurable) si est seulement si son graphe est fermée (resp. convexe, mesurable).

(2) Convexe si et seulement si pour tous $x_1, x_2 \in Dom(F)$ et $\beta \in [0,1]$, on a :

$$\beta F(x_1) + (1-\beta)F(x_2) \subset F(\beta x_1 + (1-\beta)x_2).$$

(3) à valeurs fermées (resp. convexes, bornées, compacts), si pour tout $x \in X$, l'image $F(x)$ est fermée (resp. convexe, bornée, compact).

Définition I.3.6 [8]
Soient $y \in AC(J, \mathbb{R}^n)$ et $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est une application multivoque.

- F est borné, si pour tout ensemble $B \in \mathcal{P}_b(X)$, l'ensemble $F(B)$ est borné dans X, c-à-d :
$$\sup_{x \in B} \{\sup \{||y|| \ : \ y \in F(x) \ \}\} < \infty.$$
- F est dite complètement continue, si $F(B)$ est relativement compact pour tout ensemble $B \in \mathcal{P}_b(X)$.

Définition I.3.7 [1, 15]
Une multifonction F est dite semi-continue supérieurement (s.c.s) au point $x_0 \in X$, si pour tout ensemble ouvert N contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que : $F(V) \subset N$.
On dit que F est semi-continue supérieurement si elle est s.c.s en tout point $x_0 \in X$.

Définition I.3.8 [1]
Une multifonction F est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) au point $x_0 \in X$, si pour tout $y_0 \in F(x_0)$ et pour tout voisinage ouvert U de y_0, il existe un voisinage ouvert V de x_0, tel que :
$$\forall x \in V, \quad F(x) \cap U \neq \emptyset.$$
On dit que F est semi-continue inférieurement si elle est s.c.i en tout point $x_0 \in X$.

Définition I.3.9 [1]
Une multifonction F est dite continue en un point $x_0 \in X$, si elle est à la fois s.c.s et s.c.i au point x_0. On dit que F est continue si elle l'est en tout point $x_0 \in X$.

Définition I.3.10 [12, 1]
Soient X un espace normé et $\Omega \neq \emptyset$ un sous ensemble de X. Une application multivoque $F : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ est dite :

- **Semi-continue supérieurement en x_0 au sens de ε** (noté : ε-δ-s.c.s) si, pour tout $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ telle que :
$$F(x) \subset F(x_0) + B_\varepsilon(0), \qquad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega.$$

- **Semi-continue inférieurement en x_0 au sens de ε** (noté : ε-δ-s.c.i) si, pour tout $x_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ telle que :
$$F(x_0) \subset F(x) + B_\varepsilon(0), \qquad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega.$$

On dit que F est ε-δ-s.c.s (resp. ε-δ-s.c.i) si, elle est ε-δ-s.c.s (resp. ε-δ-s.c.i) en tout point $x_0 \in X$.

Remarque I.3.1
Soient $x_0 \in \Omega$ et $r \in \mathbb{R}_+$. La boule ouvert de centre x_0 et de rayon r est définie par :
$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{x \in X \ : \ \|x - x_0\| < r\}.$$

Et on a,
$$B(x_0, r) = x_0 + rB(0, 1) = x_0 + B(0, r).$$

En effet,
Prenons d'abord $x \in x_0 + B(0, r)$. Alors, il existe $\omega \in B(0, r)$ tel que $x = x_0 + \omega$ et
$$\|x - x_0\| = \|\omega\| < r.$$

donc $x \in B(x_0, r)$.
Réciproquement, supposons que $x \in B(x_0, r)$ et posons $\omega = x - x_0$. Alors, on a $x = x_0 + \omega$ et
$$\|\omega\| = \|x - x_0\| < r.$$

On a donc $\omega \in B(0, r)$ ce qui prouve que $x \in x_0 + B(0, r)$. ■

Définition I.3.11 [1]
Dans un espace normé, on dit que F est ε-δ-s.c.s (resp. s.c.i) si, F est s.c.s (resp. ε-δ-s.c.i). L'inverse n'est pas vraie en générale.

Lemme I.3.1 [12, 24]
Si $F : X \to \mathcal{P}_{cl}(Y)$ est s.c.s, alors $Graph(F)$ est un sous ensemble fermé de $X \times Y$, i.e : pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$, si $x_n \to x_*,\ y_n \to y_*$ quand $n \to \infty$ avec $y_n \in F(x_n)$, alors $y_* \in F(x_*)$. Inversement, si F est complètement continue à valeurs compactes non vides et a son graph fermé, alors F est s.c.s.

Soient (X, d) un espace métrique séparable et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesurable, i.e. un ensemble Ω est muni d'une σ-algèbre $\mathcal{A}$ et une mesure additive μ sur $\mathcal{A}$. On considère que Ω est un domaine borné dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^k$, muni de la mesure de Lebesgue.

Définition I.3.12 [2]
Soit $F : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ une application multivoque à valeurs fermées. On dit que F est mesurable, si l'image réciproque de tout ensemble ouvert est mesurable, c-à-d on a :

$$F^{-1}(\mathcal{O}) := \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset\ \} \in \mathcal{A},$$

pour tout ensemble ouvert $\mathcal{O} \subset X$.

Théorème I.3.1 [10, 21]
Soit $F : \Omega \to \mathcal{P}_{cp}(X)$ une multifonction mesurable à valeur non vide. Alors, F a une sélection mesurable.

Proposition I.3.1 [10, 21]
Si $F_1, F_2 : \Omega \to \mathcal{P}_{cp}(X)$ deux multifonction mesurable, alors l'application multivoque $t \to F_1(t) \cap F_2(t)$ est mesurable.

Définition I.3.13 [8]
Une application multivoque $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{P}_{cl}(X)$ est dite mesurable, si pour tout $v \in X$, la fonction $\zeta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\zeta(t) = d(v, F(t)) = \inf\{||v - z|| \ :\ z \in F(t)\},$$

est mesurable.

Lemme I.3.2 [48]
Soient $F : [0, b] \to \mathcal{P}(X)$ une application multivoque et $u : [0, b] \to X$ une fonction mesurable. Alors, pour tout fonction mesurable $v : [0, b] \to \mathbb{R}_+$, il existe une sélection mesurable f_v de F telle que

$$|u(t) - f_v(t)| \leq d(u(t), F(t)) + v(t), \qquad \forall t \in [0, b].$$

Lemme I.3.3 [14]
Soient $F : [0,b] \to \mathcal{P}_{cp}(X)$ une application multivoque mesurable et $u : [0,b] \to X$ une fonction mesurable. Alors, il existe une sélection mesurable f de F telle que

$$|u(t) - f(t)| \leq d(u(t), F(t)), \qquad \forall t \in [0,b].$$

Preuve.
Soit $v_\varepsilon : [0,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable définie par $v_\varepsilon(t) = \varepsilon$.
Alors d'après le Lemme I.3.2, il existe une sélection mesurable f_ε de F telle que

$$|u(t) - f_\varepsilon(t)| \leq d(u(t), F(t)) + \varepsilon.$$

Nous prenons $\varepsilon = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u(t) - f_n(t)| \leq d(u(t), F(t)) + \frac{1}{n}.$$

Puisque F a des valeurs compactes, nous pouvons passer à une sous suite, si nécessaire pour que $(f_n(.))$ converge vers une fonction mesurable f de F.
Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on aura

$$|u(t) - f(t)| \leq d(u(t), F(t)), \qquad \forall t \in [0,b].$$

■

Définition I.3.14 (Fonction de Carathéodory) [8]
Une application multivoque $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est dite Carathéodory si elle vérifie :

(i) $t \longmapsto F(t,u)$ est mesurable pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $u \longmapsto F(t,u)$ est s.c.s (resp. s.c.i, continue) pour tout $t \in \Omega$.
F est dite L^1-Carathéodory si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées. De plus, elle vérifiée la condition suivante :

(iii) pour tout $c > 0$, il existe $\sigma_c \in L^1(\Omega, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\|F(t,u)\|_{\mathcal{P}} = \sup\{||f|| \ : \ f \in F(t,u)\} \leq \sigma_c(t), \quad \text{pour tout} \quad t \in \Omega \quad \text{et} \quad ||u|| \leq c.$$

Pour chaque $u \in \mathcal{C}(\Omega, X)$, on définie l'ensemble des sélection de F par :

$$S_{F,u} = \left\{ v \in L^1(\Omega, X) \ : \ v(t) \in F(t, u(t)) \quad \text{pour tout} \quad t \in \Omega \right\}.$$

Définition I.3.15 (Distance de Hausdorff-Poumpeiu) [8]
Soient (X, d) un espace métrique induit par l'espace normé $(X, \|.\|)$ et A, B deux paries non vides de X. On considère la distance Hausdorff-Poumpeiu, l'application :

$$H_d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

définie par :

$$H_d(A, B) = \max\left\{\sup_{b\in B} d(a, B),\ \sup_{a\in A} d(A, b)\right\}.$$

Où :

$$d(a, B) = \inf_{b\in B} d(a, b) \ \text{ et } \ d(A, b) = \inf_{a\in A} d(a, b).$$

Alors, l'espace $(\mathcal{P}_{b,cl}(X), H_d)$ est un espace métrique et $(\mathcal{P}_{cl}(X), H_d)$ est un espace métrique généralisé.

Propriétés I.3.1 [10]
D'après cette définition, on peut facilement vérifier les propriétés suivantes :

(1) $H_d(A, A) = 0$, pour tout $A \in X$.

(2) $H_d(A, B) = H_d(B, A)$, pour tout $A, B \in X$.

(3) $H_d(A, B) \leq H_d(A, C) + H_d(C, B)$, pour tout $A, B, C \in X$.

Définition I.3.16 [8]
Un opérateur multivoque $F : X \to \mathcal{P}_{cl}(X)$ est dite :

(i) γ-Lipschitz s'il existe $\gamma > 0$, tel que :

$$H_d(F(u), F(v)) \leq \gamma\, d(u, v), \quad \forall u, v \in X.$$

(ii) γ-contractive s'il est γ-Lipschitz avec $\gamma < 1$.

I.4 Théorèmes du point fixe

Dans cette section, nous présentons des théorèmes de point fixe qui seront utiles dans notre travaille pour l'existence des solutions du problème aux limite d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire.

Par $\overline{U}$ et ∂U nous dénotons la fermeture de U et la frontière de U respectivement.

Théorème I.4.1 (L'alternative non linéaire de Leray-Schauder) [8, 18]
Soient X un espace de Banach, $\mathcal{C}$ un ensemble convexe non vide de X. Soient un ensemble $U \subset \mathcal{C}$ avec $0 \in U$ et $F : \overline{U} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})$ une multifonction semi-continu supérieurement et complètement continue, alors on a l'alternative suivant :

i) F a un point fixe.

Ou bien

ii) il existe $u \in \partial U$ et $\lambda \in (0, 1)$ tel que : $u \in \lambda F(u)$.

Théorème I.4.2 (Covitz-Nadler) [8, 11]
Soit (X, d) un espace métrique complet. Si $F : X \longrightarrow \mathcal{P}_{cl}(X)$ est une contraction alors F admet un point fixe (i.e. $Fix(F) \neq \emptyset$).

Problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire cas où $0 < \alpha < 1$

II.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le problème aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire et nous nous intéressons à l'existence des solutions de ce problème dans le cas convexe et non convexe. En particulier, nos résultats s'étendent au cas multivoque ceux examinés récemment par Benchohra et al. dans [7]. Plus précisément, nous considérons le problème suivant :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) \in F(t, y(t)), \quad \text{pour tout } \ t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha < 1, \tag{II.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c. \tag{II.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ *est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo,* $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *est une application multivoque,* a, b, c *sont des constantes réelles avec* $a + b \neq 0$.
Avant de prouver nos résultats principaux pour ce chapitre, nous donnons la définition de la solution du problème (II.1)-(II.2), ainsi que des lemmes utiles dans ce qui suit.

Définition II.1.1 [5]
On dit que la fonction $y \in AC^1(J, \mathbb{R})$ est une solution du problème (II.1)-(II.2), s'il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t, y(t))$, pour tout $t \in J$, telle que

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = v(t), \quad \text{pour tout } \ t \in J, \quad 0 < \alpha < 1,$$

et la fonction y satisfait la condition (II.2).

Pour l'existence des solutions de problème (II.1)-(II.2), on a besoin du lemme suivant :

Lemme II.1.1 [26, 5]
Soient $0 < \alpha < 1$ et $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds. \tag{II.3}$$

Si et seulement si y est la solution de problème de Cauchy pour l'équation différentielle fractionnaire

$$ {}^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in J, \tag{II.4}$$
$$ y(0) = y_0. \tag{II.5}$$

Preuve.
Supposons que y est solution de (II.3), c-à-d :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= y_0 + I^\alpha h(t). \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur ${}^cD^\alpha$ aux deux membres de l'égalité (II.3) et par sont linéarité, on aura :

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha \left[y_0 + I^\alpha h(t)\right] \\ &= {}^cD^\alpha y_0 + \left({}^cD^\alpha I^\alpha h\right)(t). \end{aligned}$$

D'après le lemme I.2.3 on a :

$$ {}^cD^\alpha y_0 = 0. \tag{$*$}$$

Et puisque $\alpha \in]0,1[$ et h est fonction continue, alors d'après lemme I.2.2, on a :

$$\left({}^cD^\alpha I^\alpha h\right)(t) = h(t). \tag{$**$}$$

Alors d'après ($*$) et ($**$), on a

$$ {}^cD^\alpha y(t) = h(t).$$

Ce qui montre (II.4).
Il reste à vérifier la condition (II.5), c-à-d :

$$y(0) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^0 (0-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Donc,

$$y(0) = y_0.$$

Alors y est une solution de problème aux limites (II.4)-(II.5).
Inversement, supposons que y est solution de problème de Cauchy :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in J = [0,T], & \text{(II.4)} \\ y(0) = y_0. & \text{(II.5)} \end{cases}$$

En appliquant l'opérateur I^α aux deux membres de l'égalité (II.4), on aura :

$$\begin{aligned} \left(I^\alpha\, {}^cD^\alpha y\right)(t) &= I^\alpha h(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds. \end{aligned} \tag{II.6}$$

Et d'après Lemme I.2.4, on a :

$$\left(I^\alpha\, {}^cD^\alpha y\right)(t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}(t-0)^k.$$

Puisque $\alpha \in]0,1[$, donc $n = [\alpha] + 1 = 1$. Alors on obtient :

$$\left(I^\alpha\, {}^cD^\alpha y\right)(t) = y(t) - y(0). \tag{II.7}$$

Donc de (II.6) et (II.7), on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + I^\alpha h(t) \\ &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds. \end{aligned}$$

Alors, y est solution de l'équation intégrale fractionnaire. ∎

Comme conséquence de Lemme II.1.1 nous avons le résultat suivant qui est utile dans ce qui suit :

Lemme II.1.2
Soient $0 < \alpha < 1$ et $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - c\right]. \tag{II.8}$$

Si et seulement si y est la solution de problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in J, \tag{II.9}$$
$$ay(0) + by(T) = c. \tag{II.10}$$

Preuve.
Supposons que y est solution de (II.8), c-à-d :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - c\right] \\ &= I^\alpha h(t) - \frac{1}{a+b}\Big[bI^\alpha h(T) - c\Big]. \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur $^cD^\alpha$ aux deux membre de l'égalité (II.8) et par sont linéarité, on aura :

$$\begin{aligned} ^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha \left(I^\alpha h(t) - \underbrace{\frac{1}{a+b}\Big[bI^\alpha h(T) - c\Big]}_{C} \right) \\ &= \left({}^cD^\alpha I^\alpha h\right)(t) - {}^cD^\alpha C. \end{aligned}$$

D'après le lemme I.2.3, on a :

$$^cD^\alpha C = 0. \tag{$*$}$$

Et puisque $\alpha \in]0,1[$ et h est fonction continue, alors d'après lemme I.2.2, on a :

$$\left({}^cD^\alpha I^\alpha h\right)(t) = h(t). \tag{$**$}$$

Alors d'après ($*$) et ($**$), on a

$$^cD^\alpha y(t) = h(t).$$

Ce qui montre (II.9).

Il reste à vérifier la condition aux limites (II.10), on a :

$$\begin{cases} y(0) &= I^\alpha h(0) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c]. \\ y(T) &= I^\alpha h(T) - \frac{1}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c]. \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= aI^\alpha h(0) - \frac{a}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c] + bI^\alpha h(T) - \frac{b}{a+b}[bI^\alpha h(T) - c] \\ &= bI^\alpha h(T) - \frac{ab}{a+b}I^\alpha h(T) + \frac{ac}{a+b} - \frac{b^2}{a+b}I^\alpha h(T) + \frac{bc}{a+b} \\ &= \frac{(ab+b^2)}{a+b}I^\alpha h(T) - \frac{(ab+b^2)}{a+b}I^\alpha h(T) + \frac{c(a+b)}{a+b} \\ &= c. \end{aligned}$$

Ce qui montre (II.10).
Inversement, supposons que y satisfait (II.9), alors d'après le Lemme II.1.1, on a :

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds.$$

Il reste à vérifier la condition aux limites (II.10), telle que :

$$\begin{cases} y(0) &= y_0. \\ y(T) &= y_0 + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds. \end{cases}$$

On a

$$ay_0 + by_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds = c.$$

Donc

$$(a+b)y_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds = c.$$

D'où

$$y_0 = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds\right].$$

Alors,

$$y(t) = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds\right] + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds.$$

Ce qui montre (II.8). ■

II.2 Résultats Principaux

II.2.1 Cas Convexe

Nous présentons le premier résultat concernant l'existence de la solution du problème (II.1)-(II.2), nous considération sont basée sur le théorème I.4.1 du point fixe d'alternative non linéaire de Leray Schauder. Initialement, nous supposons que F est une application multivoque compacte et convexe.

Hypothèses :

Soient les hypothèses suivantes :

(H1) $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ est une application multivoque Carathéodory.

(H2) Ils existes $p \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^+)$ et $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ une fonction continue et non décroissante, telle que :

$$\|F(t,u)\|_{\mathcal{P}} = \sup\{|v| \ : \ v \in F(t,u)\} \leq p(t)\psi(|u|), \quad \text{pour } t \in J \text{ et chaque } u \in \mathbb{R}.$$

(H3) Il existe $l \in L^1(J, \mathbb{R})$, avec $I^\alpha l < \infty$ telle que :

$$H_d(F(t,u), F(t,\overline{u})) \leq l(t)|u - \overline{u}|, \quad \text{pour tout } u, \overline{u} \in \mathbb{R},$$

et

$$d(0, F(t,0)) \leq l(t), \quad \forall t \in J.$$

Théorème II.2.1 [5]

Supposons que **(H1)**, **(H2)** et **(H3)** ainsi que l'hypothèse suivantes sont vérifiés :

(H4) il existe une constante $M > 0$ telle que,

$$\left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] \frac{T^\alpha \psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|c|}{|a+b|} < M. \tag{II.11}$$

Alors, le problème (II.1)-(II.2) admet au moins une solution dans J.

Preuve.
On va transformer le problème (II.1)-(II.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur multivoque,

$$N : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R})),$$

définie par :

$$N(y)=\left\{h\in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : h(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)\ ds-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)\ ds-c\right],\ v\in S_{F,y}\right\}.$$

Il est claire, d'après le Lemme II.1.2 que les point fixes de N sont solutions de problème (II.1)-(II.2).

Nous allons utiliser l'alternative non linéaire de Leray Schauder pour montrer que N admet un point fixe. La preuve sera donnée en cinq étapes.
Étape 1 : $N(y)$ est convexe pour tout $y\in\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$.
En effet, si $h_1,h_2\in N(y)$, alors il existe $v_1,v_2\in S_{F,y}$ telle que pour tout $t\in J$, on a :

$$h_i(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v_i(s)\ ds-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v_i(s)\ ds-c\right],\quad i=1,2.$$

Soit $\beta\in[0,1]$. Alors, pour tout $t\in J$, on a :

$$\begin{aligned}(\beta h_1+(1-\beta)h_2)(t)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\beta v_1(s)\ ds+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(1-\beta)v_2(s)\ ds\right]\\ &-\frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\beta v_1(s)\ ds+\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}(1-\beta)v_2(s)\ ds\right]\\ &+\frac{1}{(a+b)}[\beta c+(1-\beta)c].\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}(\beta h_1+(1-\beta)h_2)(t)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Big[\beta v_1(s)+(1-\beta)v_2(s)\Big]\ ds\\ &-\frac{1}{(a+b)}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\Big[\beta v_1(s)ds+(1-\beta)v_2(s)\Big]ds-c\right].\end{aligned}$$

Comme $S_{F,y}$ est convexe (car F est convexe), on a :

$$\beta h_1+(1-\beta)h_2\in N(y).$$

Étape 2 : N transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$.
En effet, soient $B_\eta = \{y \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta\}$ un ensemble borné dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ où η une constante positive et $y \in B_\eta$. Alors pour tout $h \in N(y)$, il existe $v \in S_{F,y}$ telle que :

$$h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - c\right], \quad t \in J.$$

Par **(H2)**, on a pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
|h(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v(s)|\, ds + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v(s)|\, ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(|y(s)|)\, ds + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(|y(s)|)\, ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\|y\|_\infty)\, ds + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s)\psi(\|y\|_\infty)\, ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} p(s)\, ds + \frac{|b|\psi(\eta)}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} p(s)\, ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{\psi(\eta)\ \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, ds + \frac{|b|\ \psi(\eta)\ \|p\|_\infty}{|a+b|\ \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\, ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{t^\alpha\ \psi(\eta)\ \|p\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{T^\alpha\ |b|\ \psi(\eta)\ \|p\|_\infty}{|a+b|\ \alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Prenons le supremum pour tout $t \in J$, on obtient

$$\|h\|_\infty \leq \frac{T^\alpha\ \psi(\eta)\ \|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{T^\alpha\ |b|\ \psi(\eta)\ \|p\|_\infty}{|a+b|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|c|}{|a+b|} = \ell.$$

Alors, pour tout $h \in N(B_\eta)$, il existe une constante positive ℓ telle que :

$$\|h\|_\infty \leq \ell.$$

Ce qui montre que $N(B_\eta)$ est uniformément borné.

Étape 3 : N transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinue dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$. Soient $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$ et B_η un ensemble borné dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ donné dans l'étape deux. Soient $y \in B_\eta$ et $h \in N(y)$, alors il existe $v \in S_{F,y}$ telle que :

$$\begin{aligned}
|h(t_2) - h(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} v(s)\, ds \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} v(s)\, ds \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] v(s)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} v(s)\, ds \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left| (t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right| |v(s)|\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} \left| (t_2 - s)^{\alpha-1} \right| |v(s)|\, ds.
\end{aligned}$$

Par **(H2)**, on a pour tout $t_1, t_2 \in J$ et $t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned}
|h(t_2) - h(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1} \right] p(s)\psi(|y(s)|)\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} p(s)\psi(|y(s)|)\, ds \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty\, \psi(\|y\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1} \right]\, ds + \frac{\|p\|_\infty\, \psi(\|y\|_\infty)}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1}\, ds \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty\, \psi(\eta)}{\Gamma(\alpha)} \Big[(t_2 - s)^{\alpha} - (t_1 - s)^{\alpha} \Big]_0^{t_1} + \frac{\|p\|_\infty\, \psi(\eta)}{\Gamma(\alpha)} \Big[-(t_2 - s)^{\alpha} \Big]_{t_1}^{t_2} \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty\, \psi(\eta)}{\Gamma(\alpha+1)} \Big[(t_2 - t_1)^{\alpha} + t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha} \Big] + \frac{\|p\|_\infty\, \psi(\eta)}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^{\alpha} \\
&\leq \frac{\|p\|_\infty\, \psi(\eta)}{\Gamma(\alpha+1)} \Big[2(t_2 - t_1)^{\alpha} + (t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha}) \Big].
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0, ce qui montre $N(B_\eta)$ est équicontinue.

D'après les étapes de 1 à 3 et le Théorème I.1.1 d'Arzelà-Ascoli, nous pouvons conclure que $N : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))$ est un opérateur complètement continue.

Étape 4 : N est semi-continue supérieurement (s.c.s).
En effet, comme N est complètement continue à valeurs compacts non vides, il suffit de montrer que N a son graphe fermé.
Soient $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, telle que $y_n \to y_*$, $h_n \to h_*$ quand $n \to \infty$ avec $h_n \in N(y_n)$. Il faut montrer que $h_* \in N(y_*)$.
Puisque $h_n \in N(y_n)$, alors il existe $v_n \in S_{F,y_n}$, telle que :

$$h_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_n(s)\, ds - c\right], \quad \forall t \in J.$$

Nous devons montrer qu'il existe $v_* \in S_{F,y_*}$, telle que :

$$h_*(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_*(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_*(s)\, ds - c\right], \quad \forall t \in J.$$

On a $F(t,\cdot)$ est semi-continue supérieurement d'après **(H1)**, alors elle est semi-continue supérieurement en y_* au sens de ε.
Donc, pour tout $y_* \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(y_*, \varepsilon) > 0$ telle que pour tout $n \geq n_\delta$,

$$F(t, y_n(t)) \subset F(t, y_*(t)) + B_\varepsilon(0), \quad \forall t \in J, \quad \forall y_n \in B_\delta(y_*) \cap \mathcal{C}(J,\mathbb{R}).$$

D'où

$$v_n(t) \in F(t, y_n(t)) \subset F(t, y_*(t)) + \varepsilon B_1(0), \quad \forall t \in J, \quad \forall y_n \in B_\delta(y_*) \cap \mathcal{C}(J,\mathbb{R}).$$

Puisque $F(\cdot,\cdot)$ est à valeurs compactes. alors d'après le théorème I.1.2 de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous suite $v_{n_m}(\cdot)$ telle que :

$$v_{n_m}(\cdot) \to v_*(\cdot) \text{ quand } m \to \infty, \quad \text{et} \quad v_* \in F(t, y_*(t)), \text{ pour chaque } t \in J.$$

D'après **(H1)**, on a l'application $t \mapsto F(t, y_n(t))$ est mesurable et $v_* \in L^1(J,\mathbb{R})$ une fonction mesurable. Alors, il existe par le lemme I.3.3, une sélection mesurable v_{n_m} de $F(\cdot, y_n(\cdot))$, telle que :

$$\begin{aligned} |v_{n_m}(t) - v_*(t)| &\leq d\left(F(t, y_n(t)), v_*(t)\right) \\ &\leq H_d(F(t, y_n(t)), F(t, y_*(t))). \end{aligned}$$

Par **(H3)**, il s'ensuit que :

$$|v_{n_m}(t) - v_*(t)| \leq l(t)|y_n(t) - y_*(t)|.$$

On observe que,

$$|h_n(t)-h_*(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v_{n_m}(s)-v_*(s)|\,ds + \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v_{n_m}(s)-v_*(s)|\,ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}l(s)|y_n(s)-y_*(s)|\,ds + \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}l(s)|y_n(s)-y_*(s)|\,ds.$$

Donc, prenons le supremum pour tout $t\in J$, on obtient

$$\|h_n-h_*\|_\infty \leq I^\alpha l(T)\|y_n-y_*\|_\infty + \frac{|b|\,I^\alpha l(T)}{|a+b|}\|y_n-y_*\|_\infty$$

$$\leq \left[I^\alpha l(T) + \frac{|b|\,I^\alpha l(T)}{|a+b|}\right]\|y_n-y_*\|_\infty \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Alors, $h_*\in N(y_*)$. Ce qui montre que N a son graphe fermé.
Étape 5 : Estimation à priori des solutions.
Soit y une solution possible au problème (II.1)-(II.2) telle que $y\in\lambda N(y)$ avec $\lambda\in(0,1)$.
Alors, il existe $v\in S_{F,y}$ tel que pour tout $t\in J$,

$$y(t)=\lambda\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds - c\right]\right).$$

Cela implique par **(H2)** que, pour chaque $t\in J$, nous avons,

$$|y(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v(s)|\,ds + \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v(s)|\,ds + \frac{|c|}{|a+b|}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|y(s)|)\,ds + \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|y(s)|)\,ds + \frac{|c|}{|a+b|}$$

$$\leq \frac{\psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds + \frac{|b|\psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,ds + \frac{|c|}{|a+b|}$$

$$\leq \frac{t^\alpha\psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{T^\alpha|b|\psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{|a+b|\,\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{|c|}{|a+b|}.$$

Donc, prenons le supremum pour tout $t\in J$, on obtient

$$\|y\|_\infty \leq \left[1+\frac{|b|}{|a+b|}\right]\frac{T^\alpha\psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|c|}{|a+b|}.$$

Alors par la condition (II.11), il existe une constante $M > 0$, telle que

$$\|y\|_\infty < M.$$

Soit

$$U = \{y \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \ : \ \|y\|_\infty < M\}.$$

L'opérateur $N : \overline{U} \to \mathcal{P}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))$ est semi-continue supérieurement et complètement continue. Du choix de U, il n'existe pas un $y \in \partial U$ telle que $y \in \lambda N(y)$ pour certains $\lambda \in (0,1)$.
Par conséquence du théorème I.4.1 du point fixe d'alternative non linéaire de Leray-Schauder, on déduit que N admet au moins un point fixe y dans $\overline{U}$ qui est solution du problème (II.1)-(II.2). ■

II.2.2 Cas Non-Convexe

On présente maintenant un résultat pour le problème (II.1)-(II.2) avec F est une application multivoque compact et non convexe. Nos considérations sont basée sur le théorème I.4.2 du point fixe de Covitz et Nadler pour les contractions multivoques.

Théorème II.2.2 [5]
Supposons **(H3)** et l'hypothèse suivante sont vérifiés :

(H5) $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ une application multivoque telle que : $F(\cdot,u) : J \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ est mesurable pour chaque $u \in \mathbb{R}$;

Si

$$\left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] I^\alpha l(T) < 1. \tag{II.12}$$

Alors le problème (II.1)-(II.2) admet au moins une solution sur J.

Remarque II.2.1
Pour tout $y \in C(J,\mathbb{R})$, comme F vérifié **(H5)** alors l'ensemble des sélection $S_{F,y}$ est non vide et F admet une sélection mesurable (voir le théorème I.3.1).

Preuve.
Nous montrons que N satisfait aux hypothèses de théorème du point fixe de Covitz et Nadler. La preuve sera donné en deux étapes.

Étape 1 : $N(y) \in \mathcal{P}_{cl}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))$, pour tout $y \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$.
En effet, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N(y)$, tel que $y_n \to \tilde{y}$ dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que $\tilde{y} \in N(y)$.

Puisque $y_n \in N(y)$, alors il existe $v_n \in S_{F,y}$ telle que :

$$y_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_n(s)\, ds - c\right], \ \forall t \in J.$$

Nous devons montrer qu'il existe $v \in S_{F,y}$, telle que :

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - c\right], \ \forall t \in J.$$

En utilisant **(H3)** et le fait que F est à valeurs compactes, alors d'après le théorème I.1.2 de Bolzano-Weierstrass, on peut passer à une sous-suite pour obtenir que v_n converge faiblement vers v dans $L^1(J, \mathbb{R})$ (L'espace muni de la topologie faible).
Une application de théorème I.1.3 de Mazur implique que v_n converge fortement vers v et donc $v \in S_{F,y}$. Alors, pour chaque $t \in J$,

$$y_n(t) \to \tilde{y}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - c\right].$$

Alors, $\tilde{y} \in N(y)$.
Étape 2 : N est une contraction.
En effet, soit $y, \overline{y} \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ et $h_1 \in N(y)$. Alors, il existe $v_1(t) \in F(t, y(t))$ tel que pour tout $t \in J$,

$$h_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_1(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_1(s)\, ds - c\right].$$

D'après **(H3)**, il s'ensuit que

$$H_d(F(t, y(t)), F(t, \overline{y}(t))) \leq l(t)|y(t) - \overline{y}(t)|.$$

Il existe donc $w \in F(t, \overline{y}(t))$ tel que

$$|v_1(t) - w| \leq l(t)|y(t) - \overline{y}(t)|, \quad t \in J.$$

Considérons l'opérateur $W : J \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$W(t) = \{w \in \mathbb{R} \ : \ |v_1(t) - w| \leq l(t)|y(t) - \overline{y}(t)|\}.$$

Puisque l'opérateur multivoque $V(t) = W(t) \cap F(t, \overline{y}(t))$ est mesurable (voir proposition I.3.1), il existe une fonction $v_2(t)$ qui est une sélection mesurable pour V.

Donc, $v_2(t) \in F(t, \overline{y}(t))$,

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq l(t)|y(t) - \overline{y}(t)|, \quad \forall\, t \in J.$$

On définit pour chaque $t \in J$,

$$h_2(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_2(s)\, ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_2(s)\, ds - c\right].$$

Alors pour $t \in J$,

$$|h_1(t) - h_2(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v_1(s) - v_2(s)|\, ds + \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v_1(s) - v_2(s)|\, ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s)|y(s) - \overline{y}(s)|\, ds + \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s)|y(s) - \overline{y}(s)|\, ds.$$

Ainsi, prenons le supremum pour tout $t \in J$, on obtient

$$\|h_1 - h_2\|_\infty \leq \left(\left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] I^\alpha l(T)\right) \|y - \overline{y}\|_\infty.$$

A partir d'une relation analogue, obtenu en inversant les rôles de y et $\overline{y}$, il s'ensuit que

$$H_d(N(y), N(\overline{y})) \leq \left(\left[1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right] I^\alpha l(T)\right) \|y - \overline{y}\|_\infty.$$

Donc par (II.12), N est une contraction.
Alors, d'après le théorème I.4.2 du point fixe de Covitz et Nadler, N admet au moins un point fixe y qui est solution du problème (II.1)-(II.2). ■

Remarque II.2.2
Nos résultats pour le problème aux limites (II.1)-(II.2) sont appliqués aux problèmes de valeur initiale ($a = 1,\ b = 0$), aux problèmes de valeur terminale ($a = 0,\ b = 1$) et aux solutions anti-périodiques ($a = 1,\ b = 1,\ c = 0$).

II.2.3 Exemple

Nous appliquons le résultat principal qui est le Théorème II.2.1 à l'inclusion différentielle fractionnaire suivante,

$$^{c}D^{\alpha}y(t) \in F(t, y(t)), \quad \textit{pour tout} \ t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha < 1, \tag{II.13}$$

$$y(0) = y_0, \tag{II.14}$$

Où $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *est une application multivoque définie par*

$$F(t, y) = \{v \in \mathbb{R} \ : \ f_1(t, y) \leq v \leq f_2(t, y)\},$$

Où pour tout $t \in J$*,* $f_1(t, .)$ *est semi continue inférieurement (i.e, l'ensemble* $\{y \in \mathbb{R} \ : \ f_1(t, y) > \mu\}$ *est ouvert pour tout* $\mu \in \mathbb{R}$*) et* $f_2(t, .)$ *est semi continue supérieurement (i.e, l'ensemble* $\{y \in \mathbb{R} \ : \ f_2(t, y) < \mu\}$ *est ouvert pour tout* $\mu \in \mathbb{R}$*).*
Supposons qu'il existe un $p \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ *et* $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ *une fonction continue et non décroissante telle que :*

$$\max(|f_1(t, y)|, |f_2(t, y)|) \leq p(t)\psi(|y|), \quad t \in J, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

Il est évident que F *est à valeur compact et convexe et elle est semi-continue supérieurement. puisque toutes les conditions du théorème II.2.1 sont satisfaites, alors le problème (II.13)-(II.14) admet au moins une solution* y *sur* J*.*

Problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire cas où $1 < \alpha < 2$

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons d'autres conditions aux limites non locales pour notre problème d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire et nous nous présentons un résultat d'existence de solutions à ce problème dans le cas convexe et non convexe qui s'étendent au cas multivoque des résultats précédents dans la littérature. Plus précisément, nous considérons le problème suivant :

$$ {}^cD^\alpha y(t) \in F(t, y(t)), \quad \textit{pour tout } \ t \in J = [0, T], \quad 1 < \alpha < 2, \tag{III.1}$$

$$ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T. \tag{III.2}$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $F : J \times \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ est une application multivoque, y_0, y_T sont des constantes réelles.
Avant de prouver nos résultats principaux pour ce chapitre, nous donnons la définition de la solution du problème (III.1)-(III.2), ainsi que des lemmes utiles dans ce qui suit.

Définition III.1.1 [6]
Une fonction $y \in AC^1(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (III.1)-(III.2), s'il existe une fonction $v \in L^1(J, \mathbb{R})$ avec $v(t) \in F(t, y(t))$, pour tout $t \in J$, telle que

$$ {}^cD^\alpha y(t) = v(t), \quad \text{pour tout } \ t \in J, \quad 1 < \alpha < 2, $$

et la fonction y satisfait la condition (III.2).

Pour l'existence des solutions de problème du problème (III.1)-(III.2), on a besoin du lemme suivant :

Lemme III.1.1 [6]
Soient $1 < \alpha < 2$ et $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \quad \text{(III.3)}$$

Si et seulement si y est la solution de problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$$^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in J, \quad \text{(III.4)}$$

$$y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T. \quad \text{(III.5)}$$

Preuve.
Supposons que y est solution de (III.3), c-à-d :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T \\ &= I^\alpha h(t) + \frac{t}{T}[y_T - y_0 - I^\alpha h(T)] + y_0. \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur $^cD^\alpha$ aux deux membres de l'égalité (III.3) et par sont linéarité, on aura :

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha \left[I^\alpha h(t) + \underbrace{\frac{[y_T - y_0 - I^\alpha h(T)]}{T}}_{C} t + y_0 \right] \\ &= \left({}^cD^\alpha I^\alpha h\right)(t) - C\, {}^cD^\alpha t + {}^cD^\alpha y_0. \end{aligned}$$

D'après le lemme I.2.3 on a :

$$^cD^\alpha t = 0 \quad \text{et} \quad {}^cD^\alpha y_0 = 0. \quad (*)$$

Et puisque $\alpha \in]1, 2[$ et h est fonction continue, alors d'après lemme I.2.2, on a :

$$\left({}^cD^\alpha I^\alpha h\right)(t) = h(t). \quad (**)$$

Alors d'après $(*)$ et $(**)$, on a

$$^cD^\alpha y(t) = h(t).$$

Ce qui montre (III.4).

Il reste à vérifier la condition aux limites (III.5), on a :

$$\begin{cases} y(0) & = y_0. \\ y(T) & = y_T. \end{cases}$$

Ce qui montre (III.5).

Inversement, supposons que y est solution de problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in J = [0,T], & \text{(III.4)} \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T. & \text{(III.5)} \end{cases}$$

En appliquant l'opérateur I^α aux deux membres de l'égalité (III.4), on aura :

$$\begin{aligned} I^\alpha[{}^cD^\alpha y](t) &= I^\alpha h(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Et d'après Lemme I.2.4, on a :

$$I^\alpha[{}^cD^\alpha y](t) = y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}(t-0)^k.$$

Puisque $\alpha \in]1,2[$, alors $n = [\alpha] + 1 = 2$. On a

$$I^\alpha[{}^cD^\alpha y](t) = y(t) - y(0) - y'(0). \tag{$\star\star$}$$

Alors de ($\star$) et ($\star\star$), on a :

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds.$$

Il reste à vérifier la condition aux limite (III.5), telle que :

$$\begin{cases} y(0) & = y_0. \\ y'(0) & = \dfrac{1}{T} y_T - \dfrac{1}{T} y_0 - \dfrac{1}{T} I^\alpha h(T). \end{cases}$$

Alors,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

Ce qui montre (III.3). ∎

III.2 Résultats Principaux

III.2.1 Cas Convexe

Nous présentons le premier résultat concernant l'existence de la solution du problème (III.1)-(III.2), nous considération sont basée sur le théorème I.4.1 du point fixe d'alternative non linéaire de Leray Schauder. Initialement, nous supposons que F est une application multivoque compacte et convexe.

Hypothèses :

Soient les hypothèses suivantes :

(H1) $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp,cv}(\mathbb{R})$ est une application multivoque Carathéodory.

(H2) Ils existes $p \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^+)$ et $\psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ une fonction continue et non décroissante, telle que :

$$\|F(t,u)\|_{\mathcal{P}} = \sup\{|v| \ : \ v \in F(t,u)\} \leq p(t)\psi(|u|), \quad \text{pour } t \in J \text{ et chaque } u \in \mathbb{R}.$$

(H3) Il existe $l \in L^1(J, \mathbb{R})$, avec $I^\alpha l < \infty$ telle que

$$H_d(F(t,u), F(t,\overline{u})) \leq l(t)|u - \overline{u}|, \quad \text{pour tout } u, \overline{u} \in \mathbb{R},$$

et

$$d(0, F(t,0)) \leq l(t), \quad \forall t \in J.$$

Théorème III.2.1 [6]

Supposons que **(H1)**, **(H2)** et **(H3)** ainsi que l'hypothèse suivantes sont vérifiés :

(H4) il existe une constante $M' > 0$ telle que,

$$\frac{2T^\alpha \psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + 2|y_0| + |y_T| < M'. \tag{III.6}$$

Alors, le problème (III.1)-(III.2) admet au moins une solution dans J.

Preuve.
On va transformer le problème (III.1)-(III.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur multivoque,

$$N_1 : \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))$$

définie par :

$$N_1(y) = \left\{ h \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T,\ v \in S_{F,y} \right\}.$$

Il est claire, d'après le Lemme III.1.1 que les point fixes de N_1 sont solutions de problème (III.1)-(III.2).

Nous allons utiliser l'alternative non linéaire de Leray Schauder pour montrer que N_1 admet un point fixe. La preuve sera donnée en cinq étapes.

Étape 1 : $N_1(y)$ est convexe pour tout $y \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$.
En effet,
Si $h_1, h_2 \in N_1(y)$, alors il existe $v_1, v_2 \in S_{F,y}$ telle que pour tout $t \in J$, on a :

$$h_i(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_i(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_i(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T, \quad i = 1, 2.$$

Soit $\beta \in [0,1]$. Alors, pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
(\beta h_1 + (1-\beta) h_2)(t) = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \beta v_1(s)\, ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (1-\beta) v_2(s)\, ds \right] \\
&- \frac{t}{(T\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \beta v_1(s)\, ds - \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} (1-\beta) v_2(s)\, ds \right] \\
&- [\beta + (1-\beta)] \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + [\beta + (1-\beta)] \frac{t}{T} y_T.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(\beta h_1 + (1-\beta) h_2)(t) = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left[\beta v_1(s) + (1-\beta) v_2(s) \right]\ ds \\
&- \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \left[\beta v_1(s) ds + (1-\beta) v_2(s) \right] ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.
\end{aligned}$$

Comme $S_{F,y}$ est convexe (car F est convexe), on a :

$$\beta h_1 + (1-\beta) h_2 \in N_1(y).$$

Étape 2 : N_1 transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$.
En effet, soient $B_\eta = \{y \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta\}$ un ensemble borné dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ où η une constante positive et $y \in B_\eta$. Alors pour tout $h \in N_1(y)$, il existe $v \in S_{F,y}$ telle que :

$$h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds - \left(\frac{t}{T}-1\right)y_0 + \frac{t}{T}y_T,\quad t \in J.$$

Par **(H2)**, on a pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned}
|h(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v(s)|\,ds + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v(s)|\,ds + \left(\frac{|t|}{T}+1\right)|y_0| + \frac{|t|}{T}|y_T| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|y(s)|)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|y(s)|)\,ds + 2|y_0| + |y_T| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\|y\|_\infty)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\|y\|_\infty)\,ds + 2|y_0| + |y_T| \\
&\leq \frac{\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\,ds + \frac{\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\,ds + 2|y_0| + |y_T| \\
&\leq \frac{\psi(\eta)\,\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds + \frac{\psi(\eta)\,\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,ds + 2|y_0| + |y_T| \\
&\leq \frac{t^\alpha\,\psi(\eta)\,\|p\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{T^\alpha\,\psi(\eta)\,\|p\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} + 2|y_0| + |y_T|.
\end{aligned}$$

Prenons le supremum pour tout $t \in J$, on obtient

$$\|h\|_\infty \leq \frac{2T^\alpha\,\psi(\eta)\,\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + 2|y_0| + |y_T| = \ell.$$

Alors, pour tout $h \in N_1(B_\eta)$, il existe une constante positive ℓ telle que :

$$\|h\|_\infty \leq \ell,$$

Ce qui montre que $N_1(B_\eta)$ est uniformément borné.

Étape 3 : N_1 transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinue dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$. Soient $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$, et B_η un ensemble borné dans $\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ donné dans l'étape 2. Soient $y \in B_\eta$ et $h \in N_1(y)$, alors il existe $v \in S_{F,y}$ telle que pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|h(t_2)-h(t_1)| = \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds - \frac{t_2}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds - \left(\frac{t_2}{T}-1\right)y_0 + \frac{t_2}{T}y_T \\
& - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds + \frac{t_1}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds + \left(\frac{t_1}{T}-1\right)y_0 - \frac{t_1}{T}y_T \Bigg| \\
= \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds \\
& + \frac{(t_1-t_2)}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds + \frac{(t_1-t_2)}{T}y_0 + \frac{(t_2-t_1)}{T}y_T \Bigg| \\
= \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_2-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds \\
& + \frac{(t_1-t_2)}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds + \frac{(t_1-t_2)}{T}y_0 + \frac{(t_2-t_1)}{T}y_T \Bigg| \\
= \Bigg| & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]v(s)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds \\
& + \frac{(t_1-t_2)}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds + \frac{(t_1-t_2)}{T}y_0 + \frac{(t_2-t_1)}{T}y_T \Bigg| \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right||v(s)|\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\left|(t_2-s)^{\alpha-1}\right||v(s)|\,ds \\
& + \frac{|t_1-t_2|}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T |(T-s)^{\alpha-1}||v(s)|\,ds + \frac{|t_1-t_2|}{T}|y_0| + \frac{|t_2-t_1|}{T}|y_T|.
\end{aligned}$$

Par **(H2)**, on a pour tout $t_1, t_2 \in J$ et $t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned}
|h(t_1)-h(t_2)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}\right]p(s)\psi(|y(s)|)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|y(s)|)\,ds \\
& + \frac{(t_2-t_1)}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|y(s)|)\,ds + \frac{(t_2-t_1)}{T}|y_0| + \frac{(t_2-t_1)}{T}|y_T| \\
\leq & \frac{\|p\|_\infty\,\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}\right]\,ds + \frac{\|p\|_\infty\,\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}\,ds \\
& + \frac{\|p\|_\infty\,\psi(\eta)\,(t_2-t_1)}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,ds + \frac{(t_2-t_1)}{T}|y_0| + \frac{(t_2-t_1)}{T}|y_T|.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}|h(t_1)-h(t_2)| &\leq \frac{\|p\|_\infty\,\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(t_1-s)^\alpha-(t_2-s)^\alpha\right]_0^{t_1}+\frac{\|p\|_\infty\,\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha+1)}\left[-(t_2-s)^\alpha\right]_{t_1}^{t_2}\\ &\quad+\frac{\|p\|_\infty\,\psi(\eta)\,(t_2-t_1)}{T\Gamma(\alpha+1)}\left[(T-s)^{\alpha-1}\right]_0^T+\frac{(t_2-t_1)}{T}|y_0|+\frac{(t_2-t_1)}{T}|y_T|\\ &\leq \frac{\|p\|_\infty\,\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha+1)}\left[t_2^\alpha-t_1^\alpha-(t_2-t_1)^\alpha\right]+\frac{\|p\|_\infty\,\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha\\ &\quad+\frac{T^\alpha\,\|p\|_\infty\,\psi(\eta)}{T\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)+\frac{(t_2-t_1)}{T}|y_0|+\frac{(t_2-t_1)}{T}|y_T|\\ &\leq \frac{\|p\|_\infty\,\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(t_2^\alpha-t_1^\alpha\right)+\left[\frac{T^\alpha\,\|p\|_\infty\,\psi(\eta)}{\Gamma(\alpha+1)}+|y_0|+|y_T|\right]\frac{(t_2-t_1)}{T}.\end{aligned}$$

Quand $t_1\to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers zéro, ce qui montre $N_1(B_\eta)$ est équicontinue.

D'après les étapes de 1 à 3 et le Théorème I.1.1 d'Arzelà-Ascoli, nous pouvons conclure que $N_1:\mathcal{C}(J,\mathbb{R})\to\mathcal{P}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))$ est un opérateur complètement continue.

Étape 4 : N_1 est semi-continue supérieurement (s.c.s).

En effet, Comme N_1 est complètement continue à valeurs compacts non vides, il suffit de montrer que N_1 a son graphe fermé.

Soient $(y_n)_{n\in\mathbb{N}},(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, telle que $y_n\to y_*$, $h_n\to h_*$ quand $n\to\infty$ avec $h_n\in N_1(y_n)$. Il faut montrer que $h_*\in N_1(y_*)$.

Puisque $h_n\in N_1(y_n)$, alors il existe $v_n\in S_{F,y_n}$, telle que :

$$h_n(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}v_n(s)\,ds-\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}v_n(s)\,ds-\left(\frac{t}{T}-1\right)y_0+\frac{t}{T}y_T,\ \forall t\in J.$$

Nous devons montrer qu'il existe $v_*\in S_{F,y_*}$, telle que :

$$h_*(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}v_*(s)\,ds-\frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}v_*(s)\,ds-\left(\frac{t}{T}-1\right)y_0+\frac{t}{T}y_T,\ \forall t\in J.$$

On a $F(t,\cdot)$ est semi-continue supérieurement d'après **(H1)**, alors elle est semi-continue supérieurement en y_* au sens de ε.

Donc, pour tout $y_*\in\mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ et $\varepsilon>0$, il existe $\delta=\delta(y_*,\varepsilon)>0$ telle que pour tout $n\geq n_\delta$,

$$F(t,y_n(t))\subset F(t,y_*(t))+B_\varepsilon(0),\quad\forall t\in J,\quad\forall y_n\in B_\delta(y_*)\cap\mathcal{C}(J,\mathbb{R}).$$

D'où

$$v_n(t) \in F(t, y_n(t)) \subset F(t, y_*(t)) + \varepsilon B_1(0), \quad \forall t \in J, \quad \forall y_n \in B_\delta(y_*) \cap \mathcal{C}(J, \mathbb{R}).$$

Puisque $F(\cdot,\cdot)$ est à valeurs compactes, alors d'après le théorème I.1.2 de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous suite $v_{n_m}(\cdot)$ telle que

$$v_{n_m}(\cdot) \to v_*(\cdot) \text{ quand } m \to \infty, \quad \text{et} \quad v_* \in F(t, y_*(t)), \text{ pour chaque } t \in J.$$

D'après **(H1)**, on a l'application $t \mapsto F(t, y_n(t))$ est mesurable et $v_* \in L^1(J, \mathbb{R})$ une fonction mesurable. Alors, il existe par le lemme I.3.3, une sélection mesurable v_{n_m} de $F(\cdot, y_n(\cdot))$, telle que :

$$\begin{aligned} |v_{n_m}(t) - v_*(t)| &\leq d\left(F(t, y_n(t)), v_*(t)\right) \\ &\leq H_d(F(t, y_n(t)), F(t, y_*(t))). \end{aligned}$$

Par **(H3)**, il s'ensuit que :

$$|v_{n_m}(t) - v_*(t)| \leq l(t)|y_n(t) - y_*(t)|.$$

On observe que,

$$\begin{aligned} |h_n(t) - h_*(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v_{n_m}(s) - v_*(s)|\, ds + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v_{n_m}(s) - v_*(s)|\, ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) |y_n(t) - y_*(t)|\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) |y_n(t) - y_*(t)|\, ds. \end{aligned}$$

Donc, prenons le supremum pour tout $t \in J$, on obtient

$$\|h_n - h_*\|_\infty \leq 2I^\alpha l(T) \|y_n - y_*\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Alors, $h_* \in N_1(y_*)$. Ce qui montre que N_1 a son graphe fermé.

Étape 5 : Estimation a priori sur les solutions.
Soit y une solution possible au problème (III.1)-(III.2) telle que $y \in \lambda N_1(y)$ avec $\lambda \in (0,1)$. Alors, il existe $v \in S_{F,y}$ tel que pour tout $t \in J$,

$$y(t) = \lambda\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}v(s)\,ds - \left(\frac{t}{T}-1\right)y_0 + \frac{t}{T}y_T\right].$$

Cela implique par **(H2)** que, pour chaque $t \in J$, nous avons,

$$|y(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|v(s)|\,ds + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|v(s)|\,ds + \left(\frac{|t|}{T}+1\right)|y_0| + \frac{|t|}{T}|y_T|.$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|y(s)|)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(|y(s)|)\,ds + 2|y_0| + |y_T|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\|y\|_\infty)\,ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}p(s)\psi(\|y\|_\infty)\,ds + 2|y_0| + |y_T|$$

$$\leq \frac{\psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds + \frac{\psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,ds + 2|y_0| + |y_T|$$

$$\leq \frac{t^\alpha\psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{T^\alpha\psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} + 2|y_0| + |y_T|.$$

Donc, prenons le supremum pour tout $t \in J$, on obtient

$$\|y\|_\infty \leq \frac{2T^\alpha\psi(\|y\|_\infty)\|p\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} + 2|y_0| + |y_T|.$$

Alors par la condition (III.6), il existe une constante $M' > 0$, telle que

$$\|y\|_\infty < M'.$$

Soit

$$U = \left\{y \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R}) \ : \ \|y\|_\infty < M'\right\}.$$

L'opérateur $N_1 : \overline{U} \to \mathcal{P}(\mathcal{C}(J,\mathbb{R}))$ est semi-continue supérieurement et complètement continue. Du choix de U, il n'existe pas un $y \in \partial U$ telle que $y \in \lambda N_1(y)$ pour certains $\lambda \in (0,1)$.
Par conséquence du théorème I.4.1 du point fixe d'alternative non linéaire de Leray-Schauder, on déduit que N_1 admet un point fixe y dans $\overline{U}$ qui est solution du problème (III.1)-(III.2). ∎

III.2.2 Cas Non-Convexe

On présente maintenant un résultat pour le problème (III.1)-(III.2) avec F est une application multivoque compact et non convexe. Nous considérations sont basée sur le théorème I.4.2 du point fixe de Covitz et Nadler pour les contractions multivoques.

Théorème III.2.2 [6]
Supposons **(H3)** et l'hypothèse suivantes sont vérifiés :

(H5) $F : J \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ une application multivoque telle que : $F(\cdot, u) : J \to \mathcal{P}_{cp}(\mathbb{R})$ est mesurable pour chaque $u \in \mathbb{R}$.

Si
$$I^{\alpha} l(T) < \frac{1}{2}. \tag{III.7}$$
Alors le problème (III.1)-(III.2) admet au moins une solution sur J.

Remarque III.2.1
Pour tout $y \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$, comme F vérifié **(H5)** alors l'ensemble des sélection $S_{F,y}$ est non vide et F admet une sélection mesurable (voir le théorème I.3.1).

Preuve.
Nous montrons que N_1 satisfait aux hypothèses de théorème du point fixe de Covitz et Nadler. La preuve sera donné en deux étapes.

Étape 1 : $N_1(y) \in \mathcal{P}_{cl}(\mathcal{C}(J, \mathbb{R}))$, pour tout $y \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$.
En effet, soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in N_1(y)$, tel que $y_n \to \tilde{y}$ dans $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$. Il suffit de montrer que $\tilde{y} \in N_1(y)$.
Puisque $y_n \in N_1(y)$, alors il existe $v_n \in S_{F,y}$ telle que :
$$y_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_n(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_n(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T, \ \forall t \in J.$$
Nous devons montrer qu'il existe $v \in S_{F,y}$, telle que :
$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T, \ \forall t \in J.$$
En utilisant **(H3)** et le fait que F est à valeurs compactes, alors d'après le théorème I.1.2 de Bolzano-Weierstrass, on peut passer à une sous-suite pour obtenir que v_n converge faiblement vers v dans $L^1(J, \mathbb{R})$ (L'espace muni de la topologie faible).

Une application de théorème I.1.3 de Mazur implique que v_n converge fortement vers v et donc $v \in S_{F,y}$. Alors, pour chaque $t \in J$,

$$y_n(t) \to \widetilde{y}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

Alors, $\widetilde{y} \in N_1(y)$.

Étape 2 : N_1 est une contraction.

En effet, soit $y, \overline{y} \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ et $h_1 \in N_1(y)$. Alors, il existe $v_1(t) \in F(t, y(t))$ tel que pour tout $t \in J$,

$$h_1(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_1(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_1(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

D'après **(H3)**, il s'ensuit que

$$H_d(F(t, y(t)), F(t, \overline{y}(t))) \leq l(t)|y(t) - \overline{y}(t)|.$$

Il existe donc $w \in F(t, \overline{y}(t))$ tel que

$$|v_1(t) - w| \leq l(t)|y(t) - \overline{y}(t)|, \quad t \in J.$$

Considérons l'opérateur $W : J \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ définie par

$$W(t) = \{w \in \mathbb{R} \ : \ |v_1(t) - w| \leq l(t)|y(t) - \overline{y}(t)|\}.$$

Puisque l'opérateur multivoque $V(t) = W(t) \cap F(t, \overline{y}(t))$ est mesurable (voir proposition I.3.1), il existe une fonction $v_2(t)$ qui est une sélection mesurable pour V.

Donc, $v_2(t) \in F(t, \overline{y}(t))$,

$$|v_1(t) - v_2(t)| \leq l(t)|y(t) - \overline{y}(t)|, \quad t \in J.$$

On définit pour chaque $t \in J$,

$$h_2(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v_2(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} v_2(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T.$$

Alors pour $t \in J$,

$$|h_1(t) - h_2(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |v_1(s) - v_2(s)| \, ds + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |v_1(s) + v_2(s)| \, ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} l(s) |y(s) - \overline{y}(s)| \, ds + \frac{|t|}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} l(s) |y(s) - \overline{y}(s)| \, ds.$$

Ainsi, prenons le supremum pour tout $t \in J$, on obtient

$$\|h_1 - h_2\|_\infty \leq 2I^\alpha l(T) \|y - \overline{y}\|_\infty.$$

A partir d'une relation analogue, obtenu en inversant les rôles de y et $\overline{y}$, il s'ensuit que

$$H_d(N_1(y), N_1(\overline{y})) \leq 2I^\alpha l(T) \|y - \overline{y}\|_\infty.$$

Donc par (III.7), N_1 est une contraction.
Alors, d'après le théorème I.4.2 du point fixe de Covitz et Nadler, N_1 admet un point fixe y qui est solution du problème (III.1)-(III.2). ∎

Conclusion et perspective

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultat d'existence des solutions d'un problème aux limites d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo cas où $\alpha \in]0, 1[$.

On a présenté aussi quelques résultat d'existence des solutions d'un problème aux limites avec des conditions non locales d'inclusions différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo cas où $\alpha \in]1, 2]$.

On a étudié ces problèmes dans les deux cas ou le membre à droite est convexe ou non convexe en appliquant les notions de l'analyse multivoque, calcule fractionnaire et l'argument du point fixe.

La recherche de nouveaux outils de modélisation et le défi de la simulation persistent, ainsi la nécessité d'une inclusion différentielle augmente. Les inclusions différentielles en tant que source de nouvelles idées et des techniques sont appliqués dans diverses problèmes qui peuvent être difficiles à résoudre à l'aide des théories traditionnelles telle que les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. mais cela n'empêche pas que la résolution des inclusions différentielles soit elle même un défi, tout en prenant compte les difficultés du calcul et la complexité des algorithmes numériques correspondants.

Nous espérons, dans l'avenir appliquer les méthodes cités dans ce mémoire à d'autres équations et développer d'autres méthodes numériques de résolution des inclusions différentielles d'ordre fractionnaires, moins couteuse et plus précises que celles proposées dans ce texte.

Bibliographie

[1] AUBIN, J., AND CELLINA, A. *Differential Inclusions, Set-valued maps and viability theory, vol. 264. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1984.*

[2] AUBIN, J., AND FRANKOWSKA, H. *Set-Valued Analysis. Birkhauser, Boston, 1990.*

[3] BELARBI, A., BENCHOHRA, M., HAMANI, S., AND NTOUYAS, S. *Perturbed functional differential equations with fractional order.* Commun. Appl. Anal. 11 *(2007), 429–440.*

[4] BELARBI, A., BENCHOHRA, M., HAMANI, S., AND OUAHAB, A. *Uniqueness results for fractional functional differential equations with infinite delay in Fréchet spaces.* Appl. Anal. 85 *(2006), 1459–1470.*

[5] BENCHOHRA, M., AND HAMANI, S. *Boundary value problems for differential inclusions with fractional order.* Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization 28*, 1 (2008), 147–164.*

[6] BENCHOHRA, M., AND HAMANI, S. *Nonlinear boundary value problems for differential inclusions with caputo fractional derivative.* Topological methods in nonlinear analysis 32 *(2008), 115–130.*

[7] BENCHOHRA, M., HAMANI, S., AND NTOUYAS, S. *Boundary value problems for differential equations with fractional order.* Surveys in Mathematics & its Applications 3 *(2008), 1–12.*

[8] BENCHOHRA, M., AND NGUÉRÉKATA, G. *Topics in fractional differential equations. Springer-Verlag, New York, 2012.*

[9] CAMPBELL, R. *Les intégrales eulériennes et leurs applications : étude approfondie de la fonction gamma. Dunod, 1966.*

[10] CASTING, C., AND VALADIER, M. *Convex analysis and measurable multifunctions, vol. 580. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.*

[11] COVITZ, H., AND NADLER JR, S. B. *Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces.* Israel Journal of Mathematics 8*, 1 (1970), 5–11.*

[12] DEIMLING, K. *Multivalued differential equations. Walter De Gruyter, Berlin-New York, 1992.*

[13] DIETHELM, K., AND FREED, A. *On the solution of nonlinear fractional-order differential equations used in the modeling of viscoplasticity. 217–224.*

[14] DJEBALI, S., GÓRNIEWICZ, L., AND OUAHAB, A. *First-order periodic semilinear differential inclusions : existence and structure of solution sets.* Mathématical and computer modelling 52*, 5-6 (2010), 683–714.*

[15] DJEBLI, S., GÓRNIEWICZ, L., AND OUAHAB, A. *Solution sets for differential equations and inclusions, vol. 18. Walter de Gruyter, Berlin, 2012.*

[16] EL-SAYED, A., AND IBRAHIM, A. *Multivalued fractional differential equations.* Appl. Math. Comput. 68 *(1995), 15–25.*

[17] FONSECA, I., AND LEONI, G. *Modern methods in the calculus of variations, L^p spaces. Springer, New York, 2007.*

[18] FRIGON, M. ET GRANAS, A. *Résultats du type de Laray-Schauder pour des contractions multivoques.* Topological Methods in Nonlinear Analysis 4*, 1 (1994), 197–208.*

[19] GAUL, L., KLEIN, P., AND KEMPLE, S. *Damping description involving fractional operators.* Mechanical Systems and Signal Processing 5*, 2 (1991), 81–88.*

[20] GLÖCKLE, W., AND NONNENMACHER, T. *A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics.* Biophysical Journal 68*, 1 (1995), 46–53.*

[21] GÓRNIEWICZ, L. *Topological fixed point theory of multivalued mappings, vol. 495. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.*

[22] GRANAS, A., AND DUGUNDJI, J. *Fixed point theory. Springer-Verlag & Business Media, New York, 2003.*

[23] HILFER, R. *Fractional diffusion based on Riemann-Liouville fractional derivatives.* The Journal of Physical Chemistry B 104*, 16 (2000), 3914–3917.*

[24] HU, S., AND PAPAGEORGIOU, N. *Handbook of multivalued analysis, theory I. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.*

[25] KHAMSI, M., AND KIRK, W. *An introduction to métric spaces and fixed-point theory, vol. 53. Jhon Wiley & Sons, Canada, 2001.*

[26] KILBAS, A., AND MARZAN, S. *Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions.* Ordinary differential equations 41*, 1 (2005), 84–89.*

[27] KILBAS, A., SRIVASTAVA, H., AND TRUJILLO, J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204. Elsevier science B.V., Amsterdam, 2006.*

[28] LAKSHMIKANTHAM, V., AND DEVI, J. *Theory of fractional differential equations in a Banach space.* Eur. J. Pure Appl. Math. 1 *(2008), 38–45.*

[29] LANG, S. *Real and functional analysis, vol. 142. Springer-Verlag, New york, 1993.*

[30] MAINARDI, F. *Fractional calculus : some basic problems in countinuum and statistical mechanics.* Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, A. Carpinteri and F. Mainardi Eds., CISM courses and lectures 378*, 291–348.*

[31] MARCHAUD, A. *Sur les champs de demi-droites et les équations différentielles du premier ordre.* Bulletin de la Société mathématique de France 62 *(1934), 1–38.*

[32] MARCHAUD, A. *Sur les champs continus de demi-cônes convexes et intégrales.* Composition mathématique de France 3 *(1936), 89–127.*

[33] METZLER, R., SCHICK, W., KILIAN, H., AND NONNENMACHER, T. *Relaxation in filled polymers : A fractional calculus approach.* The Journal of Chemical Physics 103*, 16 (1995), 7180–7186.*

[34] MICHEL, W. *Analyse fonctionnelle élémentaire. Cassini, Paris, 2000.*

[35] MILLER, K., AND ROSS, B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.*

[36] MUSIELAK, J. *Introduction to functional analysis, vol. 282. PWN, Warszawa, 1976.*

[37] OLDHAM, K., AND SPANIER, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, vol. 111. Elsevier, 1974.*

[38] PODLUBNY, I. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, vol. 198. Elsevier, 1998.*

[39] RUDIN, W. *Functional analysis. McGraw-Hill, 1991.*

[40] SAMKO, S., KILBAS, S., AND MARICHEV, O. *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.*

[41] SCHWARTZ, L. *Topologie générale et analyse fonctionnelle. Hermann, 1970.*

[42] SCHWARTZ, L., AND ZIZI, K. *Calcul différentiel et équations différentielles. Hermann, 1992.*

[43] SMIRNOV, G. *Introduction to the theory of differential inclusions, vol. 41. American Mathematical Society, 2002.*

[44] WAZEWSKI, T. *Sur un problème de contrôle optimal.* Prague 60 *(1964), 692–704.*

[45] ZAREMBA, S. *Sur les équations parallèles.* Dodatek docznika PTM, Thèse doctorat 9 *(1935), 1–38.*

[46] ZAREMBA, S. *Sur les équations au calcul.* Bulletin de la Société mathématique de France 60 *(1936), 139–160.*

[47] ZEIDLER, E. *Nonlinear functional analysis and its applications I, fixed-point theorems, vol. 1. Springer-Verlag,New York, 1985.*

[48] ZHU, Q. *On the solution set of differential inclusions in Banach space.* Journal of differential equations 93*, 2 (1991), 213–237.*

Résumé

Dans ce mémoire, nous établirons des conditions suffisantes pour l'existence des solutions pour certaines classes de problèmes aux limites pour des inclusions différentielles d'ordre fractionnaire. On considère les deux cas soit le membre à droite est convexe ou non convexe. Ces résultats ont été obtenus en utilisant certains théorèmes de points fixes comme l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le théorème de points fixe de Covitz et Nadler pour les multifonctions contractives.

Mots-clés: *inclusion différentielle, dérivée fractionnaire au sens de Caputo, intégrale fractionnaire, analyse multivoque, existence de solutions, la théorie de point fixe.*

Abstract

In this thesis, we shall establish sufficient conditions for the existence of solutions for some classes of boundary value problem for fractional differential inclusions. We consider both cases where the right-hand side is convex and non-convex. These results were obtained by using some fixed point theorems such as the non-linear alternative of Leray-Schauder and the fixed point theorem of Covitz and Nadler for contractive multivalued maps.

Keywords: *differential inclusion, Caputo fractional derivative, fractional integral, Set valued analysis, existence of solutions, fixed point theory.*

ملخص

في هذه الأطروحة ، سنضع شروطا كافية لوجود حلول لبعض المسائل الحدية للاحتواء التفاضلي ذات المشتقات الكسرية. سوف نقوم بدراسة هذه المسائل في كلتا الحالتين عندما يكون الجانب الأيمن محدب أوغير محدب. تم الحصول على هذه النتائج باستخدام بعض نظريات النقطة الثابتة مثل البديل غير الخطي لليراي شودر ونظرية النقطة الثابتة لكوفيتز ونادلر للدوال متعددة القيم تقلصية.

الكلمات المفتاحية: الاحتواء التفاضلي، الاشتقاقية ذات رتبة ناطقة حسب كابيتو، التكامل ذو رتبة ناطقة، التحليل المتعدد، وجود الحلول، نظرية النقطة الثابتة.