République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique

Option : Equation Différentielle et Modélisation

Présenté par :

Melle. Nesrine Mahdjoub

Inégalité de Hardy sur les échelles de temps

Encadrant :

M. Abderrahmane Beniani

Maitre Conférence "A" à C.U.B.B.A.T.

soutenu le 22/09/2020

Devant le jury composé de :

Président :	Mme.	Aicha Messabihi (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Examinateurs :	Mme.	Fatima zohra Ladrani (M.C.A)	E.N.S.O.
Encadrant :	M.	Abderrahmane Beniani (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier ***"Allah"*** le plus puissant, de m'avoir donnée la santé pour terminer ce travail, ainsi la volonté et la patience qui m'ont aidé à continuer mon chemin, et ne pas baisser les bras.

Je remercie ***M. Abderrahmane Beniani*** d'être mon encadreur, pour son soutien morale et ses conseils inoubliables, aussi son guide durant la préparation de cet mémoire.

Mes remerciements vont également à ***Mme. Aicha Messabihi*** qui m'a fait l'honneur de vouloir accepté la présidence de ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi à ***Mme. Fatima Zohra Ladrani*** d'avoir accepté d'examiner mon modeste travail.

Je remercie du fond de mon coeur mes parents, qui m'ont soutenue, encouragée et motivée tout au long de mes études.

Enfin, je remercie mes enseignants de l'université de ***Belhadj Bouchaib.***

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

• A mes très chers parents qui ont sacrifié leur vie pour le bon déroulement de mes études.

• A mon frère Khalil et mes soeurs Fatima et Abir.

• A ma tante faiza et à toutes la famille paternelle et maternelle.

• A mes amies : Wafaa et Chahrazed.

• A tous mes enseignants.

Proverbe

"Le succès a une formule simple : fais de ton mieux !"

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'un nouveau type d'inégalité qui est **"l'inégalité de Hardy sur les échelles de temps"**.

Tout d'abord, on tient à définir les troix types d'inégalités de Hardy et leurs démonstrations, ensuite on s'intéresse à une application d'un type de cette inégalité sur un problème aux limites en se basant sur le théorème de Lax-Miligrame.

Mots clés :
Échelles de temps, Inégalité de Hardy, Inégalité de Hardy Sobolev, Inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya, Problème aux limites linéaire.

Abstract

This thesis is devoted to the study of a new type of inequality which is **"inequality of Hardy on time scales"**.

First, we define the three typicals Hardy inequalities and their proofs, then we are interested in an application of a type of this inequality on a boundary problem based on the Lax-Miligrame theorem.

Key words :
Time scales, Hardy inequality, Hardy Sobolev inequality, Hardy-Sobolev-Maz'ya inequality, Linear boundary problem.

Table des matières

Introduction générale

La théorie des échelles de temps est un sujet très intéressant qui couvre plusieurs domaines de notre vie, il a été développé en 1988 par STEFAN HILGER. Dans les dernières années le calcul sur les échelles de temps est devenu important et utilisable dans plusieurs domaines tels que l'économie, biologie et surtout en informatique.
Dans ce dernier, il existe plusieurs inégalités comme, inégalité de Hölder, Poincaré...etc.
Dans ce travail on s'intéresse à une nouvelle notion qui s'appelle **inégalité de Hardy sur les échelles de temps** ainsi leur application sur les problèmes aux limites.
Le cadre classique de l'inégalité de Hardy est énoncé pour $f > 0$, intégrable sur l'ouvert $]0, x[$ telle que f^p est intégrable sur $]0, \infty[$ avec $p > 1$ et

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f(x)^p dx, \tag{1}$$

la constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ est le meilleur choix pour cette inégalité.
Cette inégalité a été prouvée par Hardy en 1925, et c'est la version continue.
La version discrète de l'inégalité (1) est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n} a_k\right\}^p \leq \frac{1}{p-1}\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n^p.$$

Ce mémoire se décompose en trois chapitres.
Dans le premier chapitre : on va présenter quelques définitions et notions de base concernant la théorie des échelles de temps, ainsi que quelques espaces fonctionnels sur les échelles de temps.
Dans le deuxième chapitre : on va étudier les trois types d'inégalités de Hardy sur les échelles de temps.

Tout d'abord on va commencer par prouver l'inégalité de Hardy qui va nous aider dans la démonstration de la continuité de l'opérateur de Hardy H tel que $H : L^p_\Delta\left([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R}^+\right) \longrightarrow L^p_\Delta\left([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R}^+\right)$ est donné par

$$(Hf)(t) = \frac{1}{(\sigma(t)-a)}\int_a^{\sigma(t)} f(s)\Delta s, \qquad \text{pour tout } t \in [a,\infty[_\mathbb{T}.$$

Après, on va étudier l'inégalité de Hardy dans les espaces Sobolev $W^{1,p}_{\Delta,0}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

$$\int_a^b |u^\Delta(t)|^p \Delta \geq C_p \int_a^b \frac{|u^\sigma(t)|^p}{|\sigma(t)-a|^p}\Delta t, \quad \text{pour tout } u \in W^{1,p}_{\Delta,0}(\mathbb{T},\mathbb{R}).$$

Où C_p est une constante positive et $p \in]1,+\infty[$.
Dernièrement, on démontre l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya sur les échelles de temps qui s'écrit sous la forme suivante

$$\int_a^b |f^\Delta(t)|^2\Delta t \geq \frac{1}{4}\int_a^b \frac{|f(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + C_q\left(\int_a^b |f(t)|^q \Delta t\right)^{\frac{2}{q}}, \quad \text{pour tout } f \in W^{1,p}_{\Delta,0}(\mathbb{T},\mathbb{R}).$$

Avec C_q une constante positive et $p \in]2,+\infty[$.
Dans le dernier chapitre : on considère un problème aux limites qui est défini par :

$$\begin{cases} (ru^\Delta)^\Delta(t) + h(t)u(t) = -f(t), \quad t \in [a,\rho^2(b)]_\mathbb{T} \\ \qquad u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Avec f, r et h sont des fonctions définies sur $]a,b[\cap\mathbb{T}$.
Où on va étudier l'existence et l'unicité de la solution, en utilisant l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya et le Théorème de Lax-Miligrame.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion du calcul sur les échelles de temps, ainsi que des définitions et des propriétés sur la différentiabilité et l'intégration et un rappel de quelques espaces fonctionnels sur les échelles de temps.

1.1 Calcul sur les échelles de temps

Définition 1.1.1. *[11, 12] On appelle échelle de temps toute partie fermée non vide de l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$*, on la note* $\mathbb{T}$*.*

Exemple 1.1.1. $\mathbb{T}$=$\mathbb{N}$ *est une échelle de temps.*

Car :

$$\begin{aligned}
\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{N} &=]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 2[\cup \cdots \cup]n, n+1[\\
&=]-\infty, 0[\cup \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup}]n, n+1[\right),
\end{aligned}$$

c'est une union infinie d'ouverts, donc c'est un ouvert.

D'ou $\mathbb{N}$ *est fermé, alors c'est une échelle de temps.*

Définition 1.1.2. *[11, 12] Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps, on définit :*

1. *L'opérateur de saut avant* $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ *par :*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

2. *L'opérateur de saut arrière* $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ *par :*

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Définition 1.1.3. *[11, 12] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, la fonction de granulation en avant $\mu : \mathbb{T} \longrightarrow [0, +\infty[$ est définie par :*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Exemple 1.1.2. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ *une échelle de temps.*
Calculons $\sigma(t)$, $\rho(t)$, $\mu(t)$.
$\forall t \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} \\ &= \inf\,]t, +\infty[\\ &= t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sup\{s \in \mathbb{R} : s < t\} \\ &= \sup\,]-\infty, t[\\ &= t, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \sigma(t) - t \\ &= t - t \\ &= 0. \end{aligned}$$

Table 1.1 – Exemple d'échelles de temps

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t+1$	$t-1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t+h$	$t-h$
$q^{\mathbb{N}}$	$(q-1)t$	q^t	$\frac{t}{q}$
$2^{\mathbb{N}}$	t	$2t$	$\frac{t}{2}$

Convention 1.1.1. *[11, 12]*

$\sup \phi = \inf \mathbb{T}$ *(ie : $\rho(t) = t$, si $\mathbb{T}$ admet un minimum t) et* $\inf \phi = \sup \mathbb{T}$ *(ie : $\sigma(t) = t$, si $\mathbb{T}$ admet un maximum t).*

Définition 1.1.4. *[11, 12] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $t \in \mathbb{T}$*

i/ Si $t < \sigma(t)$, on dit que t est dispersé à droite.

ii/ Si $\rho(t) < t$, on dit que t est dispersé à gauche.

iii/ Les points qui sont à la fois dispersés à droite et à gauche sont dites isolés.

iv/ Si $t < \sup \mathbb{T}$ et $\sigma(t) = t$, on dit que t est dense à droite.

v/ Si $t > \inf \mathbb{T}$ et $\rho(t) = t$, on dit que t est dense à gauche.

vi/ Les points qui sont à la fois dense à droite et à gauche sont dites denses.

Exemple 1.1.3. *Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = \{2^n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$*

trouver $\sigma(t)$ et $\rho(t)$ puis classer chaque point de t.

- *Pour $t \neq 0$, on a :*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = 2^{n+1} = 2^n.2 = 2.t,$$

et

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = 2^{n-1} = \frac{2^n}{2} = \frac{t}{2}.$$

Donc nous avons $t < \sigma(t)$, par la suite t est dispersé à droite.

De plus $\rho(t) < t$ alors t est dispersé à gauche.

D'où t est un point isolé.

- *Pour $t = 0$ on a :*

$$\sigma(0) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > 0\} = 1.$$

Donc nous avons $0 < \sigma(0)$, d'où 0 est dispersé à droite.

Ainsi

$$\rho(0) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < 0\} = 0.$$

Alors 0 n'est pas dispersé à gauche.

Définition 1.1.5. *[11, 12] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on définit la fonction $f^\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$f^\sigma(t) = (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.1.6. *[11, 12] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps.*

i/ Si $\mathbb{T}$ admet un maximum M dispersé à gauche, alors on définit l'ensemble $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, sinon $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

ii/ Si $\mathbb{T}$ admet un minimum m dispersé à droite, alors on définit l'ensemble $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{m\}$, sinon $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

Exemple 1.1.4. *Soit $\mathbb{T} =]-\infty, 1[\cup \{2, 3, 4, 5\}$ une échelle de temps.*
Déterminons l'ensemble $\mathbb{T}^k$.
On a $\sup \mathbb{T} = 5$, alors

$$\rho(\sup \mathbb{T}) = \rho(5) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < 5\} = 4,$$

donc $\rho(5) < 5$.
D'où

$$\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{5\} =]-\infty, 1[\cup \{2, 3, 4\}.$$

1.2 Différentiabilité sur les échelles de temps

Définition 1.2.1. *[11, 12] Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$, on dira que f est Δ_différentiable en t, s'il existe un nombre $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de t où :*

$$|f^{\sigma}(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \quad \textit{pour tout } s \in V.$$

On appelle $f^{\Delta}(t)$ la Δ_dérivée de f en t, si f est Δ_différentiable en t pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée la Δ_dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Exemple 1.2.1. *Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :*
$f(t) = 4t^2$.
Montrons que $f^{\Delta}(t) = 4\sigma(t) + 4t$.

Soit $s \in V_t =]t-\delta, t+\delta[\cap \mathbb{T}$ *et* $t \in \mathbb{T}^k$,

$$\begin{aligned}|f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t)-s)| &= |4\sigma(t)^2 - 4s^2 - 4(\sigma(t)+t)(\sigma(t)-s)| \\ &= |4(\sigma(t)-s)(\sigma(t)+s) - 4(\sigma(t)+t)(\sigma(t)-s)| \\ &= |4(\sigma(t)-s)(s-t)|.\end{aligned}$$

On a $\quad |s-t| < \delta,$

si on prend $4\delta = \varepsilon$ *on aura* $\quad 4|s-t| < \varepsilon.$

Donc

$$\begin{aligned}|f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t)-s)| &\leq 4\delta(\sigma(t)-s) \\ &\leq \varepsilon|\sigma(t)-s|.\end{aligned}$$

Théorème 1.2.1. *[11, 12] Soit* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction et* $t \in \mathbb{T}^k$.

i/ Si f *est* Δ*_différentiable en* t*, alors* f *est continue en* t.

ii/ Si f *est continue en* t *et* t *est dispersé à droite, alors* f *est* Δ*_différentiable en* t *et*

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}. \tag{1.1}$$

iii/ Si t *est dense à droite, alors* f *est* Δ*_différentiable en* t *si et seulement si*

$$\lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s},$$

existe et finie.

Dans ce cas

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}. \tag{1.2}$$

iv/ Si f *est* Δ*_différentiable en* t*, alors*

$$f^\sigma(t) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t).$$

Exemple 1.2.2.

1. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$*, alors on a* $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}$*,*

   et pour $t \in \mathbb{T}^k$*, le point* t *est dense à droite.*

D'où

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t).$$

2. *Si* $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, *on a* $\mathbb{T}^k = \mathbb{Z}$,

   et pour $t \in \mathbb{T}^k$, *le point* t *est isolé. On a*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t),$$

   où Δ *est l'opérateur de différence avant défini par la dernière équation ci_dessus.*

Théorème 1.2.2. *[11, 12] Si* $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont* Δ*_différentiables en* $t \in \mathbb{T}^k$, *alors*

i/ $f + g$ *est* Δ*_différentiable en* t *et*

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

ii/ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, αf *est* Δ*_différentiable en* t *et*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

iii/ $f.g$ *est* Δ*_différentiable en* t *et*

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t). \tag{1.3}$$

iv/ Si $g(t)g^{\sigma}(t) \neq 0$, *alors* $\frac{f}{g}$ *est* Δ*_différentiable en* t

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g^{\sigma}(t)g(t)}. \tag{1.4}$$

Exemple 1.2.3. *Soit* $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie par* $f(t) = t^2$ *pour tout* $t \in \mathbb{T}$.

Calculons $f^{\Delta}(t)$.

Tout d'abord posons une autre fonction g *définie par :* $g(t) = t$.

Alors on a

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) = (gg)^{\Delta}(t) &= g^{\Delta}(t)g(t) + g(\sigma(t))g^{\Delta}(t) \\ &= 1.t + \sigma(t).1 \\ &= t + \sigma(t). \end{aligned}$$

Définition 1.2.2. *[11, 12] Une fonction $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite rd_continue, si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et si sa limite à gauche est finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*
On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ rd_continue sur $\mathbb{T}$ par :

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}),$$

et l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ Δ_ différentiables et ses dérivées rd_continues sur $\mathbb{T}^k$ par :

$$C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Définition 1.2.3. *[11, 12] $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite régulière, si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$, et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Théorème 1.2.3. *[11, 12] Soient $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, alors :*

i/ Si f est continue, alors f est rd_continue.

ii/ Si f est rd_continue, alors f est régulière.

iii/ L'opérateur de saut avant σ est rd_continue.

iv/ Si f est régulière, alors f^{σ} est régulière.

v/ Si f est rd_continue et g continue, alors $g \circ f$ est rd_continue.

vi/ Si f est régulière et g continue, alors $g \circ f$ est régulière.

Notation 1.2.1. *[11, 12] On note par :*
$\sigma^n(t) = \sigma(\sigma^{n-1}(t))$, $\rho^n(t) = \rho(\rho^{n-1}(t))$, *et* $\mathbb{T}^{k^n} = (\mathbb{T}^{k^{n-1}})^k$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
Par convention, on supposera que : $\sigma^0(t) = \rho^0(t) = t$ et $\mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}$.

Définition 1.2.4. *[11, 12] Une fonction $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite deux fois dérivable sur $\mathbb{T}^{k^2}$, si sa dérivée f^{Δ} est différentiable sur $\mathbb{T}^{k^2}$, et on note la dérivée second de f par :*

$$\begin{aligned} f^{\Delta^2} : \mathbb{T}^{k^2} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow f^{\Delta^2}(t) = (f^{\Delta})^{\Delta}(t). \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la dérivée d'ordre n de f sur $\mathbb{T}^{k^n}$ par :

$$f^{\Delta^n} = (f^{\Delta^{n-1}})^{\Delta}.$$

On notera l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont n fois différentiables et f^{Δ^n} rd_continues sur $\mathbb{T}^{k^n}$ par :

$$C^n_{rd} = C^n_{rd}(\mathbb{T}) = C^n_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Exemple 1.2.4. *Soit l'échelle de temps $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, avec $h > 0$ et $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Δ_différentiable.*
Calculons f^{Δ} et f^{Δ^2}.
On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &= \{nh : n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\cdots, -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \cdots\}. \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= inf\{s \in \mathbb{T} \quad s > t\} \\ &= (n+1)h \\ &= nh + h \\ &= t + h. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) &= \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f(t+h) - f(s)}{t+h-s} \\ &= \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^{\Delta^2}(t) = (f^{\Delta})^{\Delta}(t) &= \lim_{s \longrightarrow t} \frac{f^{\Delta}(t+h) - f^{\Delta}(s)}{t+h-s} \\ &= \lim_{s \longrightarrow t} \frac{\frac{f(t+2h) - f(t+h) - f(s+h) + f(s)}{h}}{t+h-s} \\ &= \frac{f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)}{h^2}. \end{aligned}$$

Théorème 1.2.4. *[11, 12] Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Δ_différentiable, alors $f \circ g$ est Δ_différentiable et on a :*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh \right\} g^{\Delta}(t).$$

Exemple 1.2.5. *On définit les fonctions $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*
$g(t) = t^2$ *et* $f(x) = \exp(x)$.
On a :

$$g^{\Delta}(t) = (t+1)^2 - t^2 = 2t + 1 \text{ et } f'(x) = \exp(x).$$

Déterminons $(f \circ g)^{\Delta}$.

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{\Delta}(t) &= \left\{ \int_0^1 f'(g(t) + h\mu(t)g^{\Delta}(t))dh \right\} g^{\Delta}(t) \\ &= (2t+1) \int_0^1 \exp(t^2 + h(2t+1))dh \\ &= (2t+1)\exp(t^2) \int_0^1 \exp(h(2t+1))dh \\ &= \exp(t^2) \left[\exp(h(2t+1))\right]_0^1 \\ &= \exp(t^2)(\exp(2t+1) - 1). \end{aligned}$$

D'autre part, il est facile de vérifier que nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta f(g(t)) &= f(g(t+1)) - f(g(t)) \\ &= \exp((t+1)^2) - \exp(t^2) \\ &= \exp(t^2 + 2t + 1) - \exp(t^2) \\ &= \exp(t^2)(\exp(2t+1) - 1).\end{aligned}$$

1.3 Intégration sur les échelles de temps

Définition 1.3.1. *[11, 12] Une fonction continue $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est pré-différentiable sur un domaine de différentiabilité D, tel que $D \subset \mathbb{T}^k$, avec $\mathbb{T}^k \backslash D$ est un ensemble dénombrable et ne contenant pas de points dispersés à droite de $\mathbb{T}$ et f est $\Delta_$différentiable pour tout $t \in D$.*

Le théorème suivant garantit l'existence de pré-antidérivée.

Théorème 1.3.1. *[11, 12](l'existence de pré-antidérivée). Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière, alors il existe une fonction F pré-différentiable avec un domaine de différentiabilité D telle que*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \quad \textit{pour tout} \quad t \in D.$$

Définition 1.3.2. *[11, 12] Soit $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière. Alors toute fonction F donnée par le théorème 1.3.1 s'appelle pré-antidérivée de f.*
Nous définissons :

1. *L'intégrale indéfinie d'une fonction régulière f par :*

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C,$$

   où C est une constante.

2. *L'intégrale de Cauchy d'une fonction régulière f par :*

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r), \quad \textit{pour tout } r, s \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.3.3. *[11, 12] Une fonction $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée antidérivée de $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ si*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^{k}.$$

Théorème 1.3.2. *[11, 12] Chaque fonction rd_continue a une antidérivée, en particulier si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors F est une antidérivée de f telle que :*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\Delta s, \quad \textit{avec } t \in \mathbb{T}.$$

Le théorème suivant fournit plusieurs propriétés élémentaires de la delta integrale.

Théorème 1.3.3. *[11, 12] Soient $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors*

1. $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$
2. $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t))\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t.$
4. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$
5. $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$
6. *Si $|f(t)| \leq |g(t)|$ sur $[a, b[$, alors*

$$\left| \int_a^b f(t)\Delta t \right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t.$$

7. *Si $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in [a, b] \cap \mathbb{T}$, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$

Théorème 1.3.4. *[11, 12] Soient $a, b \in \mathbb{T}$ et $f, g \in C_{rd}^{1}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors*

1. $\displaystyle\int_a^b f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t.$
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t.$

Définition 1.3.4. *[11, 12] Supposons que $\sup \mathbb{T} = \infty$, alors l'intégrale impropre de f est définie par :*

$$\int_a^{\infty} f(t)\Delta t = \lim_{b \longrightarrow \infty} \int_a^b f(t)\Delta t.$$

Théorème 1.3.5. *[11, 12] Soient $a, b \in \mathbb{T}$ et $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.*

i/ Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt,$$

où l'intégrale à droite est l'intégrale usuelle de Riemann.

ii/ Si $[a, b] \cap \mathbb{T}$ ne contient que les points isolés, alors

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t \in [a,b[} \mu(t) f(t).$$

iii/ Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $b > a$, et $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t=a}^{t=b-1} f(t).$$

iv/ Soient $a, b \in h\mathbb{Z}$ tel que $b > a$, et $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{k=\frac{b}{h}-1} h f(kh).$$

Exemple 1.3.1. *Soit $a \in \mathbb{T}$, où $\mathbb{T}$ une échelle de temps et $f(t) = 1$ une fonction.*
On suppose que $a < t$, alors
pour $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\int_a^t f(s)\Delta s &= \int_a^t f(s)ds \\ &= [s]_a^t \\ &= t - a.\end{aligned}$$

Exemple 1.3.2. *Evaluons l'intégrale suivant :*

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\Delta t,$$

pour l'échelle de temps $\mathbb{T} = q^{\mathbb{N}_0}$, où $q > 1$.
Tout d'abord calculons $\mu(t)$.
On a :

$$\mathbb{T} = \left\{q^k,\ k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \inf\{s \in \mathbb{T},\ s > t\}\\ &= q^{k+1}\\ &= t.q.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \sigma(t) - t\\ &= t(q-1).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\Delta t &= \lim_{b\longrightarrow\infty}\int_1^b \frac{1}{t^2}\Delta t\\ &= \lim_{b\longrightarrow\infty}\sum_{t\in[1,b[}\frac{\mu(t)}{t^2}\\ &= \lim_{b\longrightarrow\infty}\sum_{t\in[1,b[}\frac{t(q-1)}{t^2}\\ &= \lim_{b\longrightarrow\infty}(q-1)\sum_{t\in[1,b[}t^{-1}\\ &= (q-1)\lim_{n\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{k=n-1}q^{-k}\\ &= (q-1)\lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\frac{1-q^{1-n}}{1-\frac{1}{q}}\right]\\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty}q\left(1-\frac{1}{q^{n-2}}\right)\\ &= q.\end{aligned}$$

1.4 les ensembles mesurables sur les échelles de temps

Lemme 1.4.1. *[3] L'ensemble de tous les points dispersés à droite de $\mathbb{T}$ est dénombrable, c'est-à-dire, il existe $I \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{T}$ tels que :*

$$R := \{t \in \mathbb{T} : \sigma(t) > t\} = \{t_i\}_{i\in I}.$$

Théorème 1.4.1. *[3] Pour tout $t \in \mathbb{T}$ tel que $t < \max \mathbb{T}$. Alors l'ensemble $\{t\}$ est Δ_mesurable et donné par :*

$$\mu_\Delta(t) = \sigma(t) - t.$$

Théorème 1.4.2. *[3] Soit $A \subset \mathbb{T}$, A est Δ_mesurable si et seulement si A est mesurable pour la mesure de Lebesgue.*
Dans ce cas, si $b \notin A$, nous avons la propriété suivante :

$$\mu_\Delta(A) = \sum_{i \in I_E} (\sigma(t_i) - t_i) + \mu(A).$$

1.5 Quelques espaces fonctionnels sur les échelles de temps

1.5.1 Espace des fonctions continues sur les échelles de temps

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps et soient $a, b \in \mathbb{T}$ tel que $a < b$, on définit l'intervalle $[a,b]_\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}$ par :

$$[a,b]_\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\},$$

par conséquent

$$[a,b]_\mathbb{T}^k = [a, \rho(b)]_\mathbb{T}.$$

L'ensemble des fonctions $f : [a,b]_\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont rd_continues (respectivement continues) sur $[a,b]_\mathbb{T}$ est noté par $C_{rd}([a,b]_\mathbb{T})$(respectivement $C([a,b]_\mathbb{T})$).

Remarque 1.5.1. *[2] Les espaces $C_{rd}([a,b]_\mathbb{T})$ et $C([a,b]_\mathbb{T})$ sont des espaces de Banach avec la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]_\mathbb{T}} |f(t)|.$$

Par la suite, on notera $C_{rd}^k([a,b]_\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions n fois Δ_différentiables sur $[a,b]_\mathbb{T}^{k^n}$ tel que f^{Δ^n} est rd_ continue sur $[a,b]_\mathbb{T}^{k^n}$. Cet espace est muni de la norme

$$\|f\|_{[a,b]_\mathbb{T}^{k^n}} = \max\{\|f\|_\infty, \|f^\Delta\|_\infty, ..., \|f^{\Delta^n}\|_\infty\}.$$

Proposition 1.5.1. *[2] L'espace $C^k_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}})$ est un espace de Banach.*

On désigne par $C_c([a,b]_{\mathbb{T}})$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$ à support compact, c'est-à-dire :

$$C_c([\mathbb{T},\mathbb{R}]_{\mathbb{T}}) := \{f \in C_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}}) : f(t) = 0, \quad \textit{pour tout} \quad t \in [a,b]_{\mathbb{T}} \backslash K \quad \textit{où} \quad K \quad \textit{est un compact}\}.$$

Remarque 1.5.2. *[2] L'espace $C_c([a,b]_{\mathbb{T}})$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_\infty$.*

1.5.2 Les espaces de lebesgue $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$

Définition 1.5.1. *[2] Soient $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et $E \subseteq \mathbb{T}$ un ensemble Δ_mesurable, on pose :*

$$L^p_\Delta(E,\mathbb{R}) := \{f : E \longrightarrow \mathbb{R},\ f \ \textit{est}\ \Delta\_\textit{mesurable et} \int_E |f|^p \Delta t < \infty\}.$$

On définit la norme sur $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ par :

$$\|f\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} := \left(\int_E |f|^p \Delta t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.5.1. *[2](Inégalité de Minkowski). Soient $1 \leq p \leq \infty$ et f, g des fonctions de $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors on a :*

$$\|f+g\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} + \|g\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

Théorème 1.5.2. *[2] (Inégalité de Hölder). Soient $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et $g \in L^q_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ tel que q est le conjugué de p, alors $f.g \in L^1_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et on a :*

$$\|f.g\|_{L^1_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})} \|g\|_{L^q_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}.$$

Théorème 1.5.3. *[2] Soit $p \in [1,+\infty[$, $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_{L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}$.*

Corollaire 1.5.1. *[2] $L^2_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :*

$$(\varphi,\psi)=\int_{[a,b]\cap\mathbb{T}}\varphi(t)\psi(t)\Delta t.$$

Théorème 1.5.4. *[2] $L^\infty_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme suivante :*

$$\|f\|_{L^\infty_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})}=\inf\{C:|f(t)|^p\leq C\ \Delta pp\ sur\ \mathbb{T}\}.$$

Lemme 1.5.1. *[2] Soit t un point dense à droite, alors :*

$$\lim_{s\longrightarrow t}\sigma(s)-t=0.$$

Théorème 1.5.5. *[2] Soit $p\in[1,+\infty[$, alors l'espace $C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$.*

Corollaire 1.5.2. *[2] Soit $p\in[1,+\infty[$, alors*

1. *L'espace $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^1_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$.*
2. *L'espace $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$.*
3. *L'espace $C_c(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$.*

Proposition 1.5.2. *[2] $C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$.*

Corollaire 1.5.3. *[2] Soit $p\in[1,+\infty[$, alors $C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$.*

1.5.3 Espace de Sobolev $W^{1,p}_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps compacte, on note $\mathbb{T}_0:=\mathbb{T}\backslash\{\max\mathbb{T}\}$.

Définition 1.5.2. *[15] On dira qu'une fonction $u:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$ appartient à l'ensemble $W^{1,p}_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$, si est seulement si $u\in L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et il existe une fonction $g:\mathbb{T}^k\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $g\in L^p_\Delta(\mathbb{T},\mathbb{R})$ et*

$$\int_{\mathbb{T}_0}u(s)\phi^\Delta(s)\Delta s=-\int_{\mathbb{T}_0}g(s)\phi^\sigma(s)\Delta s,\quad pour\ tout\ \phi\in C^1_{0,rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}),\tag{1.5}$$

où

$$C^1_{0,rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})=\{f:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}:f\in C^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}),f(a)=f(b)=0\}.$$

Théorème 1.5.6. *[15] L'ensemble $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach avec la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})} = \|u\|_{L^{p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})} + \|u^{\Delta}\|_{L^{p}_{\Delta}(\mathbb{T}^k,\mathbb{R})}.$$

D'ailleurs, l'ensemble $H^1_{\Delta}(\mathbb{T}) := W^{1,2}_{\Delta}(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$(\varphi,\psi)_{H^1_{\Delta}(\mathbb{T})} = (\varphi,\psi)_{L^2_{\Delta}(\mathbb{T})} + (\varphi^{\Delta},\psi^{\Delta})_{L^2_{\Delta}(\mathbb{T}^k)}, \quad \textit{pour tout } \ (\varphi,\psi) \in H^1_{\Delta}(\mathbb{T}) \times H^1_{\Delta}(\mathbb{T}).$$

Proposition 1.5.3. *[15] Soit $p \in [1,\infty[$, alors il existe une constante $K > 0$ dépendante seulement de $b-a$, tel que :*

$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{T})} \leq K\|\varphi\|_{W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T})}, \quad \textit{pour tout } \varphi \in W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T}),$$

et par conséquent, l'injection $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T}) \hookrightarrow C(\mathbb{T})$ est continue.

Proposition 1.5.4. *[15] Soit $p \in [1,\infty[$, alors pour chaque $q \in [1,\infty[$, l'injection $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^q_{\Delta}(\mathbb{T})$ est compacte.*

Corollaire 1.5.4. *[15] Soit $1 \leq p \leq \infty$, on a les propriétés suivantes :*

i/ L'espace $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $C(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

ii/ L'espace $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

iii/ L'espace $W^{1,p}_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_{\Delta}(\mathbb{T},\mathbb{R})$.

Chapitre 2

Inégalités de Hardy sur les échelles de temps

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux inégalités de Hardy sur les échelles de temps. Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section nous allons généraliser l'inégalité de Hardy sur les échelles de temps non bornées. Dans la deuxième section, on étudie un autre type d'inégalité de Hardy dans les espaces de Sobolev $W^{1,p}_{\Delta,0}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, et dans la dernière section nous généralisons l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya.

2.1 Inégalité de Hardy

Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps tel que $a \in \mathbb{T}$ et $\sup \mathbb{T} = \infty$.

Définition 2.1.1. *[2] Soit $f \in L^p_\Delta\left([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R}^+\right)$, tel que $1 < p < \infty$, l'opérateur de Hardy H est défini par :*

$$(Hf)(t) := \frac{1}{(\sigma(t)-a)}\int_a^{\sigma(t)} f(s)\Delta s, \quad \textit{pour tout } t \in [a,\infty[_\mathbb{T}.$$

Le Théorème suivant prouve que l'opérateur de Hardy $H : L^p_\Delta\left([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R}^+\right) \longrightarrow L^p_\Delta\left([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R}^+\right)$ est continu.

Théorème 2.1.1. *[2] Soit $1 < p < \infty$. Si $f \in L^p_\Delta\left([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R}^+\right)$, alors $Hf \in L^p_\Delta\left([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R}^+\right)$. De plus nous avons l'inégalité suivante :*

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{(\sigma(t)-a)}\int_a^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau\right)^p \Delta t \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^\infty f(\tau)^p \Delta\tau,$$

où

$$\|Hf\|_{L^p_\Delta([a,\infty[)_\mathbb{T},\mathbb{R}^+)} \leq C_p \|f\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R}^+)}. \tag{2.1}$$

Avec $C_p \leq \frac{p}{p-1}$.

Démonstration. Soit $1 < p < \infty$.
Montrons que l'inégalité (2.1) est vérifiée pour toute fonction $f \in C^1_{rd}\left([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R}^+\right)$.
On pose

$$F^\sigma(t) = (Hf)(t), \quad \text{pour tout } t \in [a,\infty[_\mathbb{T}.$$

Puisque F est Δ_differentiable, alors on a

$$\mu(t)F^\Delta(t) = F^\sigma(t) - F(t), \quad \text{pour tout } t \in [a,\infty[_\mathbb{T}.$$

D'où d'après le Théorème 1.2.4, on obtient

$$\begin{aligned}(F^p)^\Delta(t) &= pF^\Delta(t)\int_0^1 \left(h(F(t)-F^\sigma(t)) + F^\sigma(t)\right)^{p-1} dh \\ &\leq pF^\Delta(t)(F^\sigma(t))^{p-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

En utilisant (1.3) et (2.2), on aura

$$\begin{aligned}(F^\sigma)^p - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}f &= (F^\sigma)^p - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}((t-a)F)^\Delta \\ &= (F^\sigma)^p - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}[F^\sigma + (t-a)F^\Delta] \\ &= (F^\sigma)^p - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}F^\sigma - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}(t-a)F^\Delta \\ &= (F^\sigma)^p - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^p - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}(t-a)F^\Delta \\ &= (F^\sigma)^p\left[\frac{-1}{p-1}\right] - \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}(t-a)F^\Delta \\ &\leq \frac{-1}{p-1}(F^\sigma)^p - \frac{1}{p-1}(F^p)^\Delta(t-a) \\ &= \frac{-1}{p-1}(F^p(t-a))^\Delta. \end{aligned}$$

En intégrant entre a et t, on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_a^t (F^\sigma)^p(s)\Delta s - \int_a^t \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}(s)f(s)\Delta s &\leq \frac{-1}{p-1}\int_a^t \left(F^p(s)(s-a)\right)^\Delta \Delta s \\
&\leq \frac{-1}{p-1}F^p(t)(t-a) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, d'après l'inégalité de Hölder (1.5.2), on trouve que

$$\begin{aligned}
\int_a^t (F^\sigma)^p(s)\Delta s &\leq \int_a^t \frac{p}{p-1}(F^\sigma)^{p-1}(s)f(s)\Delta s \\
&\leq \frac{p}{p-1}\left(\int_a^t f^p(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^t (F^\sigma)^p(s)\Delta s\right)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^t (F^\sigma)^p(s)\Delta s\right)\left(\int_a^t (F^\sigma)^p(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{p}-1} &\leq \frac{p}{p-1}\left(\int_a^t f^p(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{p}} \\
\left(\int_a^t (F^\sigma)^p(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \frac{p}{p-1}\left(\int_a^t f^p(s)\Delta s\right)^{\frac{1}{p}} \\
\int_a^t (F^\sigma)^p(s)\Delta s &\leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^t f^p(s)\Delta s.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|F^\sigma\|^p_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \|f\|^p_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})}. \tag{2.3}$$

Soit $f \in L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})$, puisque on a l'espace $C^1_{rd}([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors $\forall f \in L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R}), \exists\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1_{rd}([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})$.

On pose $F^\sigma_n = Hf_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors d'après (2.3) et pour tous $n, m \geq 1$ on a :

$$\|F^\sigma_{n+m} - F^\sigma_n\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})} \leq \frac{p}{p-1}\|f_{n+m} - f_n\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})},$$

donc $(F^\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})$, d'où la suite $(F^\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})$ vers une fonction notée $Hf \in L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})$(ie $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} F^\sigma_n = Hf$), car $L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}\|Hf\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})} &= \|Hf + F_n^\sigma - F_n^\sigma\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})}\\ &\leq \|Hf - F_n^\sigma\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})} + \|F_n^\sigma\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Par passage de la limite on a :

$$\begin{aligned}\|Hf\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})} &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\|Hf - F_n^\sigma\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})} + \lim_{n\longrightarrow\infty}\|F_n^\sigma\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})}\\ &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\|F_n^\sigma\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})}\\ &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{p}{p-1}\|f_n\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})}\\ &\leq \frac{p}{p-1}\lim_{n\longrightarrow\infty}\|f_n\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})}\\ &\leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Maintenant, montrons que F_n^σ converge vers Hf.

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}|F_n^\sigma(t) - F^\sigma(t)| &= \left|\frac{1}{(\sigma(t)-a)}\int_a^{\sigma(t)} f_n(s)\Delta s - \frac{1}{(\sigma(t)-a)}\int_a^{\sigma(t)} f(s)\Delta s\right|\\ &= \left|\frac{1}{(\sigma(t)-a)}\int_a^{\sigma(t)} f_n(s) - f(s)\Delta s\right|\\ &\leq \frac{1}{(\sigma(t)-a)}\int_a^{\sigma(t)}|f_n(s)-f(s)|\Delta s\\ &\leq \frac{1}{(\sigma(t)-a)}\left(\int_a^{\sigma(t)}|1|^{\frac{p}{p-1}}\Delta s\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_a^{\sigma(t)}|f_n(s)-f(s)|^p\Delta s\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \frac{1}{(\sigma(t)-a)}(\sigma(t)-a)^{\frac{p-1}{p}}\|f_n - f\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})}\\ &\leq (\sigma(t)-a)^{\frac{-1}{p}}\|f_n - f\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p_\Delta([a,\infty[_\mathbb{T},\mathbb{R})$, alors $(F_n^\sigma)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers F^σ sur [a, $\infty[_\mathbb{T}$.

Puisque la limite est unique, alors :

$$Hf = F^\sigma, \qquad \Delta - p.p.$$

Donc

$$\|F^{\sigma}\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_{\mathbb{T}},\mathbb{R})} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p_\Delta([a,\infty[_{\mathbb{T}},\mathbb{R})}, \quad \text{pour } f \in L^p_\Delta([a,\infty[_{\mathbb{T}},\mathbb{R}).$$

D'où (2.1) est vérifiée. □

2.2 Inégalité de Hardy-Sobolev

Remarque 2.2.1. *[2] Soient $1 < p < \infty$ et ψ une fonction définie sur $[0,1[$ par :*

$$\psi(x) = (1-x)^{1-p} - (p-1)x - 1.$$

Par la croissance de la fonction ψ sur $[0,1[$, on déduit que

$$\psi(x) \geq 0, \quad \text{pour tout } x \in [0,1[. \tag{2.4}$$

Lemme 2.2.1. *[2] Soit $1 < p < \infty$ et soit ξ une fonction définie sur l'échelle de temps $[a,b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$\xi(t) = \frac{1}{p-1}(t-a)^{1-p}.$$

Alors la fonction ξ est Δ_differentiable et vérifie

$$\xi^{\Delta}(t) \leq -(\sigma(t)-a)^{-p}, \qquad \text{pour tout } t \in]a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}. \tag{2.5}$$

Démonstration.

Soit $t \in]a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}$, si t est dispersé à droite, alors ξ est Δ_différentiable en t d'après (1.1), et on a :

$$\begin{aligned}
\xi^{\Delta}(t) &= \frac{\xi(\sigma(t)) - \xi(t)}{\mu(t)} \\
&= \frac{1}{p-1}\left[\frac{(\sigma(t)-a)^{1-p} - (t-a)^{1-p}}{\mu(t)}\right] \\
&= \frac{(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}\left[\frac{(\sigma(t)-a) - (t-a)^{1-p}(\sigma(t)-a)^{p}}{\mu(t)}\right] \\
&= -\frac{(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}\left[\frac{(\sigma(t)-a)^{p}(t-a)^{1-p} - (\sigma(t)-a)}{\mu(t)}\right] \\
&= -\frac{(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}\left[\frac{\frac{(\sigma(t)-a)(\sigma(t)-a)^{p}}{(\sigma(t)-a)}(t-a)^{1-p} - (\sigma(t)-a)}{\mu(t)}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi^{\Delta}(t) &= -\frac{(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}\left[\frac{\frac{(\sigma(t)-a)(t-a)^{1-p}}{(\sigma(t)-a)(\sigma(t)-a)^{-p}} - (\sigma(t)-a)}{\mu(t)}\right] \\
&= -\frac{(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}\left[\frac{(\sigma(t)-a)\left(\frac{t-a}{\sigma(t)-a}\right)^{1-p} - (\sigma(t)-a)}{\mu(t)}\right] \\
&= -\frac{(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}\left[\frac{(\sigma(t)-a)\left(\frac{t-a-\sigma(t)+\sigma(t)}{\sigma(t)-a}\right)^{1-p} - (\sigma(t)-a)}{\mu(t)}\right] \\
&= -\frac{(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}\left[\frac{(\sigma(t)-a)\left(\frac{\sigma(t)-a-\mu(t)}{\sigma(t)-a}\right)^{1-p} - (\sigma(t)-a)}{\mu(t)}\right] \\
&= -\frac{(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}\left[\frac{\left(1-\frac{\mu(t)}{\sigma(t)-a}\right)^{1-p} - 1}{\frac{\mu(t)}{(\sigma(t)-a)}}\right] \\
&= -\frac{(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}\frac{(1-x(t))^{1-p}-1}{x(t)},
\end{aligned}$$

avec $x(t) = \frac{\mu(t)}{\sigma(t)-a}$.

Par l'inégalité (2.4), nous avons

$$\begin{aligned}
(1-x(t))^{1-p} - (p-1)x(t) - 1 &\geq 0 \\
(1-x(t))^{1-p} - 1 &\geq (p-1)x(t) \\
\frac{(1-x(t))^{1-p}-1}{x(t)} &\geq p-1 \\
\frac{-(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}\frac{(1-x(t))^{1-p}-1}{x(t)} &\leq \frac{-(\sigma(t)-a)^{-p}}{p-1}(p-1).
\end{aligned}$$

Donc

$$\xi^{\Delta}(t) \leq -(\sigma(t)-a)^{-p}.$$

Si t est un point dense, d'après (1.2) on a

$$\begin{aligned}
\xi^{\Delta}(t) &= \lim_{s\longrightarrow t}\frac{\xi(t)-\xi(s)}{t-s} \\
&= \frac{1}{p-1}\lim_{s\longrightarrow t}\frac{(t-a)^{1-p}-(s-a)^{1-p}}{t-s} \\
&= \frac{1}{p-1}\lim_{s\longrightarrow t}\frac{(t-s)\left[(t-a)^{-p}+(t-a)^{-1-p}(s-a)+(t-a)^{-2-p}(s-a)^2+\ldots..+(s-a)^{-p}\right]}{t-s} \\
&= \frac{1}{p-1}\left[(t-a)^{-p}+(t-a)^{-p}+(t-a)^{-p}+\ldots..+(t-a)^{-p}\right] \\
&= \frac{1}{p-1}(1-p)(t-a)^{-p} \\
&= -(\sigma(t)-a)^{-p}.
\end{aligned}$$

D'où (2.5) est vérifiée. □

Théorème 2.2.1. *[2] Soit $1 < p < \infty$, alors il existe une constante $C_p > 0$ qui dépend seulement de p, tel que l'inégalité suivante :*

$$\int_a^b |f^\Delta(t)|^p \Delta(t) \geq C_p \int_a^b \frac{|f^\sigma(t)|^p}{|\sigma(t) - a|^p} \Delta t, \tag{2.6}$$

est vérifiée pour tout $f \in W_{0,\Delta}^{1,p}([a,b]_{\mathbb{T}})$.

Démonstration.

Soit $f \in W_{0,\Delta}^{1,p}([a,b]_{\mathbb{T}})$.

En utilisant (1.5), on aura

$$\int_a^b \xi(t) \left(|f|^p\right)^\Delta (t) \Delta t = - \int_a^b \xi^\Delta(t) |f^\sigma(t)|^p \Delta t. \tag{2.7}$$

D'autre part, on a $\phi_p(x) = |x|^p$ est dérivable pour $x \in \mathbb{R}$, de plus

$$|\phi_p'(x)| \leq p|x|^{p-1}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En appliquant le Théorème 1.2.4, nous avons

$$\begin{aligned}
\left|(\phi_p \circ f)^\Delta(t)\right| &= \left| f^\Delta(t) \int_0^1 \phi_p'\left(f(t) + h\mu(t) f^\Delta(t)\right) dh \right| \\
&= \left| f^\Delta(t) \int_0^1 \phi_p'\left(f(t) + h\mu(t) \left[\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}\right]\right) dh \right| \\
&= \left| f^\Delta(t) \int_0^1 \phi_p'\left(f(t) + hf^\sigma(t) - hf(t)\right) dh \right| \\
&= \left| f^\Delta(t) \int_0^1 \phi_p'\left(hf^\sigma(t) + (1-h)f(t)\right) dh \right| \\
&\leq |f^\Delta(t)| \int_0^1 p\left|hf^\sigma(t) + (1-h)f(t)\right|^{p-1} dh \\
&\leq p|f^\Delta(t)||g(t)|^{p-1}, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

avec

$$g(t) = \max\left(|f(t)|, |f^\sigma(t)|\right), \qquad \text{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

D'après (2.8) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b \xi(t)|f^p|^{\Delta}(t)\Delta t\right| &\le \int_a^b \xi^{\sigma}(t)\left||f^p|^{\Delta}(t)\right|\Delta t\\
&\le \int_a^b \xi^{\sigma}(t)\left|(\phi_p\circ f)^{\Delta}(t)\right|\Delta t\\
&\le \int_a^b \xi^{\sigma}(t)p|f^{\Delta}(t)||g(t)|^{p-1}\Delta t\\
&\le p\int_a^b \xi^{\sigma}(t)|g(t)|^{p-1}|f^{\Delta}(t)|\Delta t\\
&\le p\left(\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^p\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \left(\xi(\sigma(t))|g(t)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\Delta t\right)^{\frac{p-1}{p}}\\
&\le p\left(\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^p\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \xi^{\frac{p}{p-1}}(\sigma(t))|g(t)|^{p}\Delta t\right)^{\frac{p-1}{p}}\\
&\le p\left(\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^p\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \xi^{q}(\sigma(t))|g(t)|^{p}\Delta t\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le p\left(\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^p\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \left(\frac{1}{p-1}(\sigma(t)-a)^{1-p}\right)^{q}|g(t)|^{p}\Delta t\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le p\left(\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\left(\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^p\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b (\sigma(t)-a)^{\frac{-p(p-1)}{p-1}}|g(t)|^{p}\Delta t\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le p\,(p-1)^{\frac{p}{1-p}}\left(\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^p\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \frac{|g(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Où q est l'exposent conjugué de p $\left(\text{ie : } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
\left(\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^p\Delta t\right)^{\frac{1}{p}} &\ge \frac{\left|\int_a^b \xi(t)|f^p|^{\Delta}(t)\Delta t\right|}{p(p-1)^{\frac{p}{p-1}}\left(\int_a^b \frac{|g(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right)^{\frac{1}{q}}}\\
\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^p\Delta t &\ge \frac{\left|\int_a^b \xi(t)|f^p|^{\Delta}(t)\Delta t\right|^p}{\left(p(p-1)^{\frac{p}{p-1}}\right)^p\left(\int_a^b \frac{|g(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right)^{p-1}}\\
&\ge \frac{1}{\left(p(p-1)^{\frac{p}{p-1}}\right)^p}\left|\int_a^b \xi(t)|f^p|^{\Delta}(t)\Delta t\right|^p\left(\int_a^b \frac{|g(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right)^{1-p}.
\end{aligned}
$$

En utilisant (2.5) et (2.7), on a

$$\begin{aligned}\int_a^b |f^\Delta(t)|^p \Delta t &\geq C_p \left(-\int_a^b \xi^\Delta(t)|f^\sigma(t)|^p \Delta t\right)^p \left(\int_a^b \frac{|g(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right)^{1-p} \\ &\geq C_p \left(\int_a^b \frac{|f^\sigma(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right)^p \left(\int_a^b \frac{|f^\sigma(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t\right)^{1-p} \\ &\geq C_p \int_a^b \frac{|f^\sigma(t)|^p}{(\sigma(t)-a)^p}\Delta t.\end{aligned}$$

D'où (2.6) est vérifiée. □

2.3 Inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya

Soit $\delta : [a,b[_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$\delta(t) = \frac{\mu(t)}{b-\sigma(t)}, \qquad \text{pour } t \in [a,b[_{\mathbb{T}}.$$

Théorème 2.3.1. *[7](Inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya)*
Soit $q \geq 2$. Si la fonction δ est décroissante sur $[a,b[_{\mathbb{T}}$, alors il existe une constante $C_q > 0$ qui dépend seulement de q telle que l'inégalité suivante :

$$\int_a^b |f^\Delta(t)|^2 \Delta t \geq \frac{1}{4}\int_a^b \frac{|f(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + C_q \left(\int_a^b |f(t)|^q \Delta t\right)^{\frac{2}{q}}, \tag{2.9}$$

est vérifiée pour tout $f \in W^{1,q}_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$, avec $C_q \geq \frac{4}{(q+2)^2}$.

Démonstration.

Soit g une fonction définie par :

$$g(t) = \frac{f(t)}{\eta(t)}, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}},$$

avec

$$\eta(t) = \sqrt{b-t}, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Alors $\eta \in C^1_{rd}([a,b]_{\mathbb{T}})$, et on a :

$$\begin{aligned}\eta^\Delta(t) &= \lim_{s \longrightarrow t} \frac{\eta(\sigma(t)) - \eta(s)}{\sigma(t)-s} \\ &= \lim_{s \longrightarrow t} \frac{\left(\sqrt{b-\sigma(t)} - \sqrt{b-s}\right)\left(\sqrt{b-\sigma(t)} + \sqrt{b-s}\right)}{(\sigma(t)-s)\left(\sqrt{b-\sigma(t)} + \sqrt{b-s}\right)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta^{\Delta}(t) &= \lim_{s\longrightarrow t} \frac{b-\sigma(t)-b+s}{(\sigma(t)-s)\left(\sqrt{b-\sigma(t)}+\sqrt{b-s}\right)} \\
&= \lim_{s\longrightarrow t} \frac{-1}{\sqrt{b-\sigma(t)}+\sqrt{b-s}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{b-\sigma(t)}+\sqrt{b-t}} \\
&= \frac{-1}{\eta^{\sigma}(t)+\eta(t)}, \qquad \text{pour tout } t \in [a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après (1.4) on a :

$$g^{\Delta}(t) = \left(\frac{f(t)}{\eta(t)}\right)^{\Delta} = \frac{f^{\Delta}(t)\eta(t)-\eta^{\Delta}(t)f(t)}{\eta(t)\eta^{\sigma}(t)}.$$

Alors

$$g^{\Delta}(t)\eta(t)\eta^{\sigma}(t) = f^{\Delta}(t)\eta(t)-\eta^{\Delta}(t)f(t).$$

En appliquant (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\eta^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) &= \frac{f^{\Delta}(t)\eta(t)-\eta^{\Delta}(t)f(t)}{\eta(t)} \\
&= \frac{f^{\Delta}(t)\eta(t)}{\eta(t)} - \frac{\eta^{\Delta}(t)f(t)}{\eta(t)} \\
&= f^{\Delta}(t) - \left(-\frac{1}{\eta(t)+\eta^{\sigma}(t)}\right)\left(\frac{f(t)}{\eta(t)}\right) \\
&= f^{\Delta}(t) + \frac{f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\eta^{\sigma}(t)}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

En utilisant (2.11), on aura

$$\eta^{\sigma}(t) \leq \eta(t), \qquad \text{pour tout } t \in [a,\rho(b)]_{\mathbb{T}} \qquad (2.12)$$

Et

$$\begin{aligned}
\left(\eta^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t)\right)^2 &= \left(f^{\Delta}(t) + \frac{f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\eta^{\sigma}(t)}\right)^2 \\
&= (f^{\Delta}(t))^2 + \left(\frac{f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\eta^{\sigma}(t)}\right)^2 + 2f^{\Delta}(t)\frac{f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\eta^{\sigma}(t)} \\
&= |f^{\Delta}(t)|^2 + \frac{f^2(t)}{(\eta^2(t)+\eta(t)\eta^{\sigma}(t))^2} + 2f^{\Delta}(t)\frac{f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\eta^{\sigma}(t)}
\end{aligned}$$

d'après (2.12), on trouve

$$\begin{aligned}
\left(\eta^\sigma(t)g^\Delta(t)\right)^2 &= |f^\Delta(t)|^2+\frac{f^2(t)}{(\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t))^2}+\frac{f^2(t)}{(\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t))^2}\\
&\quad-\frac{f^2(t)}{(\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t))^2}+2f^\Delta(t)\frac{f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t)}\\
&= |f^\Delta(t)|^2+\frac{2f^2(t)}{(\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t))^2}+2f^\Delta(t)\frac{f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t)}-\frac{f^2(t)}{(\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t))^2}\\
&= |f^\Delta(t)|^2+\frac{2f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t)}\left[\frac{f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t)}+f^\Delta(t)\right]-\frac{f^2(t)}{(\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t))^2}\\
&\le |f^\Delta(t)|^2+\frac{2f(t)}{2\eta^2(t)}\left[\frac{f(t)}{\eta^2(t)+\eta(t)\eta^\sigma(t)}+f^\Delta(t)\right]-\frac{|f(t)|^2}{(2\eta^2(t))^2}\\
&\le |f^\Delta(t)|^2+\frac{f(t)}{\eta^2(t)}\eta^\sigma(t)g^\Delta(t)-\frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\\
&\le |f^\Delta(t)|^2+\frac{\eta(t)g(t)}{\eta^2(t)}\eta^\sigma(t)g^\Delta(t)-\frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\\
&\le |f^\Delta(t)|^2+g^\Delta(t)g(t)\frac{1}{\eta(t)}\eta^\sigma(t)-\frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\\
&\le |f^\Delta(t)|^2+g^\Delta(t)g(t)(-2\eta^\Delta(t)\eta^\sigma(t))-\frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\\
&\le |f^\Delta(t)|^2+g^\Delta(t)g(t)\xi(t)-\frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}, \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

avec

$$\xi(t)=-2\eta^\Delta(t)\eta^\sigma(t), \qquad \text{pour tout } t\in[a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}.$$

Alors ξ est Δ_différentiable pour tout les points dispersés à droite.

Soit $t\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ tel que t est un point dense à droite, donc t est un point d'accumulation.

Par la suite, on distingue deux cas :

(a) Le premier cas : il existe $c,d\in[a,b]_{\mathbb{T}}$ tel que $t\in[c,d]\subset[a,b]_{\mathbb{T}}$, alors ξ est Δ_différentiable en t et $\xi^\Delta(t)=0$.

(b) Le deuxième cas : il existe une suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}\in R\cap[a,b]_{\mathbb{T}}$ tel que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, t_k est un point isolé, de plus t_k converge vers t lorsque k tend vers ∞.

Dans ce cas, $\xi^\Delta(t)$ n'existe pas.

Le Théorème 1.4.2, implique que

$$\mu_\Delta\left(\left\{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}:\sigma(t)=t \quad \text{et} \quad t=\lim_{k\longrightarrow\infty}t_k,(t_k)_{k\in\mathbb{N}}\right\}\right)=0.$$

Par conséquent, ξ est Δ_differentiable p.p sur $[a,b]_{\mathbb{T}}$.

Soit $t, s \in [a,\rho(b)]_{\mathbb{T}}$ tel que $t > s$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\xi(t)-\xi(s)}{\xi(t)\xi(s)} &= \frac{-2\eta^{\Delta}(t)\eta^{\sigma}(t)+2\eta^{\Delta}(s)\eta^{\sigma}(s)}{(-2\eta^{\Delta}(t)\eta^{\sigma}(t))(-2\eta^{\Delta}(s)\eta^{\sigma}(s))}\\
&= \frac{2\left(\eta^{\Delta}(s)\eta^{\sigma}(s)-\eta^{\Delta}(t)\eta^{\sigma}(t)\right)}{4\eta^{\Delta}(t)\eta^{\sigma}(t)\eta^{\Delta}(s)\eta^{\sigma}(s)}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\eta^{\Delta}(s)\eta^{\sigma}(s)}{\eta^{\Delta}(t)\eta^{\sigma}(t)\eta^{\Delta}(s)\eta^{\sigma}(s)}-\frac{\eta^{\Delta}(t)\eta^{\sigma}(t)}{\eta^{\Delta}(t)\eta^{\sigma}(t)\eta^{\Delta}(s)\eta^{\sigma}(s)}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\eta^{\Delta}(t)\eta^{\sigma}(t)}-\frac{1}{\eta^{\Delta}(s)\eta^{\sigma}(s)}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\frac{-\eta^{\sigma}(t)}{\eta(t)+\eta^{\sigma}(t)}}-\frac{1}{\frac{-\eta^{\sigma}(s)}{\eta(s)+\eta^{\sigma}(s)}}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\eta(t)+\eta^{\sigma}(t)}{\eta^{\sigma}(t)}+\frac{\eta(s)+\eta^{\sigma}(s)}{\eta^{\sigma}(s)}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\eta(s)}{\eta^{\sigma}(s)}+1-\frac{\eta(t)}{\eta^{\sigma}(t)}-1\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\eta(s)}{\eta^{\sigma}(s)}-\frac{\eta(t)}{\eta^{\sigma}(t)}\right\}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\xi(t)-\xi(s) &= \frac{1}{2}\xi(t)\xi(s)\left\{\frac{\eta(s)}{\eta^{\sigma}(s)}-\frac{\eta(t)}{\eta^{\sigma}(t)}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\xi(t)\xi(s)\left\{\sqrt{\frac{b-s}{b-\sigma(s)}}-\sqrt{\frac{b-t}{b-\sigma(t)}}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\xi(t)\xi(s)\left\{\sqrt{\frac{b-s-\sigma(s)+\sigma(s)}{b-\sigma(s)}}-\sqrt{\frac{b-t-\sigma(t)+\sigma(t)}{b-\sigma(t)}}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\xi(t)\xi(s)\left\{\sqrt{\frac{b-\sigma(s)}{b-\sigma(s)}+\frac{\sigma(s)-s}{b-\sigma(s)}}-\sqrt{\frac{b-\sigma(t)}{b-\sigma(t)}+\frac{\sigma(t)-t}{b-\sigma(t)}}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\xi(t)\xi(s)\left\{\sqrt{1+\frac{\mu(s)}{b-\sigma(s)}}-\sqrt{1+\frac{\mu(t)}{b-\sigma(t)}}\right\}.
\end{aligned}$$

D'où ξ est une fonction croissante.

D'autre part, d'après le Théorème 1.3.4 on a

$$\begin{aligned}
\int_a^b \xi(t)g(t)g^{\Delta}(t)\Delta t &= -\int_a^b [\xi g]^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)\Delta t\\
&= -\int_a^b \left[\xi g^{\Delta}+\xi^{\Delta}g^{\sigma}\right](t)g^{\sigma}(t)\Delta t\\
&= -\int_a^b \xi(t)g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t)\Delta t-\int_a^b \xi^{\Delta}(t)|g^{\sigma}(t)|^2\Delta t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \xi(t)g(t)g^\Delta(t)\Delta t &= -\int_a^b \xi^\Delta(t)|g^\sigma(t)|^2\Delta t - \int_a^b \xi(t)g^\Delta(t)\left[g(t)+\mu(t)g^\Delta(t)\right]\Delta t\\ &= -\int_a^b \xi^\Delta(t)|g^\sigma(t)|^2\Delta t - \int_a^b \xi(t)g^\Delta(t)g(t)\Delta t - \int_a^b \xi(t)\mu(t)|g^\Delta(t)|^2\Delta t\\ &\leq -\int_a^b \xi(t)g^\Delta(t)g(t)\Delta t - \int_a^b \xi(t)\mu(t)|g^\Delta(t)|^2\Delta t\\ &\leq -\int_a^b \xi(t)g^\Delta(t)g(t)\Delta t.\end{aligned}$$

Ce qui donne que $2\int_a^b \xi(t)g^\Delta(t)g(t)\Delta t \leq 0$.

Ce qui signifie que

$$\int_a^b \xi(t)g^\Delta(t)g(t)\Delta t \leq 0.$$

En utilisant l'inégalité si dessus et l'inégalité (2.13), nous avons

$$\begin{aligned}\int_a^b |\eta^\sigma(t)g^\Delta(t)|^2\Delta t &\leq \int_a^b |f^\Delta(t)|^2\Delta t + \int_a^b \xi(t)g^\Delta(t)g(t)\Delta t - \int_a^b \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\Delta t\\ &\leq \int_a^b \left(|f^\Delta(t)|^2 - \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\right)\Delta t. \qquad (2.14)\end{aligned}$$

Par le Théorème 1.2.4, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}\left(|g(t)|^{\frac{q+2}{2}}\right)^\Delta &= \frac{q+2}{2}|g^\Delta(t)|\int_0^1 \left|g(t)+h\mu(t)g^\Delta(t)\right|^{\frac{q}{2}}dh\\ &= \frac{q+2}{2}|g^\Delta(t)|\int_0^1 \left|g(t)+h\mu(t)\left[\frac{g^\sigma(t)-g(t)}{\mu(t)}\right]\right|^{\frac{q}{2}}dh\\ &= \frac{q+2}{2}|g^\Delta(t)|\int_0^1 |g(t)+hg^\sigma(t)-hg(t)|^{\frac{q}{2}}dh\\ &\leq \frac{q+2}{2}|g^\Delta(t)|\int_0^1 |hg^\sigma(t)+(1-h)g(t)|^{\frac{q}{2}}dh\\ &\leq \frac{q+2}{2}|g^\Delta(t)||g_1(t)|^{\frac{q}{2}},\end{aligned}$$

avec

$$g_1(t) = \max(|g(t)|, |g^\sigma(t)|), \qquad \text{pour tout } \ t\in[a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Puisque la fonction η est décroissante, on a

$$\begin{aligned}|f(t)|^{\frac{q+2}{2}} &= |\eta(t)g(t)|^{\frac{q+2}{2}}\\ &= |\eta(t)|^{\frac{q+2}{2}}|g(t)|^{\frac{q+2}{2}}\\ &= |\eta(t)|^{\frac{q+2}{2}}\int_a^t \left(|g(s)|^{\frac{q+2}{2}}\right)^\Delta\Delta s\\ &\leq \frac{q+2}{2}\int_a^t |\eta(t)|^{\frac{q+2}{2}}|g^\Delta(s)||g_1(s)|^{\frac{q}{2}}\Delta s\end{aligned}$$

$$|f(t)|^{\frac{q+2}{2}} \leq \frac{q+2}{2}\int_a^t |\eta(s)|^{\frac{q+2}{2}}|g^{\Delta}(s)||g_1(s)|^{\frac{q}{2}}\Delta s.$$

Donc

$$|f(t)|^{q+2} \leq \left(\frac{q+2}{2}\right)^2\left(\int_a^t |\eta(s)|^{\frac{q+2}{2}}|g^{\Delta}(s)||g_1(s)|^{\frac{q}{2}}\Delta s\right)^2.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder et l'inégalité (2.14), on aura

$$\begin{aligned}|f(t)|^{q+2} &\leq m_q\left(\int_a^b |g^{\Delta}(t)|^2\eta^2(t)\Delta t\right)\left(\int_a^b |g_1(t)|^q\eta^q(t)\Delta t\right)\\ &\leq m_q\left(\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^2 - \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\Delta t\right)\left(\int_a^b |f_1(t)|^q\Delta t\right),\end{aligned}$$

où $m_q = \frac{1}{4}(q+2)^2$ et

$$f_1(t) = \max(|f(t)|, |f^{\sigma}(t)|), \qquad \text{pour tout } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Alors

$$\int_a^b |f_1(t)|^q\Delta t \leq (m_q)^{\frac{q}{q+2}}\left(\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^2 - \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\Delta t\right)^{\frac{q}{q+2}}\left(\int_a^b |f_1(t)|^q\Delta t\right)^{\frac{q}{q+2}}$$

implique que

$$\left[\left(\int_a^b |f_1(t)|^q\Delta t\right)\left(\int_a^b |f_1(t)|^q\Delta t\right)^{\frac{-q}{q+2}}\right]^{\frac{q+2}{q}} \leq \left[(m_q)^{\frac{q}{q+2}}\left(\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^2 - \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\Delta t\right)^{\frac{q}{q+2}}\right]^{\frac{q+2}{q}}$$

alors,

$$\frac{1}{m_q}\left(\int_a^b |f_1(t)|^q\Delta t\right)^{\frac{2}{q}} \leq \int_a^b |f^{\Delta}(t)|^2 - \frac{|f(t)|^2}{4(b-t)^2}\Delta t.$$

Donc

$$\int_a^b |f^{\Delta}(t)|^2 \geq \frac{1}{4}\int_a^b \frac{|f(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + \frac{1}{m_q}\left(\int_a^b |f_1(t)|^q\Delta t\right)^{\frac{2}{q}}.$$

D'où l'inégalité (2.9) est vérifiée. □

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de solution d'un problème aux limites linéaire.

3.1 Problème aux limites linéaire

Dans cette section, on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} (ru^{\Delta})^{\Delta}(t) + h(t)u(t) = -f(t), \quad t \in [a, \rho^2(b)]_{\mathbb{T}}, \\ \qquad u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $f \in L^2([a, b]_{\mathbb{T}})$ et r, h sont des fonctions satisfaisant les hypothèses suivantes :

(H_1) $\quad r \in L^{\infty}([a, b]_{\mathbb{T}})$ et il existe une constante $\alpha > 0$, tel que

$$r(t) > \alpha, \qquad \Delta - p.p \ t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

(H_2) $\quad$ Il existe deux constantes $\xi, \eta > 0$, tel que

$$h(t) \leq \frac{\xi}{b-t} + \eta, \qquad \text{pour tout } t \in [a, b[_{\mathbb{T}}.$$

(H_3) $\quad \gamma := \alpha - 8\xi d - \eta d > 0$, avec $d := b - a$.

(H_4) $\quad$ La fonction δ est décroissante sur $[a, b[_{\mathbb{T}}$.

L'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1) et l'inégalité de Hardy sont fortement liées.

Définition 3.1.1. *[2] Une solution faible de (3.1) est une fonction $u \in H^1_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$, telle que*

$$\int_a^{\rho(b)} r(t)u^\Delta(t)v^\Delta(t)\Delta t - \int_a^{\rho(b)} h(t)u(t)v^\sigma(t)\Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t)v^\sigma(t)\Delta t.$$

Le problème (3.1) est un problème variationnel dans l'espace de Hilbert $H^1_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$. Ce qui nous amène à utiliser le Théorème de Lax Miligram appliqué à la forme bilinéaire

$$a(u,v) := \int_a^{\rho(b)} r(t)u^\Delta(t)v^\Delta(t)\Delta t - \int_a^{\rho(b)} h(t)u(t)v^\sigma(t)\Delta t.$$

Remarque 3.1.1. *[2] Pour tout $u \in H^1_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$, on a les inégalités suivantes :*

$$\|u^\sigma\|_{L^2_\Delta([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})} \leq \|u\|_{L^2_\Delta([a,b]_{\mathbb{T}})} + d\|u^\Delta\|_{L^2_\Delta([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})}, \tag{3.2}$$

et

$$\frac{1}{2}\int_a^{\rho(b)} \frac{|u^\sigma(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t \leq \int_a^{\rho(b)} \frac{|u(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + \int_a^{\rho(b)} |u(t)|^2\Delta t. \tag{3.3}$$

Théorème 3.1.1. *[2] Le problème (3.1) admet une solution unique dans $H^1_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$. De plus, il existe une constante $C_0 > 0$ indépendante de u et f telle que*

$$\|u\|_{H^1_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})} \leq C_0\|f\|_{L^2_\Delta([a,b]_{\mathbb{T}})}. \tag{3.4}$$

Démonstration.

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1), on appliquera le Théorème de Lax Miligram.

• Premièrement, on va montrer que $a(u,v)$ est continue.

Soit $u, v \in H^1_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$, alors on a :

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \int_a^{\rho(b)} |r(t)||u^\Delta(t)||v^\Delta(t)|\Delta t + \int_a^{\rho(b)} |h(t)||u(t)||v^\sigma(t)|\Delta t \\
&\leq \int_a^{\rho(b)} \sup|r(t)||u^\Delta(t)||v^\Delta(t)|\Delta t + \int_a^{\rho(b)} \left(\frac{|\xi|}{|b-t|} + |\eta|\right)|u(t)||v^\sigma(t)|\Delta t \\
&\leq \|r\|_\infty \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)||v^\Delta(t)|\Delta t + \int_a^{\rho(b)} \frac{|\xi|}{|b-t|}|u(t)||v^\sigma(t)|\Delta t + \int_a^{\rho(b)} |\eta||u(t)||v^\sigma(t)|\Delta t,
\end{aligned}
$$

en utilisant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| \leq{}& \|r\|_\infty \left(\int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2 \Delta t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^{\rho(b)} |v^\Delta(t)|^2 \Delta t\right)^{\frac{1}{2}} + |\xi| \left(\int_a^{\rho(b)} \frac{|u(t)|^2}{|b-t|^2} \Delta t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^{\rho(b)} |v^\sigma(t)|^2 \Delta t\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ |\eta| \left(\int_a^{\rho(b)} |u(t)|^2 \Delta t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^{\rho(b)} |v^\sigma(t)|^2 \Delta t\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

par l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya (2.9), et l'inégalité (3.2), on obtient

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \|r\|_\infty \|u^\Delta\|_{L^2_\Delta} \|v^\Delta\|_{L^2_\Delta} + 4|\xi|d \|u^\Delta\|_{L^2_\Delta} \|v^\Delta\|_{L^2_\Delta} + |\eta| \|u\|_{L^2_\Delta} \|v^\sigma\|_{L^2_\Delta} \\
&\leq (\|r\|_\infty + 4|\xi|d) \|u^\Delta\|_{L^2_\Delta} \|v^\Delta\|_{L^2_\Delta} + |\eta| \|u\|_{L^2_\Delta} \|v^\sigma\|_{L^2_\Delta} \\
&\leq (\|r\|_\infty + 4|\xi|d) \|u\|_{H^1_\Delta} \|v\|_{H^1_\Delta} + |\eta| \|u\|_{L^2_\Delta} (\|v\|_{L^2_\Delta} + d\|v^\Delta\|_{L^2_\Delta}) \\
&\leq (\|r\|_\infty + 4|\xi|d) \|u\|_{H^1_\Delta} \|v\|_{H^1_\Delta} + |\eta| \|u\|_{L^2_\Delta} \|v\|_{L^2_\Delta} + |\eta| d \|u\|_{L^2_\Delta} \|v^\Delta\|_{L^2_\Delta} \\
&\leq (\|r\|_\infty + 4|\xi|d) \|u\|_{H^1_\Delta} \|v\|_{H^1_\Delta} + |\eta| \|u\|_{H^1_\Delta} \|v\|_{H^1_\Delta} + |\eta| d \|u\|_{H^1_\Delta} \|v\|_{H^1_\Delta} \\
&\leq (\|r\|_\infty + 4|\xi|d) \|u\|_{H^1_\Delta} \|v\|_{H^1_\Delta} + |\eta|(1+d) \|u\|_{H^1_\Delta} \|v\|_{H^1_\Delta} \\
&\leq (\|r\|_\infty + 4|\xi|d + |\eta|(1+d)) \|u\|_{H^1_\Delta} \|v\|_{H^1_\Delta} \\
&\leq C \|u\|_{H^1_\Delta([a,b]_\mathbb{T})} \|v\|_{H^1_\Delta([a,b]_\mathbb{T})}.
\end{aligned}
$$

Avec $C = \|r\|_\infty + 4|\xi|d + |\eta|(1+d)$.

D'où la forme $a(u,v)$ est continue.

• Deuxièmement, on va montrer que $a(u,v)$ est coercive.

Pour cela on définit l'inégalité de Poincaré par :

il existe une constante $L > 0$ telle que

$$
\|u\|_{H^1_\Delta([a,b]_\mathbb{T})} \leq L \|u^\Delta\|_{L^P_\Delta([a,b]_\mathbb{T})}. \tag{3.5}
$$

Soit $u \in H^1_{0,\Delta}([a,b]_\mathbb{T})$, alors on a

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_a^{\rho(b)} r(t)|u^\Delta(t)|^2\Delta t - \int_a^{\rho(b)} h(t)u(t)u^\sigma(t)\Delta t\\
&\geq \alpha \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t - \int_a^{\rho(b)} \left(\frac{\xi}{b-t}+\eta\right) u(t)u^\sigma(t)\Delta t\\
&\geq \alpha \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t - \xi\int_a^{\rho(b)} \frac{u(t)}{b-t}u^\sigma(t)\Delta t - \eta\int_a^{\rho(b)} u(t)u^\sigma(t)\Delta t\\
&\geq \alpha \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t - \xi\int_a^{\rho(b)} \frac{|u^\sigma(t)|^2}{b-t}\Delta t - \eta\int_a^{\rho(b)} |u^\sigma(t)|^2\Delta t\\
&\geq \alpha \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t - \xi\int_a^{\rho(b)} (b-t)\frac{|u^\sigma(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t - \eta\int_a^{\rho(b)} |u^\sigma(t)|^2\Delta t\\
&\geq \alpha \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t - \xi\int_a^{\rho(b)} (b-a)\frac{|u^\sigma(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t - \eta\int_a^{\rho(b)} |u^\sigma(t)|^2\Delta t\\
&\geq \alpha \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t - \xi d\int_a^{\rho(b)} \frac{|u^\sigma(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t - \eta\int_a^{\rho(b)} |u^\sigma(t)|^2\Delta t.
\end{aligned}$$

par (3.3), on a

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geq \alpha \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t - 2\xi d\int_a^{\rho(b)} \frac{|u(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t - 2\xi d\int_a^{\rho(b)} |u(t)|^2\Delta t - \eta\int_a^{\rho(b)} |u^\sigma(t)|^2\Delta t\\
&\geq \alpha \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t - 2\xi d\int_a^{\rho(b)} \frac{|u(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t - (\eta+2\xi d)\int_a^{\rho(b)} |u^\sigma(t)|^2\Delta t.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya (2.9) et l'inégalité de Poincaré (3.5), on aura

$$\begin{aligned}
a(u,u) &\geq \alpha \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t + 2\xi d\int_a^{\rho(b)} |u(t)|^2\Delta t - 8\xi d\int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t - (\eta+2\xi d)\int_a^{\rho(b)} |u^\sigma(t)|^2\Delta t\\
&\geq (\alpha-8\xi d)\int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t - \eta\int_a^{\rho(b)} |u(t)|^2\Delta t\\
&\geq (\alpha-8\xi d)\|u^\Delta\|^2_{L^2_\Delta([a,\rho(b)]_\mathbb{T})} - \eta d\|u^\Delta\|^2_{L^2_\Delta([a,\rho(b)]_\mathbb{T})}\\
&= \gamma\|u^\Delta\|^2_{L^2_\Delta([a,\rho(b)]_\mathbb{T})}\\
&\geq \frac{\gamma}{L}\|u\|^2_{H^1_{\Delta,0}([a,b]_\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Par la suite $a(u,v)$ est coercive.

Par conséquent, la forme bilinéaire $a(u,v)$ est continue et coercive, de plus $\int_a^{\rho(b)} f(t)v^\sigma(t)\Delta t$ est une forme linéaire continue, alors d'après le théorème de Lax-Miligram, le problème (3.1) possède une solution unique dans $H^1_{\Delta,0}([a,b]_\mathbb{T})$.

On a :

$$\int_a^{\rho(b)} f(t)u^\sigma(t)\Delta t = a(u,u) \geq \frac{\gamma}{L}\|u\|^2_{H^1_{\Delta,0}([a,b]_{\mathbb{T}})}.$$

Grâce à l'inégalité de Hölder et l'inégalité (3.2), on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{L}\|u\|^2_{H^1_{\Delta,0}([a,b]_{\mathbb{T}})} &\leq \int_a^{\rho(b)} |f(t)u^\sigma(t)|\Delta t \\
&\leq \|f\|_{L^2_\Delta([a,b]_{\mathbb{T}})}.\|u^\sigma\|_{L^2_\Delta([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})} \\
&\leq \|f\|_{L^2_\Delta([a,b]_{\mathbb{T}})}\left(\|u\|_{L^2_\Delta([a,b]_{\mathbb{T}})} + d\|u^\Delta\|_{L^2_\Delta([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})}\right) \\
&\leq C\|f\|_{L^2_\Delta([a,b]_{\mathbb{T}})}.\|u\|_{H^1_{\Delta,0}([a,b]_{\mathbb{T}})}
\end{aligned}$$

Donc

$$\|u\|_{H^1_{\Delta,0}([a,b]_{\mathbb{T}})} \leq C_0\|f\|_{L^2_\Delta([a,b]_{\mathbb{T}})},$$

avec $C_0 = \frac{CL}{\gamma}$.

D'où, l'inégalité (3.4) est vérifiée. □

Le Théorème 3.1.1 assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.1), où $u \in H^1_{\Delta,0}([a,b]_{\mathbb{T}})$.

Définition 3.1.2. *[2] Si la solution u du problème (3.1) est dans $H^2_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$, on dit que u est une solution forte.*

Proposition 3.1.1. *[2] Si la fonction r est Δ_différentiable presque partout et $r^\Delta \in L^\infty_\Delta([a,\rho(b)]_{\mathbb{T}})$, alors le problème (3.1) admet une solution unique dans $H^2_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$ et vérifie*

$$\|u\|_{H^2_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})} \leq C_2\|f\|_{L^2_\Delta([a,b]_{\mathbb{T}})}, \tag{3.6}$$

où C_2 une constante indépendante de u et f.

Démonstration.

Grâce au Théorème 3.1.1, le problème (3.1) admet une solution unique dans $H^1_{0,\Delta}([a,b]_{\mathbb{T}})$.

Soient u la solution faible de (3.1) et $f \in L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})$, alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b |h(t)u(t)|^2\Delta t &\leq \int_a^b \left|\left(\frac{\xi}{b-t}+\eta\right)u(t)\right|^2 \Delta t\\
&\leq \int_a^b \left|\frac{\xi}{b-t}u(t)+\eta u(t)\right|^2 \Delta t\\
&\leq 2\int_a^b \left|\frac{\xi}{b-t}u(t)\right|^2 \Delta t + 2\int_a^b |\eta u(t)|^2\,\Delta t\\
&\leq 2\xi^2\int_a^b \frac{|u(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + 2\eta^2\int_a^b |u(t)|^2\Delta t.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya, $hu \in L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})$ et

$$(ru^\Delta)^\Delta = -f - hu \in L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T}).$$

D'autre part, en utilisant (1.3) on aura

$$(ru^\Delta)^\Delta(t) - u^\Delta(t)r^\Delta(t) = r^\sigma(t)u^{\Delta^{(2)}}(t), \qquad \text{pour tout } t \in [a,\rho^2(b)]_\mathbb{T}. \tag{3.7}$$

Ainsi, on a $u^\Delta \in L^2_\Delta([a,\rho(b)]_\mathbb{T})$ et $r^\Delta \in L^\infty_\Delta([a,\rho(b)]_\mathbb{T})$, alors par l'inégalité de Hölder $u^\Delta r^\Delta \in L^2_\Delta([a,\rho(b)]_\mathbb{T})$ et par la formule (3.7), on déduit que

$$r^\sigma(t)u^{\Delta^{(2)}}(t) \in L^2_\Delta([a,\rho^2(b)]_\mathbb{T}).$$

D'après l'hypothèse (H_1), on a $r^\sigma(t) > \alpha$ pour tout $t \in [a,b]_\mathbb{T}$.
D'où $u^{\Delta^{(2)}} \in L^2_\Delta([a,\rho^2(b)]_\mathbb{T})$, ce qui implique que la solution $u \in H^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})$.

Maintenant, on va montrer que la solution u vérifiée l'inégalité (3.6).
On a :

$$\begin{aligned}
\alpha\int_a^{\rho^2(b)} |u^{\Delta^{(2)}}(t)|^2\Delta t &\leq \int_a^{\rho^2(b)} |r^\sigma(t)u^{\Delta^{(2)}}(t)|^2\Delta t\\
&\leq \int_a^{\rho^2(b)} \left|(ru^\Delta)^\Delta(t) - u^\Delta(t)r^\Delta(t)\right|^2\\
&\leq \int_a^{\rho^2(b)} \left|-f - h(t)u(t) - u^\Delta(t)r^\Delta(t)\right|^2\\
&\leq 2\xi^2\int_a^b \frac{|u(t)|^2}{(b-t)^2}\Delta t + 2\eta^2\int_a^b |u(t)|^2\Delta t + \|r^\Delta\|^2_\infty\int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2\Delta t + \int_a^b |f(t)|^2\Delta t.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hardy-Sobolev-Maz'ya, on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha \int_a^{\rho^2(b)} |u^{\Delta^{(2)}}(t)|^2 \Delta t &\leq 8\xi^2 \int_a^b |u^\Delta(t)|^2 \Delta t - 2\xi^2 \int_a^b |u(t)|^2 \Delta t + 2\eta^2 \int_a^b |u(t)|^2 \Delta t \\
&+ \|r^\Delta\|_\infty^2 \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)| \Delta t + \int_a^b |f(t)|^2 \Delta t \\
&\leq (8\xi^2 + \|r^\Delta\|_\infty^2) \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2 \Delta t - 2\xi^2 \int_a^b |u(t)|^2 \Delta t \\
&+ 2\eta^2 \int_a^{\rho(b)} |u(t)|^2 \Delta t + \int_a^b |f(t)|^2 \Delta t \\
&\leq (8\xi^2 + \|r^\Delta\|_\infty^2) \int_a^{\rho(b)} |u^\Delta(t)|^2 \Delta t + (2\eta^2 - 2\xi^2) \int_a^b |u(t)|^2 \Delta t + \int_a^b |f(t)|^2 \Delta t \\
&\leq (8\xi^2 + \|r^\Delta\|_\infty^2) \|u^\Delta\|^2_{L^2_\Delta([a,\rho(b)]_\mathbb{T})} + (2\eta^2 - 2\xi^2) \|u\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})} + \|f\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})} \\
&\leq (8\xi^2 + \|r^\Delta\|_\infty^2) \|u\|^2_{H^1_{0,\Delta}([a,b]_\mathbb{T})} + (2\eta^2 - 2\xi^2) \|u\|^2_{H^1_{0,\Delta}([a,b]_\mathbb{T})} + \|f\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})} \\
&\leq (6\xi^2 + \|r^\Delta\|_\infty^2 + 2\eta^2) \|u\|^2_{H^1_{0,\Delta}([a,b]_\mathbb{T})} + \|f\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})} \\
&\leq c_1 \|u\|^2_{H^1_{0,\Delta}([a,b]_\mathbb{T})} + \|f\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})},
\end{aligned}$$

avec $c_1 = 6\xi^2 + \|r^\Delta\|_\infty^2 + 2\eta^2$.

En appliquant l'inégalité (3.4), on trouve

$$\begin{aligned}
\alpha \|u^{\Delta^{(2)}}\|^2_{L^2_\Delta([a,\rho^2(b)]_\mathbb{T})} &\leq c_1 \|u\|^2_{H^1_{0,\Delta}([a,b]_\mathbb{T})} + \|f\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})} \\
&\leq c_1 C_0^2 \|f\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})} + \|f\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})} \\
&\leq (c_1 C_0^2 + 1) \|f\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|u^{\Delta^{(2)}}\|^2_{L^2_\Delta([a,\rho^2(b)]_\mathbb{T})} + \|u\|^2_{H^1_{0,\Delta}([a,b]_\mathbb{T})} - \|u\|^2_{H^1_{0,\Delta}([a,b]_\mathbb{T})} &\leq \left(\frac{c_1 C_0^2 + 1}{\alpha} \right) \|f\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})} \\
\|u^{\Delta^{(2)}}\|^2_{L^2_\Delta([a,\rho^2(b)]_\mathbb{T})} + \|u\|^2_{H^1_{0,\Delta}([a,b]_\mathbb{T})} &\leq \left(\frac{c_1 C_0^2 + 1}{\alpha} + C_0^2 \right) \|f\|^2_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$\|u\|_{H^2_{0,\Delta}([a,b]_\mathbb{T})} \leq C_2 \|f\|_{L^2_\Delta([a,b]_\mathbb{T})},$$

avec $C_2 = \frac{c_1 C_0^2 + 1}{\alpha} + C_0^2$.

Par conséquent l'inégalité (3.6) est vérifiée. $\square$

Conclusion

Le calcul sur les échelles de temps est un sujet très vaste qui couvre plusieurs domaines. De cette théorie découle plusieurs types d'inégalités. Dans ce travail on a présenté l'inégalité de Hardy sur les échelles de temps et ses applications sur un problème aux limites en appliquant le théorème de Lax Miligrame.

Bibliographie

[1] A. Benaissa Cherif, A. Hammoudi, F. Z. Ladrani, Density problems in $L^p_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ space ; *Electronic journal of Mathematical Analysis and Application* Vol.1(2),pp.178-187. July 2013.

[2] A. Benaissa Cherif, *Contributions Topologiques sur les échelles de temps et leurs applications dans les équations différentielles*, Thèse de doctorat, Universitée Djillali Liabes-Sidi BelAbbès. Année 2014-2015.

[3] A. Cabada, D. Vivero, Expression of the Lebesgue $\Delta\_$ integral on time scales as a usual Lebesgue integral ; application to the calculus of $\Delta\_$ antiderivatives, *Mathematical and Computer Modelling*, 194-207. 43 (2006).

[4] Adimurthi, N. Chaudhuri, And M. Ramaswamy, An Improved Hardy-Sobolev Inequality and its Aapplication, *Proceedings Of The American Mathematical Society*, Volume 130, Number 2, Pages 489(505), (2001).

[5] C. A. Sloane, Hardy-sobolev-maz'ya inequalities for Fractional integrals on half-spaces and Convex domains. *Georgia Institute of Technology* (2011).

[6] E. Medeiros, K. Perera, K. Tintarev, Multiplicity results for problems involving the Hardy Sobolev operator via Morse theory, *Nonlinear Analysis* 72, 2170-2177, (2010).

[7] F. Z. Ladrani And A. Benaissa Cherif, Hardy-Sobolev-Maz'ya Inequality on Time Scales ; And Applicaton To The Boundary value problems. *Electronic Journal EJMAA* Vol. 6(1), pp. 173-143, Jan. 2018.

[8] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Elementary Theorems concerning power series with positive coefficents and moment constants of positive functions, *J. Reine Angew Math.* 157, 141-158, (1927).

[9] J. P. Garcia Azorero and I. Peral Alonso, Hardy Inequalities and Some Critical Elliptic and Parabolic Problems, *Journal of differential equations* 144, 441-476, (1998).

[10] L. Frank Rupert And M. Loss, Hardy-Sobolev-Maz'ya Inequalities For Arbitrary Domains. *J. Math. Pures Appl.* 97, 39-54, (2012).

[11] M. Bohner, A. Peterson, *Dynamic Equations on Time scales ; An Introduction with Applications. Birkäuser*, Boston, (2001).

[12] M. Bohner And A. Peterson, *Advences in Dynamic Equations On Time scales*, Boston, (2003).

[13] M. Bohner and Gusein sh. Guseinov ; Improper Integrals on Time Scales ; *Dynamic Systems and Applications* 45-65, 12(2003).

[14] M. Bohner and Gusein sh. Guseinov, Multiple integration on time scales, *Dynamic Systems And Applications* pp-pp, (2005).

[15] P. Ravi Agarwal, V. Otero Espinar, K. Perera, And Dolores R. Vivero, Basic Properties of Sobolev's Spaces on Time Scales, Hindawi Publishing Corporation. *Advances in Difference Equation*, Article ID 38121, Pages 1-14, (2006).

[16] P. Rehak, Hardy Inequality on Time Scales And its application to Halflinear dynamic quations, Hindawi Publishing Corporation, *Journal of Inequalities and Applications 5*, 495-507, (2005).

[17] S. Filippas, Optimizing Improved Hardy Inequalities, *Journal of Functional Analysis* 192, 186-233, (2002).

[18] S. Filippas, V. G. Maz'ya, A. Tertikas, Sharp Hardy-Sobolev Inequalities. *C. R. Math. Acad. Sci-Paris* 339, no. 7, 483-486, (2004).

[19] S. Filippas, V. G. Maz'ya, A. Tertikas, Critical Hardy-Sobolev inequalities. *J. Math. Pures* Appl.(9) 87, no. 1, 37-56, (2007).

[20] T. Gkikas Konstantinos, Hardy And Hardy-Sobolev *Inequalities And Their Applications*. University of Crete (2011).

[21] U. M. Ozkan And H. Yilldirim, Hardy-Knopp-type inequalities on time scales, *Dynamic Systems and Applications* 477-486, 17, (2008).

[22] V. G. Maz'ya, *Sobolev Spaces*. Springer-Verlag, Berlin etc. 70. (1985).