République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations différentielles et modélisation

Présenté par :

Melle. Nada TALEB

Etude de la Stabilité des équations différentielles d'ordre fractionnaire implicites

Encadrant :

M. Tawfiq Fawzi Mami

Maitre de conférence "A" à C.U.B.B.A.T.

Soutenu le : 11/06/2019

Devant le jury composé de :

Président :	M. Boumediene Boukhari (M.A.A)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	M. Hamid Khiar (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	M. Tawfiq Fawzi Mami (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A MES TRES CHERS PARENTS

Aucune dédicace, aucun mot ne sera assez puissant pour exprimer à leurs juste valeur la gratitude et l'amour que je vous porte ;
Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos voeux tant formulés.
Chaque ligne de ce mémoire, chaque mot et chaque lettre vous exprime ma reconnaissance et mon respect.
Grace à vous j'ai trouvé la force pour persévérer et pour prospérer dans la vie.

A MA TENDRE MERE

Je te remercie pour tout l'amour et le soutien que tu me porte depuis mon enfance.
Merci maman pour les sacrifices que tu as consenti pour mon instruction et mon bien être.
Tu es la lumière qui éclaire mon univers ,
j'ose te le dire je t'aime maman.

A MON TRES CHER PERE

Je n'ai jamais su t'exprimer à quel point tu m'es cher, certainement par pudeur ou peut être parce que chez nous il y a des mots qui ne se disent pas.
Je t'exprime mon respect à travers chaque effort que j'ai fourni pour accomplir ce mémoire.
Merci pour la confiance que tu me portes papa.

Je vous remercie de n'avoir jamais cessé de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.
Puisse Dieu vous accorder santé, longue vie, bonheur et prospérité.

A MES SOEURS CHAIMA ET AYA

Merci pour votre indéfectible soutien ainsi que vos encouragements plus que précieux durant ces années d'études.
Merci pour votre grand coeur et votre immense générosité .
Merci de m'avoir supporté à certains moments ou mon moral était au plus bas.
Je ne vous le dis pas souvent mais je vous aime mes soeurs chéries .

A MON FRERE IDRISS

Tu ne le sais pas encore mais du haut de tes deux ans tes éclats de rires, tes yeux plein de vie et d'amour, la douceur de tes câlins m'ont fait raviver cette étincelle pendant les jours les plus sombres et ou la fatigue me mordait.
Merci, je t'aime mon petit frère.

Je vous souhaite de tout mon coeur un avenir radieux plein de surprises et de réussite.

A MA GRAND-MERE AMARA KARIMA

Même si la distance nous sépare, le respect, la gratitude et la tendresse que j'ai pour toi ne se mesure pas.
Je te souhaite une longue vie et je prie pour que tes douleurs s'apaise.
Je t'aime.

A LA MEMOIRE DE MA GRAND-MERE RACHDI NAWARA MON GRAND-PERE TALEB BOUZIANE A MON GRAND-PERE AMARA ABDERAHMANNE

Je vous dédie ce mémoire comme preuve
de reconnaissance de la part de votre petite fille qui a toujours prié pour le salut de vos âmes .
Puisse Dieu l'Omniscient, l'Omniprésent, l'Omnipotent vous avoir en sa sainte miséricorde.

A MA TANTE YMEN ET MON ONCLE BADRE

Pour moi vous êtes un modèle de courage, malgré vos douleurs et les batailles que vous menez pour allez mieux vous ne vous
plaignez pas. Vos souffrances sont faites de silences et prières.
Merci de croire en moi et pour cette leçon de vie.
Je prie pour que Dieu vous accorde un prompt rétablissement.

A TOUS MES PROCHES
A TOUS MES AMIS
A TOUS CEUX QUI M'AIME ET QUE J'AIME

Puisse Dieu vous accorder santé ,bonheur, longue vie et prospérité.

TALEB Nada

Remerciments

Au terme de ce travail, je tiens à remercier Dieu tout puissant pour son aide , la santé et le courage qu'il ma donné afin d'accomplir ce modeste travail.

A Monsieur Mami

Merci pour le grand honneur que vous m'avez fait d'accepter de diriger ce travail.
Votre gentillesse et votre disponibilité permanente ont été pour moi source de persévérance.
Merci pour votre patience et vos encouragements.

A Monsieur Boukhari et Monsieur Khiar

Merci Monsieur Boukhari
d'avoir aacepté de présider le jury .
Merci Monsieur Khiar
pour l'examination de mon travail et de faire partie du jury.
Vous me faites le grand honneur d'accepter de juger ce travail.
Veuillez recevoir mon plus grand respect.

A tous mes professeurs et tous les étudiants

Vous m'avez fait l'honneur de passer ces années à vos côtés.
Vous m'avez tellement appris,
veuillez recevoir toute ma gratitude .
Merci aux étudiants qui comme moi avons partagés une belle aventure,
nous avons partagés nos doutes,
nos angoisses,
nos inquiétudes
mais nous nous sommes toujours soutenues.
J'ai passé avec vous des années formidables.
Je vous remercie pour tout.
Que Dieu vous bénisse, vous accorde santé, réussite et bonheur.

Et un remerciement spécial à notre bien aimée : l'Algérie.

Table des matières

Notations

$C([a,b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$C^n([a,b],\mathbb{R})$	Espace des fonctions n fois continuement différentiables.
$\|.\|_\infty$	Norme du sup tel que $\|y\|_\infty = \underset{a\leq t\leq b}{sup}\|y(t)\|$.
$\Gamma(.)$	La fonction Gamma.
$B(.,.)$	La fonction Bêta.
$\mathcal{R}e(.)$	Partie réelle d'un nombre complexe.
$[.]$	Partie entière d'un nombre réel.
$\mathcal{I}_a^\alpha$	integrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville .
$\mathcal{D}_a^\alpha$	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville .
${}^c\mathcal{D}_a^\alpha$	Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo .

► Pour $a = 0$, on note

$$\mathcal{I}_0^\alpha f(t), \mathcal{D}_0^\alpha f(t), {}^c\mathcal{D}_0^\alpha f(t)$$

par

$$\mathcal{I}^\alpha f(t), \mathcal{D}^\alpha f(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha f(t).$$

Introduction

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la différentiation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire, réel ou complexe. Ce terme peut-être considéré comme mal approprié, car une meilleure description pourrait être *"La différenciation et l'intégration à un ordre arbitraire"*, mais alors pour quoi lui avoir attribué le nom de *"Calcul fractionnaire"* ?

A la fin du $17^{ème}$ siècle, époque à laquelle Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. Leibniz a notamment introduit le symbole :

$$\frac{d^n}{d\,t^n}f(t)$$

pour désigner la nième dérivée d'une fonction f. Quand il a rapporté cela dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu :

$$\text{«Que signifie } \frac{d^n}{d\,t^n}f(t) \text{ si } n = \frac{1}{2}\text{».}$$

Le fait que de l'Hopital ait spécifiquement demandé pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction , a en réalité donné le nom à cette partie des mathématiques. Après la question initiale qui a conduit au nom *"Calcul fractionnaire"* , la question est devenue : n peut être n'importe quel nombre : Fractionnel, irrationnel ou complexe ?, parce que la réponse était affirmative ([9]) que le calcul fractionnaire est devenu un terme peu approprié , mais est tout de même rester en usage.

Les équations différentielles fractionnaires peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie tels que l'acoustique, électrochimie, viscoélasticité, rhéologie, fractales, dynamique chaotique, physique des polymères, électromagnétique, médecine, économie, astrophysique, génie chimique, physique statistique, thermodynamique, bioingénierie, etc. Les dérivés fractionnaires fournissent un excellent instrument pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires de divers matériaux et procédés ([15]).

La théorie de stabilité pour les équations fonctionnelles a commencé avec un problème lié à la stabilité des homomorphismes de groupe qui a été soulevé par S.M. Ulam en 1940 dans une conférence donnée à l'Université du Wisconsin([16]). Le problème posé par Ulam était le suivant : Soit G_1 un groupe et soit G_2 un groupe métrique muni de la distance $d(.,.)$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, existe-t-il un $\delta > 0$ tel que si une fonction $h : G_1 \longrightarrow G_2$ satisfait l'inégalité :

$$d(h(t\,s), h(t)\,h(s)) < \delta$$

pout tous t, $s \in G_1$, alors il existe un homomorphisme $H : G_1 \longrightarrow G_2$ tel que :

$$d(h(t), H(t)) < \varepsilon, \qquad \forall t \in G_1?$$

En 1941, Hyers a répondu affirmativement à la question d'Ulam pour le cas où G_1 et G_2 sont des espaces de Banach, d'ailleurs ce fut la raison pour laquelle on appelle ce type de stabilité, stabilité d'Ulam-Hyers. Puis en 1978, le résultat de Hyers a été généralisé par Rassias.

Le concept de stabilité pour une équation fonctionnelle apparaît lorsque nous remplaçons l'équation fonctionnelle par une inégalité qui agit comme une perturbation de l'équation. Ainsi, la question de stabilité des équations fonctionnelles est de savoir comment les solutions de l'inégalité diffèrent de celles de l'équation fonctionnelle donnée ? Une attention considérable a été accordée à l'étude de stabilité d'Ulam-Hyers et d'Ulam-Hyers-Rassias de toutes sortes d'équations fonctionnelles , pour plus de détails voir [1],[3],[4],[6],[11],[14].

Ce mémoire comporte trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit les outils nécessaires à la compréhension de ce manuscrit. Puis dans le deuxième chapitre, on commence par une introduction générale à la théorie du calcul fractionnaire, ensuite on fait l'étude des problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire implicites suivants :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^{\alpha}y(t)), & t \in J := [0,T], T > 0, 0 < \alpha \leqslant 1 \\ a\,y(0) + b\,y(T) = c \end{cases}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et a,b,c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$, et

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^{\alpha}y(t)), & t \in J := [0,T], T > 0, 0 < \alpha \leqslant 1 \\ y(0) + g(y) = y_0 \end{cases}$$

où $g : C([0,T], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et y_0 une constante réelle.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à la notion de base de ce mémoire qui est la stabilité. Ainsi, dans ce chapitre on donne quatre types de stabilité d'Ulam-Hyers suivi d'une étude concernant la stabilité des problèmes précédents, chaque études contient des exemples illustratifs.

On terminera par une conclusion qui résume les principaux résultats obtenus dans ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre regroupe les outils mathématiques utilisés dans les autres chapitres, à savoir, les notions de bases, fonctions spéciales, lemme de Gronwall et enfin le fameux théorème de point fixe de Banach.

1.1 Notions de base

Dans cette partie, on donne quelques définitions essentielles dans ce mémoire.

Définition 1.1.1

On dit qu'un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est convergente dans cet espace.

Définition 1.1.2

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.

Exemple 1.1.1

L'espace des fonctions continues $C([a,b],\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Définition 1.1.3

Soient X un espace de Banach et $F : X \longrightarrow X$. On dit que $x \in X$ est un point fixe de F si :

$$F(x) = x.$$

Solution ε-Approchée

Soit l'équation différentielle

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{1.1}$$

où $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie et continue sur un domaine D de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $I = [0,T]$. Soit $y = (y_1,\dots,y_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne de y est définie par :

$$\|y\| = \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.1.4 *[12]*
On appelle solution ε-approchée de l'équation différentielle (1.1), une application $x \in C^1(I,\mathbb{R}^n)$ par morceaux et telle que :

i) Pour tout $t \in I$, (t,x(t)) appartient au domaine de définition de f.

ii) $\|x'(t) - f(t,x(t))\| \leq \varepsilon \qquad \forall t \in I$.

Exemple 1.1.2 *[12]*
Construire une solution consiste à partir d'un point avec un vecteur tangent et puis à suivre le champ de vecteurs en construisant une courbe constamment tangente à ce champ ; si, dans cette construction on tolère une "différence" de ε entre le vecteur tangent et le vecteur du champ on obtient une solution ε-approchée[1].

1.2 Fonctions spéciales

Parmi les fonctions spéciales, on peur citer : la fonction Gamma d'Euler, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler. Celles qui sont utilisées dans ce mémoire, et qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire sont les fonctions Gamma et Bêta, ainsi dans cette section, on donne les définitions et certaines propriétés les concernant.

1.2.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est considéré comme étant l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire.

Définition 1.2.1 *[10]*
La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt, \qquad Re(z) > 0$$

avec $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma(0_+) = +\infty$.

1. ou ε-solution.

Remarque 1.2.1
La fonction Gamma est définie par une intégrale impropre qui converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(z) > 0$.

Exemple 1.2.1
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, *en effet*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt.$$

On pose $u = \sqrt{t}$, *alors* $t = u^2$ *et* $dt = 2udu$, *ainsi :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du$$

sachant que $\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *(intégrale de Gauss[2]), il vient que*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Lemme 1.2.1
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(z) > 0$, *nous avons :*

1. $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n}\,n!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$.

Démonstration:

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$, nous avons :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

en effectuant une intégration par partie, nous avons :

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \left.\frac{e^{-t}\, t^z}{z}\right|_0^{+\infty} + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} t^z e^{-t}\, dt \\ &= \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} t^z e^{-t}\, dt = \frac{1}{z}\,\Gamma(z+1)\end{aligned}$$

donc,

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

2. D'après la propriété (1.) du lemme (1.2.1), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous avons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1 \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1.\Gamma(1) = 2! \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2.1.\Gamma(1) = 3! \\
&\vdots \\
\Gamma(n) &= (n-1)\,\Gamma(n-1) = (n-1).(n-2)\cdots 2.1.\Gamma(1) = (n-1)!
\end{aligned}$$

3. En utilisant la propriété (1.) du lemme (1.2.1), nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \\
&\vdots \\
&= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2^n}\right)(2n-1)(2n-3)\ldots\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\ldots 3\times 2}{2^n(2n)(2n-2)(2n-4)\ldots 2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}\,n(n-1)(n-2)\ldots 1}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n}\,n!}
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$, donc

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\,\sqrt{\pi}}{2^{2n}\,n!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

C.Q.F.D.

1.2.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est préférable d'utiliser la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma.

Définition 1.2.2 *[10]*
La fonction Bêta est donnée par :

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt, \qquad \forall (z,w) \in \mathbb{C}^2; Re(z) > 0\, et\, Re(w) > 0.$$

Proposition 1.2.1

La fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta sont liées par la relation suivante :

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

Démonstration:

Pour $Re(z), Re(w) > 0$, on a :

$$\Gamma(z)\,\Gamma(w) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{z-1}s^{w-1}e^{-(t+s)}\,dt\,ds$$

Soit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = t+s \\ t = x\,y \end{cases}$$

alors

$$0 \le x \qquad , \qquad 0 \le y \le 1$$

et

$$\frac{\partial(t,s)}{\partial(y,x)} = \begin{vmatrix} x & y \\ -x & 1-y \end{vmatrix} = x$$

ainsi

$$dt\,ds = x\,dy\,dx$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \Gamma(z)\,\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{1}(xy)^{z-1}\,(x(1-y))^{w-1}e^{-x}x\,dy\,dx \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{1} x^{z+w-1}y^{z-1}(1-y)^{w-1}e^{-x}dy\,dx \\ &= \left(\int_0^{+\infty} x^{z+w-1}e^{-x}\,dx\right)\left(\int_0^{1} y^{z-1}(1-y)^{w-1}\,dy\right) \\ &= \Gamma(z+w)\,B(z,w) \end{aligned}$$

Donc,

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

C.Q.F.D.

Remarque 1.2.2

Il est clair que :

$$B(z,w) = B(w,z).$$

Proposition 1.2.2

Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, tel que $Re(z) > 0$ et $Re(w) > 0$, nous avons :

i) $B(z,w) = \dfrac{z+w}{z} B(z+1,w) = \dfrac{z+w}{w} B(z,w+1)$

ii) $B(z,w) = B(z+1,w) + B(z,w+1)$

Démonstration:

• En utilisant la proposition (1.2.1) et la proprité (1.) du lemme (1.2.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{z+w}{z} B(z+1,w) &= \frac{z+w}{z} \frac{z\,\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{(z+w)\,\Gamma(z+w)} \\ &= B(z,w)\end{aligned}$$

et de la même manière, on trouve :

$$\frac{z+w}{w} B(z,w+1) = B(z,w)$$

• De la propriété i), on a :

$$B(z+1,w) = \frac{z}{z+w} B(z,w) \tag{1.2}$$

et

$$B(z,w+1) = \frac{w}{z+w} B(z,w) \tag{1.3}$$

en additionant (1.2) et (1.3), on trouve :

$$B(z,w) = B(z+1,w) + B(z,w+1).$$

C.Q.F.D.

Lemme 1.2.2 *[10]-[8]*

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, nous avons :

$$\Gamma(2\,z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) \tag{1.4}$$

cette formule est appelée formule de duplication de Legendre.

Démonstration:

• Nous allons d'abord démontrer la formule suivante :

$$B(z,\frac{1}{2}) = 2^{2z-1} B(z,z) \tag{1.5}$$

soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$:

$$\begin{aligned}
B(z,z) &= \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{z-1}\,dt \\
&= \int_0^1 (t(1-t))^{z-1}\,dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} (t(1-t))^{z-1}\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t(1-t))^{z-1}\,dt
\end{aligned}$$

On pose $s = 4t(1-t)$ et nous allons résoudre l'équation $-4t^2 + 4t - s = 0$.
$s \in [0,1]$ alors $\Delta = 16(1-s) \geq 0$, ainsi on a deux solutions :

$$t_1 = \frac{1-\sqrt{1-s}}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$$

et

$$t_2 = \frac{1+\sqrt{1-s}}{2} \in [\frac{1}{2}, 1]$$

de plus,

$$dt_1 = \frac{ds}{4\sqrt{1-s}} \qquad et \qquad dt_2 = \frac{-ds}{4\sqrt{1-s}}$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
B(z,z) &= \int_0^1 \left(\frac{s}{4}\right)^{z-1} \frac{1}{4\sqrt{1-s}}\,ds + \int_0^1 \left(\frac{s}{4}\right)^{z-1} \frac{1}{4\sqrt{1-s}}\,ds \\
&= 2\int_0^1 \left(\frac{s}{4}\right)^{z-1} \frac{1}{4\sqrt{1-s}}\,ds \\
&= 2\,\frac{1}{2^{2z}} \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{-\frac{1}{2}}\,ds \\
&= \frac{1}{2^{2z-1}}\,B(z, \frac{1}{2})
\end{aligned}$$

donc,

$$B(z, \frac{1}{2}) = 2^{2z-1}\,B(z,z).$$

• D'après (1.5) et en utilisant la proposition (1.2.1), on a :

$$\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = 2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}$$

Finalement,

$$\Gamma(2\,z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}).$$

C.Q.F.D.

1.3 Lemme de Gronwall

Dans cette section, on présente une généralisation du lemme de Gronwall . Ce lemme nous sera d'une aide précieuse dans l'étude de stabilité .

Lemme 1.3.1 *[17]*
Soient $v : [0,T] \longrightarrow [0,\infty)$ *une fonction réelle et* $w(.)$ *une fonction non négative, localement intégrable sur* $[0,T]$. *Supposons qu'il existe des constantes* $a > 0$ *et* $0 < \alpha \leq 1$ *telles que :*

$$v(t) \ \leq \ w(t) + a \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\, v(s)\, ds.$$

Alors, il existe une constante $K = K(\alpha)$ *telle que :*

$$v(t) \ \leq \ w(t) + K\, a \int_0^t (t-s)^{-\alpha}\, w(s)\, ds\,, \qquad \forall t \in [0,T].$$

1.4 Théorème de point fixe de Banach

Le théorème de point fixe de Banach, ou théorème de contraction de Banach, a une grande importance dans ce mémoire, il est utilisé pour démonter l'éxistence et l'unicité de solution d'un problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire implicites sous certaines conditions, mais il est aussi primordial dans la notion de stabilité qu'on présentera dans le dernier chapitre.

Théorème 1.4.1 *[7](**Contraction de Banach**)*
Soient X *un espace de Banach et* $F : X \longrightarrow X$ *une contraction, c'est-à-dire, il existe* $0 \leq k < 1$ *tel que :*

$$\forall x, y \in X : \|F(x) - F(y)\|_X \leq k\, \|x-y\|_X,$$

alors F *a un unique point fixe.*

Chapitre 2

Calcul Fractionnaire et Applications

Ce chapitre est composé de trois sections, la première section contient une introdution générale à la théorie du calcul fractionnaire, quant aux deux dernières sections, elles sont consacrées à l'étude d'un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire implicite sous certaines conditions.

2.1 Intégrale et dérivées d'ordre fractionnaire

Dans cette section, on présente l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les deux définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires, à savoir, les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo, tout en donnant des propriétés, exemples et résultats les plus importants les concernant (pour une étude plus appronfondi voir [5],[8],[10],[13]) .

2.1.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.1.1 *[8]*
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on appelle intégrale d'ordre α au sens de Riemenn-Liouville de f l'intégrale suivante :

$$\mathcal{I}_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds \qquad t > a;\ Re(\alpha) > 0.$$

Exemple 2.1.1
On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = (t-a)^\beta \qquad\qquad t \in [a, b],\ \beta \in \mathbb{R},\ (\beta > -1).$$

On a :

$$\mathcal{I}_a^\alpha f(t) = \mathcal{I}_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta\, ds.$$

Soit le changement de variable suivant :

$$s = t - r(t-a) \Longrightarrow ds = -(t-a)\, dr$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^0 [r(t-a)]^{\alpha-1}[t-a-r(t-a)]^{\beta}(t-a)\, dr \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha+\beta}\, r^{\alpha-1}\, (1-r)^{\beta}\, dr \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 r^{\alpha-1}\, (1-r)^{\beta}\, dr \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1)
\end{aligned}$$

en utilisant la proposition (1.2.1), on obtient :

$$\mathcal{I}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\, (t-a)^{\alpha+\beta}. \tag{2.1}$$

♦ *Si* $\alpha = 1$*, alors :*

$$\mathcal{I}_a^{1}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}\, (t-a)^{\beta+1}$$

d'après la propriété (1.) du lemme (1.2.1), on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_a^{1}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)}\, (t-a)^{\beta+1} \\
&= \frac{(t-a)^{\beta+1}}{\beta+1}.
\end{aligned}$$

Proposition 2.1.1 *[8]*
Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$*, pour* α *et* β *des nombres complexes tels que* $Re(\alpha) > 0$ *et* $Re(\beta) > 0$*, on a :*

$$\mathcal{I}_a^{\alpha}(\mathcal{I}_a^{\beta} f) = \mathcal{I}_a^{\alpha+\beta} f$$

cette propriété est appelée propriété du semi groupe.

Démonstration:
Pour tous α, $\beta \in \mathbb{C}$; $Re(\alpha) > 0$ *et* $Re(\beta) > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_a^{\alpha}(\mathcal{I}_a^{\beta} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}\, \mathcal{I}_a^{\beta} f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s-r)^{\beta-1} f(r)\, dr \right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^s (t-s)^{\alpha-1}(s-r)^{\beta-1} f(r)\, dr\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_r^t (t-s)^{\alpha-1}(s-r)^{\beta-1} f(r)\, ds\, dr
\end{aligned}$$

$$\mathcal{I}_a^\alpha(\mathcal{I}_a^\beta f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^t f(r) \underbrace{\int_r^t (t-s)^{\alpha-1}(s-r)^{\beta-1}\,ds}_{I}\,dr \tag{2.2}$$

Par le changement de variable $s = r + (t-r)\tau$, on a $ds = (t-r)d\tau$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (t-r)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}[(t-r)\tau]^{\beta-1}(t-r)\,d\tau \\ &= (t-r)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 \tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau \\ &= (t-r)^{\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha) \\ &= (t-r)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

en remplaçant (2.3) dans (2.2), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a^\alpha(\mathcal{I}_a^\beta f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-r)^{\alpha+\beta-1}f(r)\,dr \\ &= (\mathcal{I}_a^{\alpha+\beta}f)(t). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Proposition 2.1.2
Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, pour $Re(\alpha) > 1$, on a :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{I}_a^\alpha f = \mathcal{I}_a^{\alpha-1}f.$$

Démonstration:
On obtient le résultat par dérivation classique d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

2.1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.1.2 *[8]*
On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemenn-Liouville de la fonction f, la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\mathcal{I}_a^{n-\alpha}f\right)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)\,ds \end{aligned}$$

avec $Re(\alpha) \geq 0$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$.
► *Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\mathcal{D}_a^n f(t) = f^{(n)}(t).$$

En particulier, $\mathcal{D}_a^0 f(t) = f(t)$.

Exemple 2.1.2

Soit la fonction

$$f(t) = (t-a)^{\beta}, \qquad t \in [a,b],\ \beta \in \mathbb{R},\ (\beta > -1).$$

On a :

$$\mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[\mathcal{I}_a^{n-\alpha}(t-a)^{\beta}\right]$$

en utilisant (2.1), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(t-a)^{n+\beta-\alpha}\right]\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n+\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

Or, on sait que :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\lambda} = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)(t-a)^{\lambda-n} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-n)}(t-a)^{\lambda-n} \tag{2.4}$$

ainsi,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n+\beta-\alpha} = \frac{\Gamma(n+\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}$$

il s'ensuit que :

$$\mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \tag{2.5}$$

♦ *Si $\alpha = 1$, alors :*

$$\mathcal{D}_a^{1}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1}$$

et par la propriété (1.) du lemme (1.2.1), on trouve :

$$\mathcal{D}_a^{1}(t-a)^{\beta} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}(t-a)^{\beta}.$$

Remarque 2.1.1

Si on pose $\beta = 0$ dans (2.5), on obtient :

$$\mathcal{D}_a^{\alpha}1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Ce qui montre que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

Propriétés 2.1.1 *[8]*

Soit f une fonction continue, pour $Re(\alpha) > Re(\beta) > 0$, on a :

$$(\mathcal{D}_a^{\beta}\mathcal{I}_a^{\alpha}f)(t) = \mathcal{I}_a^{\alpha-\beta}f(t).$$

En particulier, pour $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $Re(\alpha) > k$, on a :

$$(\mathcal{D}_a^{k}\mathcal{I}_a^{\alpha}f)(t) = \mathcal{I}_a^{\alpha-k}f(t).$$

Lemme 2.1.1

Soient $Re(\alpha) > 0$, $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Supposons que $\mathcal{D}_a^\alpha f(t) = 0$, alors

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (t-a)^{k+\alpha-n},$$

où les C_k, $k = 0, \ldots, n-1$, sont des constantes réelles.

Démonstration:

Soit $t \in [a,b]$, on a :

$$(\mathcal{D}_a^\alpha f)(t) = 0 \Longrightarrow \left(\frac{d}{dt}\right)^n (\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f)(t) = 0$$
$$\Longrightarrow (\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k (t-a)^k$$

En appliquant l'oppérateur $\mathcal{I}_a^\alpha$ et en utilisant la proposition (2.1.1) ainsi que la formule (2.1), on obtient :

$$(\mathcal{I}_a^n f)(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} (t-a)^{k+\alpha}$$

puis par dérivation classique et à l'aide de la formule (2.4), on trouve :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1-n)} (t-a)^{k+\alpha-n}.$$

C.Q.F.D.

Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Lemme 2.1.2 *[8]*

Soient $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ et $Re(\alpha) > 0$, alors :

$$(\mathcal{D}_a^\alpha \mathcal{I}_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Lemme 2.1.3 *[8]*

Soient $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ et $(\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f) \in C^n([a,b], \mathbb{R})$, alors :

$$(\mathcal{I}_a^\alpha \mathcal{D}_a^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f)(a)\,(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \qquad \forall t \in [a,b]$$

avec $Re(\alpha) > 0$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$.

On en déduit que l'opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire $\mathcal{I}_a^\alpha$ du même ordre, mais il n'est pas un inverse droit.

2.1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Les problèmes appliqués requièrent une définition des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement interprétables. Malheureusement, la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann- Liouville ne satisfait pas cette demande, ce qui a engendré une définition alternative qui répond à ce besoin. C'est Caputo qui a proposé cette nouvelle définition de dérivée fractionnaire, qui d'ailleurs porte son nom.

Définition 2.1.3 *[8]*
Soit la fonction $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$. La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f est définie par :

$$\begin{aligned}({}^c\mathcal{D}_a^{\alpha} f)(t) &= (\mathcal{I}_a^{n-\alpha} f^{(n)})(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds\end{aligned}$$

avec $Re(\alpha) \geq 0$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$.
► *Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$ on a :*

$${}^c\mathcal{D}_a^n f(t) = f^{(n)}(t).$$

En particulier, ${}^c\mathcal{D}_a^0 f(t) = f(t)$.

Remarque 2.1.2
On obtient la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α , $(n-1 < Re(\alpha) < n)$, en appliquant l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $(n-\alpha)$ suivi d'une dérivation classique d'ordre n, c'est-à-dire $\left(\frac{d}{dt}\right)^n \mathcal{I}_a^{n-\alpha}$, alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo s'obtient par la permutation de ces deux opérations, c'est-à-dire $\mathcal{I}_a^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt}\right)^n$.

Exemple 2.1.3
Calculons la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction suivante :

$$f(t) = (t-a)^{\beta}, \qquad \beta > n-1.$$

On a :

$$\begin{aligned}{}^c\mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \mathcal{I}_a^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{ds}\right)^n (s-a)^{\beta}\, ds. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

D'après (2.4), on a :

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^n (s-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}(s-a)^{\beta-n}. \qquad (2.7)$$

Par substitution de (2.7) dans (2.6), on obtient :

$$ {}^{c}\mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(\beta+1-n)} \underbrace{\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(s-a)^{\beta-n}\,ds}_{I} \tag{2.8}$$

soit le changement de variable suivant :

$$s = t - \tau(t-a) \Longrightarrow ds = -(t-a)\,d\tau$$

ainsi,

$$\begin{aligned} I &= -\int_1^0 [\tau(t-a)]^{n-\alpha-1}[(t-a)(1-\tau)]^{\beta-n}(t-a)\,d\tau \\ &= (t-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 \tau^{n-\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-n}\,d\tau \end{aligned}$$

en utilisant successivement la définition (1.2.2) et la proposition (1.2.1), on trouve :

$$I = (t-a)^{\beta-\alpha}\,\frac{\Gamma(n-\alpha)\,\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \tag{2.9}$$

en substituant (2.9) dans (2.8), on obtient :

$$ {}^{c}\mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\,(t-a)^{\beta-\alpha}.$$

♦ *Si la fonction f est constante sur $[a,b]$ $(f(t)=C)$, alors :*

$$ {}^{c}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(t) = 0.$$

Remarque 2.1.3 *[5]*
Pour $\beta \geq 0$, on a

$$ {}^{c}\mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \begin{cases} \mathcal{D}_a^{\alpha}(t-a)^{\beta} & si\,\beta \notin \mathbb{N},\ \beta > n-1\,ou\,\beta \in \mathbb{N},\ \beta \geq n\,, \\ 0 & si\,\beta \in \{0,1,\ldots,n-1\}. \end{cases}$$

Lemme 2.1.4
Soit $Re(\alpha) > 0$, alors l'équation différentielle d'ordre fractionnaire ${}^{c}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(t) = 0$ admet une solution qui est donnée par :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k (t-a)^k$$

où les C_k, $k = 0,\ldots,n-1$, sont des constantes réelles.

Démonstration:

$$\begin{aligned} {}^{c}\mathcal{D}_a^{\alpha} f(t) = 0 &\Longrightarrow \mathcal{I}_a^{n-\alpha}[f^{(n)}(t)] = 0 \\ &\Longrightarrow f^{(n)}(t) = 0 \\ &\Longrightarrow f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k (t-a)^k \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Lemme 2.1.5 *[8]*
Soient $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ *et* $Re(\alpha) > 0$, *alors :*

$$({}^c\mathcal{D}_a^\alpha \mathcal{I}_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Lemme 2.1.6 *[8]*
Soient $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, $Re(\alpha) > 0$ *et* $n = [Re(\alpha)] + 1$, *alors :*

$$(\mathcal{I}_a^\alpha {}^c\mathcal{D}_a^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}.$$

► *En particulier, pour* $0 < Re(\alpha) \leq 1$, *on a :*

$$(\mathcal{I}_a^\alpha {}^c\mathcal{D}_a^\alpha f)(t) = f(t) - f(a). \tag{2.10}$$

Par conséquent, l'opérateur de dérivation fractionnaire de Caputo est aussi un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire $\mathcal{I}_a^\alpha$ du même ordre, mais il n'est pas un inverse droit.

Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

[8] Supposons que f soit une fonction tel que ${}^c\mathcal{D}_a^\alpha$ et $\mathcal{D}_a^\alpha$ existent, alors :

$${}^c\mathcal{D}_a^\alpha f(t) = \mathcal{D}_a^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)\,(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

avec $Re(\alpha) \geq 0$ et $n = [Re(\alpha)] + 1$.
En particulier, pour $0 < Re(\alpha) < 1$ on a :

$${}^c\mathcal{D}_a^\alpha f(t) = \mathcal{D}_a^\alpha f(t) - \frac{f(a)\,(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Remarque 2.1.4
Si $f^{(k)}(a) = 0$ *pour* $k = 0, \dots, n-1$, *alors :*

$${}^c\mathcal{D}_a^\alpha f(t) = \mathcal{D}_a^\alpha f(t).$$

2.1.4 Propriétés des dérivées fractionnaires

Linéarité

[10] De manière similaire à la différentiation d'ordre entier , la différentiation fractionnaire est une opération linéaire :

$$D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t)$$

où D^α désigne n'importe quelle approche de dérivation fractionnaire considérée dans ce mémoire. Par exemple, pour la dérivée fractionnaire de Riemenn-Liouvile, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a^\alpha(\lambda f(t)+\mu g(t)) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}(\lambda f(s)+\mu g(s))\,ds \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\,ds \\
&+ \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} g(s)\,ds \\
&= \lambda \mathcal{D}_a^\alpha f(t) + \mu \mathcal{D}_a^\alpha g(t).
\end{aligned}$$

De même pour la dérivée fractionnaire de Caputo, la linéarité découle de sa définition.

Commutativité

[10] Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n-1<\alpha<n$, alors :

$$\mathcal{D}^m(\mathcal{D}^\alpha f(t)) = \mathcal{D}^\alpha(\mathcal{D}^m f(t)) = \mathcal{D}^{\alpha+m} f(t)$$

si $f^{(k)}(0)=0$, pour $k=0,\ldots,m$, et

$${}^c\mathcal{D}^m({}^c\mathcal{D}^\alpha f(t)) = {}^c\mathcal{D}^\alpha({}^c\mathcal{D}^m f(t)) = {}^c\mathcal{D}^{\alpha+m} f(t)$$

si $f^{(k)}(0)=0$, pour $k=n,\ldots,m$.

On voit que dans le cas de la dérivée de Caputo, contrairement à celle de Riemann-Liouville , il n'y a pas de restrictions sur les valeurs $f^{(k)}(0)$, pour $k=0,\ldots,n-1$.

Remarque 2.1.5
En général,

$$\mathcal{D}_a^{\alpha_1}\mathcal{D}_a^{\alpha_2} \neq \mathcal{D}_a^{\alpha_1+\alpha_2} \neq \mathcal{D}_a^{\alpha_2}\mathcal{D}_a^{\alpha_1}.$$

♦ Voici deux exemples illustratifs :

Exemple 2.1.4
Soient $f(t)=t^{-\frac{1}{2}}$ *et* $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{1}{2}$, *on a*

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\, s^{-\frac{1}{2}}\,ds\right)$$

soit le changement de variable suivant :

$$\tau = \frac{s}{t} \Longrightarrow d\tau = \frac{ds}{t}$$

alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} &= \frac{d}{d\,t}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 (t-t\,\tau)^{-\frac{1}{2}}\,(\tau\,t)^{-\frac{1}{2}}\,t\,d\tau\right)\\
&= \frac{d}{d\,t}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}}\,d\tau\right)\\
&= \frac{d}{d\,t}\left(\frac{B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\\
&= \frac{d}{d\,t}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma(1)}\right) = \frac{d}{d\,t}\sqrt{\pi}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

ainsi,

- $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\,t^{-\frac{1}{2}} = 0$
- $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\,t^{-\frac{1}{2}} = 0$
- $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\,t^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{D}^{1}\,t^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-t^{-\frac{3}{2}}}{2}$

finalement,

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}} \neq \mathcal{D}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}.$$

Exemple 2.1.5
Soient $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$, $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}$, *et* $\alpha_2 = \dfrac{3}{2}$.
En utilisant la formule (2.5) et la propriété (3.) du lemme (1.2.1), on trouve :

- $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\,t^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$
- $\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\,t^{\frac{1}{2}} = 0$
- $\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\,t^{\frac{1}{2}} = 0$
- $\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\,t^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

en appliquant la définition (2.1.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\right)^2\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\,ds\\
&= \frac{-t^{-\frac{3}{2}}}{4}
\end{aligned}$$

de plus,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\,t^{\frac{1}{2}} &= \mathcal{D}^{2}\,t^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^2 t^{\frac{1}{2}} = \frac{-t^{-\frac{3}{2}}}{4}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\,t^{\frac{1}{2}} \neq \mathcal{D}^{\frac{3}{2}}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}\,t^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\,t^{\frac{1}{2}}.$$

2.2 Résolution d'un problème aux limites

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution d'un problème aux limites d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire implicite :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t)), & t \in J := [0,T], T > 0, 0 < \alpha \leqslant 1 \\ a\,y(0) + b\,y(T) = c \end{cases} \tag{2.11}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et a,b,c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

Commençons tout d'abord par définir ce que nous entendons par solution du problème (2.11).

Définition 2.2.1
Une fonction $y \in C^1(J,\mathbb{R})$ est dite solution du problème (2.11) si y satisfait l'équation :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t)), \qquad t \in J$$

et la condition :

$$a\,y(0) + b\,y(T) = c.$$

2.2.1 Lemmes auxiliaires

Pour l'existence de solutions du problème (2.11), on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.2.1
Soient $0 < \alpha \leqslant 1$ et $h : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors le problème linéaire :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = h(t), \qquad \forall t \in J \tag{2.12}$$

$$a\,y(0) + b\,y(T) = c \tag{2.13}$$

a une unique solution qui est donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, h(s)\, ds \\ &- \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\, h(s)\, ds - c\right]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Démonstration:

En appliquant l'opérateur $\mathcal{I}^\alpha$ au deux membres de l'égalité (2.12) et en utilisant la formule (2.10) du lemme (2.1.6), on obtient :

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, h(s)\, ds \\
&= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, h(s)\, ds \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

pour $t = T$, on a :

$$
y(T) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\, h(s)\, ds
$$

On utilise la condition (2.13) pour calculer la constante y_0, on trouve :

$$
y_0 = \frac{-1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\, h(s)\, ds - c \right].
$$

En remplaçant y_0 par sa valeur dans l'équation (2.15), on obtient la solution du problème (2.12)-(2.13) :

$$
y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, h(s)\, ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\, h(s)\, ds - c \right].
$$

C.Q.F.D.

Lemme 2.2.2

Soit $f(t,u,v) : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors le problème (2.11) est équivalent au problème :

$$
y(t) = A + \mathcal{I}^{\alpha} g(t) \qquad (2.16)
$$

où $g \in C(J, \mathbb{R})$ satisfait l'équation fonctionnelle :

$$
g(t) = f(t, A + \mathcal{I}^{\alpha} g(t), g(t))
$$

et

$$
A = \frac{1}{a+b} \left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s)\, ds \right].
$$

Démonstration:

Soit y la solution du problème (2.16), montrons que y est aussi une solution du problème (2.11). On a :

$$
y(t) = A + \mathcal{I}^{\alpha} g(t).
$$

Ainsi,

$$
y(0) = A
$$

et

$$
y(T) = A + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\, g(s)\, ds.
$$

Alors,

$$\begin{aligned} a\,y(0) + b\,y(T) &= \frac{-a\,b}{(a+b)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds + \frac{a\,c}{a+b} - \frac{b^2}{(a+b)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds \\ &+ \frac{b\,c}{a+b} + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g(s)\,ds \\ &= c \end{aligned}$$

donc,

$$a\,y(0) + b\,y(T) = c.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) &= {}^c\mathcal{D}^\alpha (A + \mathcal{I}^\alpha g(t)) \\ &= g(t) \\ &= f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t)). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

2.2.2 Unicité de la solution

Le théorème suivant nous donne l'unicité de la solution du problème (2.11), et cela en utilisant le théorème de contraction de Banach.

Théorème 2.2.1

Supposons que :

► *($\mathcal{H}_1$) il existe deux constantes $K > 0$ et $0 < L < 1$ telles que :*

$$|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| \leqslant K\,|u-\overline{u}| + \,L\,|v-\overline{v}| \qquad \forall\, t \in J \quad et \quad \forall\, u, \overline{u}, v, \overline{v} \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{K\,T^\alpha}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) < 1 \tag{2.17}$$

le problème (2.11) a une unique solution.

Démonstration:

Nous allons transformer le problème (2.11) en un problème de point fixe.

Considérons l'opérateur

$$N\,: C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C(J,\mathbb{R})$$

défini par :

$$Ny(t) = A_y + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_y(s)\,ds$$

où

$$g_y(t) = f(t, A_y + \mathcal{I}^\alpha g_y(t), g_y(t))$$

et

$$A_y = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g_y(s)\, ds\right].$$

Par les lemmes (2.2.1) et (2.2.2), il est clair que les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème (2.11).

L'opérateur N est bien défini. En effet, si $y \in C(J,\mathbb{R})$ alors $(Ny) \in C(J,\mathbb{R})$.

Pour montrer que N admet un point fixe, il suffit de montrer que N est un opérateur contractant.

Soient $x, y \in C(J,\mathbb{R})$, et $t \in J$, alors on a :

$$\begin{aligned} |Ny(t) - Nx(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|g_y(s) - g_x(s)|\, ds \\ &\quad + \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|g_y(s) - g_x(s)|\, ds \end{aligned} \tag{2.18}$$

et,

$$\begin{aligned} |g_y(t) - g_x(t)| &= |f(t, y(t), g_y(t)) - f(t, x(t), g_x(t))| \\ &\leq K\,|y(t) - x(t)| + L|g_y(t) - g_x(t)| \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|g_y(t) - g_x(t)| \leq \frac{K}{1-L}|y(t) - x(t)|. \tag{2.19}$$

En remplaçant (2.19) dans l'inégalité (2.18), on obtient :

$$\begin{aligned} |Ny(t) - Nx(t)| &\leq \frac{K}{(1-L)\,\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|y(s) - x(s)|\, ds \\ &\quad + \frac{|b|\,K}{(1-L)\,|a+b|\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|y(s) - x(s)|\, ds \\ &\leq \frac{K\,T^\alpha}{(1-L)\,\Gamma(\alpha+1)}\|y-x\|_\infty + \frac{|b|\,K\,T^\alpha}{(1-L)\,|a+b|\,\Gamma(\alpha+1)}\|y-x\|_\infty \end{aligned}$$

Donc,

$$\|Ny - Nx\|_\infty \leq \left[\frac{K\,T^\alpha}{(1-L)\,\Gamma(\alpha+1)}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)\right]\|y-x\|_\infty$$

D'après (2.17), N est un opérateur contractant, et par le théorème de point fixe de Banach (1.4.1), N admet un unique point fixe, ainsi le problème (2.11) a une unique solution.

C.Q.F.D.

2.3 Résolution d'un problème aux limites avec des conditions non locales

On s'intéresse une fois de plus à la résolution d'un problème aux limites d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire implicite, mais cette fois-ci, avec des conditions non locales.
Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t)), & t \in J := [0,T], T > 0, 0 < \alpha \leqslant 1 \\ y(0) + g(y) = y_0 \end{cases} \tag{2.20}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : C(J, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, et y_0 une constante réelle.
A titre d'exemple, voici une expression de $g(y)$:

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, y(t_i)$$

où $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$ et $C_i, i = 1, \ldots, n$ sont des constantes.
Commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (2.20).

Définition 2.3.1
Une fonction $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ est dite solution du problème (2.20) si y satisfait l'équation :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t)), \qquad t \in J$$

et la condition :

$$y(0) + g(y) = y_0.$$

2.3.1 Lemmes auxiliaires

les lemmes ci-dessous nous seront utiles pour l'existence de solutions du problème (2.20).

Lemme 2.3.1 *[2]*
Soient $0 < \alpha \leq 1$ et $h : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors le problème lineaire :

$${}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = h(t), \qquad \forall t \in J \tag{2.21}$$

$$y(0) + g(y) = y_0 \tag{2.22}$$

admet une unique solution qui est donnée par :

$$y(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds.$$

Lemme 2.3.2 *[2]*
Soit $f : J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, alors le problème (2.20) est équivalent au problème :*

$$y(t) = y_0 - g(y) + \mathcal{I}^\alpha P_y(t)$$

où

$$P_y(t) = f(t, y(t), P_y(t)).$$

2.3.2 Unicité de la solution

Par le principe de contraction de Banach, le théorème suivant nous donne l'unicité de la solution du problème (2.20) :

Théorème 2.3.1
Supposons que :

- $(\mathcal{H}'_1)$ *il existe trois constantes* $K > 0$, $0 < \overline{K} < 1$ *et* $0 < L < 1$ *telles que :*

$$|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| \leqslant K\,|u-\overline{u}| + \overline{K}\,|v-\overline{v}| \qquad \forall\, t \in J \quad et \quad \forall\, u,\overline{u},v,\overline{v} \in \mathbb{R}.$$

et

$$|g(y) - g(\overline{y})| \leq L\,\|y-\overline{y}\|_\infty \qquad \forall\, y,\overline{y} \in C(J,\mathbb{R}).$$

Si de plus on a

$$L + \frac{K\,T^\alpha}{(1-\overline{K})\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{2.23}$$

alors, le problème (2.20) a une unique solution.

Démonstration:
Nous allons transformer le problème (2.20) en un problème de point fixe.
Considérons l'opérateur

$$F\ : C(J,\mathbb{R}) \longrightarrow C(J,\mathbb{R})$$

défini par :

$$Fy(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} P_y(s)\,ds$$

où

$$P_y(t) = f(t, y_0 - g(y) + \mathcal{I}^\alpha P_y(t), P_y(t)).$$

Par les lemmes (2.3.1) et (2.3.2), il est clair que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (2.20).
Si $y \in C(J,\mathbb{R})$ alors $(Fy) \in C(J,\mathbb{R})$ et donc l'opérateur F est bien défini.

Nous allons montrer que F admet un unique point fixe, et pour cela, il suffit de montrer que F est une contraction.
Soient $x, y \in C(J,\mathbb{R})$, et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}|Fy(t) - Fx(t)| &\leq |g(y) - g(x)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |P_y(s) - P_x(s)|\, ds \\ &\leq L\,|y(t) - x(t)| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |P_y(s) - P_x(s)|\, ds. \qquad (2.24)\end{aligned}$$

D'autre part, on a pour tout $t \in J$:

$$\begin{aligned}|P_y(t) - P_x(t)| &= |f(t, y(t), P_y(t)) - f(t, x(t), P_x(t))| \\ &\leq K\,|y(t) - x(t)| + \overline{K}\,|P_y(t) - P_x(t)|.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|P_y(t) - P_x(t)| \leq \frac{K}{1-\overline{K}} |y(t) - x(t)|. \qquad (2.25)$$

En remplaçant (2.25) dans l'inégalité(2.24), on obtient :

$$\begin{aligned}|Fy(t) - Fx(t)| &\leq L\,|y(t) - x(t)| + \frac{K}{(1-\overline{K})\,\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y(s) - x(s)|\, ds \\ &\leq \left[L + \frac{K\,T^{\alpha}}{(1-\overline{K})\,\Gamma(\alpha+1)}\right] \|y - x\|_{\infty}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\|Fy - Fx\|_{\infty} \leq \left[L + \frac{K\,T^{\alpha}}{(1-\overline{K})\,\Gamma(\alpha+1)}\right] \|y - x\|_{\infty}.$$

D'après (2.23), F est une contraction , et par le théorème de point fixe de Banach (1.4.1), F admet un unique point fixe qui est la solution du problème (2.20).

C.Q.F.D.

Chapitre 3

Stabilité des équations différentielles d'ordre fractionnaire implicites

Les propriétés de stabilité de toutes sortes d'équations ont attiré l'attention de nombreux mathématiciens. Dans ce chapitre, on introduit la notion de stabilité d'Ulam-Hyers de deux problèmes aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire implicite suivante :

$$^{c}\mathcal{D}^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), {}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}y(t)), \qquad t \in J := [0,T], T > 0, 0 < \alpha \leqslant 1 \tag{3.1}$$

où $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

3.1 Types de stabilité

Le concept de stabilité d'Ulam-Hyers est assez important dans les problèmes réalistes en analyse numérique, en biologie et en économie. Dans cette section, on présente les différent types de stabilité d'Ulam-Hyers concernant l'équation (3.1).

3.1.1 Stabilité au sens de Ulam-Hyers

Définition 3.1.1 *[2]*
L'équation (3.1) est stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel $c_f > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ de l'inégalité :

$$|{}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}x(t) - f(t, x(t), {}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}x(t))| \leq \varepsilon\,, \qquad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ de l'équation (3.1) avec :

$$|x(t) - y(t)| \leq c_f\,\varepsilon\,, \qquad t \in J.$$

3.1.2 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée

Définition 3.1.2 *[2]*
L'équation (3.1) est stable au sens de Ulam-Hyers généralisée s'il existe une fonction $\psi_f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$*,* $\psi_f(0) = 0$*, tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour chaque solution* $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité :*

$$|{}^c\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varepsilon\,, \qquad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'équation (3.1) avec :*

$$|x(t) - y(t)| \leq \psi_f(\varepsilon)\,, \qquad t \in J.$$

3.1.3 Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias

Définition 3.1.3 *[2]*
L'équation (3.1) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias par rapport à $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *s'il existe un nombre réel* $c_f > 0$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour chaque solution* $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité :*

$$|{}^c\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varepsilon\,\varphi(t)\,, \qquad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'équation (3.1) avec :*

$$|x(t) - y(t)| \leq c_f\,\varepsilon\,\varphi(t)\,, \qquad t \in J.$$

3.1.4 Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée

Définition 3.1.4 *[2]*
L'équation (3.1) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée par rapport à $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *s'il existe un nombre réel* $c_{f,\varphi} > 0$ *tel que pour chaque solution* $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité :*

$$|{}^c\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varphi(t)\,, \qquad t \in J,$$

il existe une solution $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ *de l'équation (3.1) avec :*

$$|x(t) - y(t)| \leq c_{f,\varphi}\,\varphi(t)\,, \qquad t \in J.$$

Remarque 3.1.1
Une fonction $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ *est dite solution de l'inégalité :*

$$|{}^c\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varepsilon\,, \qquad t \in J,$$

si et seulement s'il existe une fonction $g \in C(J, \mathbb{R})$*(qui dépend de la solution y) tel que :*

i) $|g(t)| \leqslant \varepsilon\,, \qquad \forall t \in J$

ii) ${}^c\mathcal{D}^\alpha x(t) = f(t, x(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha x(t)) + g(t)\,, \qquad t \in J.$

Remarque 3.1.2

Une solution de l'inégalité fractionnaire implicite :

$$|{}^c\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varepsilon\,, \qquad t \in J,$$

est appelé ε*-solution de l'équation fractionnaire implicite (3.1).*

3.2 Etude de la stabilité

Cette section est consacrée à l'étude de stabilité au sens de Ulam-Hyers de deux problèmes aux limites pour une équation différentielle fractionnaire implicite sous certaines conditions.

3.2.1 Stabilité d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions aux limites

Nous allons étudier la stabilité du premier problème vu dans le deuxième chapitre :

$$ {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t)), \qquad t \in J, 0 < \alpha \leqslant 1 \tag{3.2}$$

$$ a\, y(0) + b\, y(T) = c \tag{3.3}$$

avec a,b,c des constantes réelles telles que $a + b \neq 0$.

Trois exemples sont inclus pour montrer l'applicabilité des résultats.

Théorème 3.2.1

Supposons que $(\mathcal{H}_1)$ *et (2.17) sont satisfaites, alors le problème (3.2)-(3.3) est stable au sens de Ulam- Hyers.*

Démonstration:

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ une fonction qui satisfait l'inégalité :

$$|{}^c\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varepsilon, \qquad \forall\, t \in J \tag{3.4}$$

et soit $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ la solution du problème (3.2)-(3.3) ainsi que l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t)) \qquad t \in J, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) = x(0) \\ y(T) = x(T) \end{cases}$$

en utilisant les lemmes (2.2.1)-(2.2.2), on obtient :

$$y(t) = A_y + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_y(s)\, ds.$$

D'autre part, si $y(0) = x(0)$ et $y(T) = x(T)$ alors $A_y = A_x$.
En effet,

$$\begin{aligned} |A_y - A_x| &= \left| \frac{b}{(a+b)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\ (g_x(s) - g_y(s))\ ds \right| \\ &\leq \frac{|b|}{|a+b|\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |g_y(s) - g_x(s)|\, ds \end{aligned}$$

et on a par l'inégalité (2.19) :

$$\begin{aligned} |A_y - A_x| &\leq \frac{|b|\,K}{(1-L)\,|a+b|\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |y(s) - x(s)|\, ds \\ &= \frac{|b|\,K}{(1-L)\,|a+b|} \quad \mathcal{I}^\alpha |y(T) - x(T)| = 0 \end{aligned}$$

alors,

$$A_y = A_x$$

ainsi,

$$y(t) = A_x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_y(s)\, ds.$$

Par intégration de l'inégalité (3.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \left| x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_x(s)\, ds \right| &\leq \frac{\varepsilon\, t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\leq \frac{\varepsilon\, T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

avec

$$g_x(t) = f(t, A_x + \mathcal{I}^\alpha g_x(t), g_x(t))$$

alors pour tout $t \in J$:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= \left| x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_x(s)\, ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (g_x(s) - g_y(s))\, ds \right| \\ &\leq \left| x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_x(s)\, ds \right| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |g_x(s) - g_y(s)|\, ds \end{aligned}$$

en utilisant (2.19), on trouve :

$$|x(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon\, T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{K}{(1-L)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x(s) - y(s)|\, ds$$

et en appliquant le lemme de Gronwall (1.3.1), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \frac{\varepsilon\, T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\gamma\, K}{(1-L)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{\varepsilon\, T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\, ds \\ &\leq \frac{\varepsilon\, T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left[1 + \frac{\gamma\, K\, T^{\alpha}}{(1-L)\,\Gamma(\alpha+1)} \right] := c\,\varepsilon \end{aligned}$$

où $\gamma = \gamma(\alpha)$ une constante.

C.Q.F.D.

Remarque 3.2.1

Si on pose $\psi(\varepsilon) = c\,\varepsilon$ alors $\psi(0) = 0$, et donc le problème (3.2)-(3.3) devient stable au sens de Ulam-Hyers généralisé.

Théorème 3.2.2

Supposons que $(\mathcal{H}_1)$, (2.17) et :

► *$(\mathcal{H}_2)$ il existe une fonction croissante $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ et il existe $\lambda_{\varphi} > 0$ telles que :*

$$\mathcal{I}^{\alpha} \varphi(t) \leqslant \lambda_{\varphi}\, \varphi(t), \qquad \forall\, t \in J$$

sont satisfaites, alors le problème (3.2)-(3.3) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias.

Démonstration:

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ la solution de l'inégalité suivante :

$$|{}^{c}\mathcal{D}^{\alpha} x(t) - f(t, x(t), {}^{c}\mathcal{D}^{\alpha} x(t))| \leq \varepsilon\, \varphi(t), \qquad \forall\, t \in J \tag{3.5}$$

et soit $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ la solution du problème (3.2)-(3.3) ainsi que l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}\mathcal{D}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t), {}^{c}\mathcal{D}^{\alpha} y(t)) & t \in J, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ y(0) = x(0) \\ y(T) = x(T) \end{cases}$$

en utilisant les lemmes (2.2.1)-(2.2.2), on a :

$$y(t) = A_x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_y(s)\, ds$$

où $g_y \in C(J, \mathbb{R})$ sastisfait l'équation suivante :

$$g_y(t) = f(t, A_x + \mathcal{I}^{\alpha} g_y(t), g_y(t))$$

et

$$A_x = \frac{1}{a+b}\left[c - \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} g_x(s)\, ds\right].$$

Par intégration de l'inégalité (3.5), on obtient :

$$\begin{aligned}\left|x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_x(s)\, ds\right| &\leq \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s)\, ds \\ &\leq \varepsilon\, \lambda_\varphi\, \varphi(t).\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}|x(t) - y(t)| &= \left|x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_x(s)\, ds\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (g_x(s) - g_y(s))\, ds\right| \\ &\leq \left|x(t) - A_x - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g_x(s)\, ds\right| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |g_x(s) - g_y(s)|\, ds\end{aligned}$$

par (2.19), il s'ensuit que :

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon\, \lambda_\varphi\, \varphi(t) + \frac{K}{(1-L)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x(s) - y(s)|\, ds$$

et nous obtenons par le lemme de Gronwall (1.3.1) :

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon\, \lambda_\varphi\, \varphi(t) + \frac{\gamma_1\, \varepsilon K\, \lambda_\varphi}{(1-L)\,\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s)\, ds$$

où $\gamma_1 = \gamma_1(\alpha)$ une constante.
En utilisant $(\mathcal{H}_2)$, on obtient :

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon\, \lambda_\varphi\, \varphi(t) + \frac{\gamma_1\, \varepsilon K\, \lambda_\varphi^2\, \varphi(t)}{(1-L)} = \left(1 + \frac{\gamma_1\, K\, \lambda_\varphi}{1-L}\right) \varepsilon\, \lambda_\varphi\, \varphi(t)$$

Ainsi pour tout $t \in J$:

$$|x(t) - y(t)| \leq \left[\left(1 + \frac{\gamma_1\, K\, \lambda_\varphi}{1-L}\right) \lambda_\varphi\right] \varepsilon\, \varphi(t) = c\, \varepsilon\, \varphi(t).$$

C.Q.F.D.

Remarque 3.2.2

Les résultats pour le problème aux limites (3.2)-(3.3) conviennent aux problèmes suivants :

- ♦ *Problème à valeur initiale :* $a = 1,\ b = 0,\ c = 0.$
- ♦ *Problème à valeur finale :* $a = 0,\ b = 1,\ c$ *arbitraire.*
- ♦ *Problème anti-périodique :* $a = 1,\ b = 1,\ c = 0.$

Mais, ils ne conviennent pas pour le problème périodique : $a = 1,\ b = -1,\ c = 0.$

Exemples

Exemple 3.2.1

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$
\begin{aligned}
{}^c\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t) &= \frac{1}{100}(t\cos y(t) - y(t)\sin(t)) + \frac{|{}^c\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|}{50 + |{}^c\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|}, \qquad \forall t \in [0,1] && (3.6)\\
y(0) &= 1. && (3.7)
\end{aligned}
$$

Posons :

$$
f(t,u,v) = \frac{1}{100}(t\cos u - u\sin(t)) + \frac{|v|}{50 + |v|}, \qquad t \in [0,1],\ u, v \in \mathbb{R}.
$$

Il est clair que la fonction f est continue.

Pour tous $u,\ v,\ \overline{u},\ \overline{v} \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$:

$$
\begin{aligned}
|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| &= \left| \frac{t}{100}(\cos u - \cos \overline{u}) + \frac{\sin(t)}{100}(\overline{u} - u) + \frac{50\,(|v| - |\overline{v}|)}{(50 + |v|)\,(50 + |\overline{v}|)} \right| \\
&\leq \frac{|t|}{100}|\cos u - \cos \overline{u}| + \frac{|\sin(t)|}{100}|u - \overline{u}| + \frac{50\,||v| - |\overline{v}||}{(50 + |v|)\,(50 + |\overline{v}|)} \\
&\leq \frac{1}{100}|u - \overline{u}| + \frac{1}{100}|u - \overline{u}| + \frac{50\,|v - \overline{v}|}{(50 + |v|)\,(50 + |\overline{v}|)} \\
&\leq \frac{1}{50}|u - \overline{u}| + \frac{1}{50}|v - \overline{v}|
\end{aligned}
$$

Donc ($\mathcal{H}_1$) est satisfaite avec :

$$
K = L = \frac{1}{50}
$$

de plus,

$$
\frac{K\,T^{\alpha}}{(1 - L)\Gamma(\alpha + 1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a + b|}\right) = \frac{\frac{1}{50}}{\left(1 - \frac{1}{50}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}
$$

en utilisant la propriété (3.) du lemme (1.2.1), on trouve :

$$
\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}
$$

ainsi,

$$\frac{K\,T^{\alpha}}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)=\frac{2}{49\sqrt{\pi}}<1$$

alors (2.17) est satisfaite.

D'après le théorème (2.2.1) le problème (3.6)-(3.7) a une unique solution, et par le théorème (3.2.1) le problème (3.6)-(3.7) est stable au sens de Ulam-Hyers.

Exemple 3.2.2

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} {}^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t) &= \frac{2+|y(t)|+|{}^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|}{120\,e^{t+10}\left(1+|y(t)|+|{}^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|\right)}, \qquad t\in[0,1] & (3.8)\\ y(0) &= 1. & (3.9)\end{aligned}$$

Posons :

$$f(t,u,v)=\frac{2+|u|+|v|}{120\,e^{t+10}\,(1+|u|+|v|)}, \qquad t\in[0,1],\ u,\ v\in\mathbb{R}.$$

La fonction f est bien continue.

Pour tous $u,\ v,\ \overline{u},\ \overline{v}\in\mathbb{R}$ et $t\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}|f(t,u,v)-f(t,\overline{u},\overline{v})| &= \left|\frac{(|\overline{u}|-|u|)+(|\overline{v}|-|v|)}{120\,e^{t+10}\,(1+|u|+|v|)\,(1+|\overline{u}|+|\overline{v}|)}\right|\\ &\leq \frac{1}{120\,e^{t+10}}\,|(|\overline{u}|-|u|)+(|\overline{v}|-|v|)|\\ &\leq \frac{1}{120\,e^{t+10}}(|u-\overline{u}|+|v-\overline{v}|)\end{aligned}$$

d'autre part, pour $t\in[0,1]$ on a :

$$\frac{1}{120\,e^{11}}\leq\frac{1}{120\,e^{t+10}}\leq\frac{1}{120\,e^{10}}$$

finalement,

$$|f(t,u,v)-f(t,\overline{u},\overline{v})|\leq\frac{1}{120\,e^{10}}(|u-\overline{u}|+|v-\overline{v}|).$$

Donc ($\mathcal{H}_1$) est satisfaite avec :

$$0<K=L=\frac{1}{120\,e^{10}}<1$$

de plus,

$$\begin{aligned}\frac{K\,T^{\alpha}}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) &= \frac{\frac{1}{120\,e^{10}}}{\left(1-\frac{1}{120\,e^{10}}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\\ &\leq \frac{2}{\left(120\,e^{10}-1\right)\sqrt{\pi}}\\ &< 1\end{aligned}$$

alors la condition (2.17) est aussi vérifiée.

Soit $\varphi(t) = t^2$, *on a :*

$$\mathcal{I}^{\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, s^2\, ds, \qquad t > 0$$

soit le changement de variable suivant :

$$u = \frac{s}{t} \Longrightarrow du = \frac{ds}{t}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{\alpha}\varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-u\,t)^{\alpha-1}\,(u\,t)^2\, t\, du \\
&= \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\, u^2\, du}_{B(3,\alpha)} \\
&= \frac{t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)} . \frac{\Gamma(3)\,\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+3)}
\end{aligned}$$

sachant que $\alpha = \frac{1}{2}$, *et en utilisant les propriétés (2.) et (3.) du lemme (1.2.1), on obtient :*

$$\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}\varphi(t) = \frac{16\, t^{\frac{5}{2}}}{15\,\sqrt{\pi}}$$

ensuite, pour $t \in [0,1]$ *on a :*

$$t^{\frac{5}{2}} \leq t^2$$

alors,

$$\mathcal{I}^{\frac{1}{2}}\varphi(t) \leq \frac{16}{15\,\sqrt{\pi}}\, t^2 := \lambda_{\varphi}\, \varphi(t).$$

Ainsi ($\mathcal{H}_2$) *est satisfaite avec* $\varphi(t) = t^2$, *et*

$$\lambda_{\varphi} = \frac{16}{15\,\sqrt{\pi}}.$$

Par le théorème (2.2.1), le problème (3.8)-(3.9) a une unique solution, et par le théorème (3.2.2), le problème (3.8)-(3.9) est stable aus sens de Ulam-Hyers-Rassias.

Exemple 3.2.3

Considérons le problème aux limites suivant :

$$ {}^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{1}{10\, e^{t+2}\,(1 + |y(t)| + |{}^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|)}, \qquad \forall t \in [0,1] \tag{3.10}$$

$$y(0) + y(1) = 0. \tag{3.11}$$

Posons :

$$f(t,u,v) = \frac{1}{10\,e^{t+2}\,(1+|u|+|v|)}, \qquad t \in [0,1], \quad u,\, v \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que la fonction f est continue.
Pour tous $u,\, v,\, \overline{u},\, \overline{v} \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| &= \frac{1}{10\,e^{t+2}} \left| \frac{(|\overline{u}|-|u|)+(|\overline{v}|-|v|)}{(1+|u|+|v|)\,(1+|\overline{u}|+|\overline{v}|)} \right| \\
&\leq \frac{1}{10\,e^{t+2}} \left|(|\overline{u}|-|u|)+(|\overline{v}|-|v|)\right| \\
&\leq \frac{1}{10\,e^{t+2}} \left[|\overline{u}-u|+|\overline{v}-v|\right]
\end{aligned}$$

d'autre part, pour $t \in [0,1]$ on a :

$$\frac{1}{10\,e^{3}} \leq \frac{1}{10\,e^{t+2}} \leq \frac{1}{10\,e^{2}}$$

finalement,

$$|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| \leq \frac{1}{10\,e^{2}} \left[|\overline{u}-u|+|\overline{v}-v|\right]$$

comme $0 < K = L = \dfrac{1}{10\,e^{2}} < 1$, alors ($\mathcal{H}_1$) est satisfaite.
De plus,

$$\frac{K\,T^{\alpha}}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)} \left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) = \frac{\dfrac{1}{10\,e^{2}}}{\left(1-\dfrac{1}{10\,e^{2}}\right)\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)} \left(1+\frac{1}{2}\right)$$

en utilisant la propriété (3.) du lemme (1.2.1), on trouve :

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ainsi,

$$\frac{K\,T^{\alpha}}{(1-L)\Gamma(\alpha+1)} \left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right) = \frac{3}{(10\,e^{2}-1)\,\sqrt{\pi}} < 1$$

alors la condition (2.17) est satisfaite.

D'après le théorème (2.2.1) le problème (3.10)-(3.11) a une unique solution, et par le théorème (3.2.1), le problème (3.10)-(3.11) est stable au sens de Ulam-Hyers .

3.2.2 Stabilité d'une équation différentielle fractionnaire avec des conditions non locales

On considère le deuxième problème du chapitre précédent :

$$ {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t)), \qquad t \in J, 0 < \alpha \leqslant 1 \tag{3.12}$$

$$ y(0) + g(y) = y_0 \tag{3.13}$$

où $g : C(J, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonctions continue, et y_0 une constante réelle.
Notons que ce type de problème de Cauchy non local à été introduit par Byszewski. L'auteur a observé que la condition non locale est plus appropriée que la condition locale(initiale).
Dans ce qui suit, nous allons étudier la stabilité de ce problème et nous conclurons par deux exemples pour illustrer les résultats théoriques.

Théorème 3.2.3
Supposons que $(\mathcal{H}'_1)$ et (2.23) sont satisfaites, alors le problème (3.12)-(3.13) est stable au sens de Ulam- Hyers.

Démonstration:
Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in C^1(J, \mathbb{R})$ une fonction qui satisfait l'inégalité :

$$ |{}^c\mathcal{D}^\alpha x(t) - f(t, x(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha x(t))| \leq \varepsilon, \qquad \forall\, t \in J \tag{3.14}$$

et soit $y \in C^1(J, \mathbb{R})$ la solution du problème (3.12)-(3.13) ainsi que l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}^c\mathcal{D}^\alpha y(t)) & t \in J, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ x(0) + g(y) = y_0 \end{cases}$$

par les lemmes (2.3.1)-(2.3.2), on obtient :

$$ y(t) = y_0 - g(y) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} P_y(s)\, ds, $$

où

$$ P_y(t) = f(t, y(t), P_y(t)). $$

Par intégration de l'inégalité (3.14), on trouve :

$$ \left| x(t) - y_0 + g(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} P_x(s)\, ds \right| \leq \frac{\varepsilon\, T^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} $$

où

$$ P_x(t) = f(t, x(t), P_x(t)). $$

Pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\leq \left|x(t)-y_0+g(x)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_x(s)\,ds\right| \\ &\quad+\left|g(y)-g(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(P_x(s)-P_y(s))\,ds\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+|g(x)-g(y)|+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|P_x(s)-P_y(s)|\,ds.\end{aligned}$$

En utilisant (2.25), on trouve :

$$|x(t)-y(t)| \leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+L\,|x(t)-y(t)|+\frac{K}{(1-\overline{K})\,\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|\,ds$$

donc,

$$|x(t)-y(t)| \leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{(1-L)\,\Gamma(\alpha+1)}+\frac{K}{(1-L)\,(1-\overline{K})\,\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)-y(s)|\,ds.$$

Ensuite, par le lemme de Gronwall (1.3.1) on obtient :

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{(1-L)\,\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\gamma\,\varepsilon\,K\,T^\alpha}{(1-L)^2\,(1-\overline{K})\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds \\ &\leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{(1-L)\,\Gamma(\alpha+1)}\left[1+\frac{\gamma\,K\,T^\alpha}{(1-L)\,(1-\overline{K})\,\Gamma(\alpha+1)}\right] := c\,\varepsilon\end{aligned}$$

où $\gamma=\gamma(\alpha)$ une constante, ainsi le problème(3.12)-(3.13) est stable au sens de Ulam-Hyers .

C.Q.F.D.

Remarque 3.2.3

Si on pose $\psi(\varepsilon)=c\,\varepsilon$ *alors* $\psi(0)=0$, *et donc le problème (3.12)-(3.13) devient stable au sens de Ulam-Hyers généralisé.*

Théorème 3.2.4 *[2]*

Supposons que ($\mathcal{H}'_1$), (2.23) et :

► *($\mathcal{H}'_2$) il existe une fonction croissante $\varphi \in C(J,\mathbb{R}_+)$ et il existe $\lambda_\varphi > 0$ telles que :*

$$\mathcal{I}^\alpha\varphi(t) \leqslant \lambda_\varphi\,\varphi(t), \qquad \forall t \in J$$

sont satisfaites, alors le problème (3.12)-(3.13) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias.

Exemples

Exemple 3.2.4

Soit le problème suivant :

$$^c\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}\left[\frac{|y(t)|}{1+|y(t)|} - \frac{|^c\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|}{1+|^c\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|}\right], \qquad \forall t\in[0,1] \tag{3.15}$$

$$y(0) + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y(t_i) = 1 \tag{3.16}$$

où $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < 1$ *et* $C_i, i = 1, \ldots, n$ *sont des constantes positives avec*

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \leq \frac{1}{3}.$$

Posons :

$$f(t,u,v) = \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}\left[\frac{|u|}{1+|u|} - \frac{|v|}{1+|v|}\right], \qquad t\in[0,1], \quad u,\, v\in\mathbb{R}.$$

et

$$g(u) = \sum_{i=1}^{n} C_i\, u.$$

Il est clair que la fonction f *est continue.*

Pour tous $u,\ v,\ \overline{u},\ \overline{v}\in\mathbb{R}$ *et* $t\in[0,1]$*, on a :*

$$\begin{aligned}
|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| &= \left|\frac{e^{-t}}{(9+e^t)}\left[\frac{|u|-|\overline{u}|}{(1+|u|)\,(1+|\overline{u}|)} + \frac{|\overline{v}|-|v|}{(1+|v|)(1+|\overline{v}|)}\right]\right| \\
&\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}\left[\left|\frac{|u|-|\overline{u}|}{(1+|u|)\,(1+|\overline{u}|)}\right| + \left|\frac{|\overline{v}|-|v|}{(1+|v|)(1+|\overline{v}|)}\right|\right] \\
&\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}\left[|u-\overline{u}| + |v-\overline{v}|\right]
\end{aligned}$$

d'autre part, pour $t\in[0,1]$ *on a :*

$$\frac{e^{-t}}{(9+e)} \leq \frac{e^{-t}}{(9+e^t)} \leq \frac{1}{10}$$

finalement,

$$|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| \leq \frac{1}{10}\left[|u-\overline{u}| + |v-\overline{v}|\right].$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}
|g(u) - g(\overline{u})| &= \left|\sum_{i=1}^{n} C_i\, u - \sum_{i=1}^{n} C_i\, \overline{u}\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} C_i|u-\overline{u}| \\
&\leq \frac{1}{3}|u-\overline{u}|
\end{aligned}$$

ainsi $(\mathcal{H}'_1)$ *est satisfaite avec* $K = \overline{K} = \dfrac{1}{10}$ *et* $L = \dfrac{1}{3}$.
Il reste plus qu'à vérifier la condition (2.23) .
On a :

$$\begin{aligned}
L + \frac{K\,T^{\alpha}}{(1-\overline{K})\,\Gamma(\alpha+1)} &= \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{10}}{\left(1-\frac{1}{10}\right)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{9\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{3\sqrt{\pi}+2}{9\sqrt{\pi}} < 1.
\end{aligned}$$

Comme les hypothèses du théorème (2.3.1) sont satisfaites, le problème (3.15)-(3.16) admet une unique solution, et par le théorème (3.2.3), le problème (3.15)-(3.16) est stable au sens de Ulam-Hyers .

Exemple 3.2.5

On considère le problème suivant :

$$^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}\left[\frac{|y(t)|}{1+|y(t)|} - \frac{|^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|}{1+|^{c}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}y(t)|}\right], \qquad \forall t\in[0,1] \tag{3.17}$$

$$y(0) + \frac{1}{4}\left(\frac{|y(t)|}{1+|y(t)|}\right) = 1. \tag{3.18}$$

Posons :

$$f(t,u,v) = \frac{e^{-t}}{(9+e^{t})}\left[\frac{|u|}{1+|u|} - \frac{|v|}{1+|v|}\right], \qquad t\in[0,1], \quad u,\, v\in\mathbb{R}.$$

et

$$g(u) = \frac{1}{4}\left(\frac{|u|}{1+|u|}\right), \qquad u\in\mathbb{R}.$$

D'après l'exemple (3.2.4), on a :

$$|f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| \leq \frac{1}{10}\left[|u-\overline{u}| + |v-\overline{v}|\right].$$

Ensuite , pour tous $u,\overline{u}\in\mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{aligned}
|g(u)-g(\overline{u})| &= \frac{1}{4}\left|\frac{|u|-|\overline{u}|}{(1+|u|)\,(1+|\overline{u}|)}\right| \\
&\leq \frac{1}{4}\,||u|-|\overline{u}|| \\
&\leq \frac{1}{4}\,|u-\overline{u}|
\end{aligned}$$

ainsi :

$$K = \overline{K} = \frac{1}{10} \qquad et \qquad L = \frac{1}{4}.$$

Par conséquent $(\mathcal{H}'_1)$ est satisfaite.

D'autre part,

$$L + \frac{K\,T^{\alpha}}{(1-\overline{K})\,\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{4} + \frac{2}{9\sqrt{\pi}} = \frac{9\sqrt{\pi}+8}{36\sqrt{\pi}} < 1$$

donc (2.23) est satisfaite.

Par le théorème (2.3.1), le problème (3.17)-(3.18) admet une unique solution, et par le thèorème (3.2.3) , le problème (3.17)-(3.18) est stable au sens de Ulam-Hyers .

Conclusion

Généralement, les théorèmes du point fixe sont employés pour prouver l'existence et l'unicité de solution d'un problème précis. Dans ce mémoire, on a réussi à avoir plus que cela, par le principe de contraction de Banach, on a pu avoir des résultats concernants la stabilité.

D'après ce qu'on a vu, pour étudier la stabilité au sens de Ulam-Hyers d'un problème avec des conditions aux limites ou non locales pour une équation différentielle fractionnaire implicite avec la dérivée fractionnaire de Caputo et d'ordre compris entre 0 et 1 dans un espace de banach, il suffit d'étudier l'existence et l'unicité de solution de ce problème. Puis, si on arrive à démontrer cela, on conclut que le problème est stable au sens de Ulam-Hyers, par contre, pour la stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias, cette conditions ne suffit plus, il faut imposer une condition de plus.

Bibliographie

[1] Abbas, S., and Benchohra, M. On the generalized ulam-hyers-rassias stability for darboux problem for partial fractional implicit differential equations. *Appl. Math. E-Notes 14* (2014), 20–28.

[2] Benchohra, M., and Bouriah, S. Existence and stability results for nonlinear boundary value problem for implicit differential equations of fractional order. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis 1*, 1 (2015), 22–37.

[3] Benchohra, M., and Lazreg, J. E. On stability for nonlinear implicit fractional differential equations. *Le Matematiche 70*, 2 (2015), 49–61.

[4] Cho, Y. J., Rassias, T. M., and Saadati, R. *Stability of functional equations in random normed spaces*, vol. 86. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] Diethelm, K. *The analysis of fractional differential equations : An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type.* Springer Science & Business Media, 2010.

[6] Gavruta, P. A generalization of the hyers-ulam-rassias stability of approximately additive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 184* (1994), 431–436.

[7] Granas, A., and Dugundji, J. *Fixed point theory.* Springer Science & Business Media, 2013.

[8] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J. North-holland mathematics studies 204. *Theory and applications of fractional differential equations* (2006).

[9] Miller, K. S., and Ross, B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.

[10] Podlubny, I. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, vol. 198. Elsevier, 1998.

[11] Rassias, T. M., and Brzdek, J. *Functional equations in mathematical analysis*, vol. 86. Springer, 2012.

[12] Reinhard, H. *Équations différentielles.*, vol. 34002. Gauthiers-Villars Paris, 1982.

[13] Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I. Fractional integrals and derivatives : theory and applications.

[14] Takahasi, S.-E., Miura, T., and Miyajima, S. On the hyers-ulam stability of the banach spacevalued differential equation y= λy. *Bull. Korean Math. Soc 39*, 2 (2002), 309–315.

[15] Tarasov, V. E. *Fractional dynamics : applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*. Springer Science & Business Media, 2011.

[16] Ulam, S. M. *Problems in modern mathematics.* Courier Corporation, 2004.

[17] Ye, H., Gao, J., and Ding, Y. A generalized gronwall inequality and its application to a fractional differential equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications 328*, 2 (2007), 1075–1081.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'établir la stabilité d'Ulam-Hyers pour des problèmes d'équations différentielles fractionnaires implicites avec la dérivée fractionnaire de Caputo et d'ordre compris entre 0 et 1 dans un espace de Banach , avec des conditions aux limites et non locales. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur le principe de contraction de Banach. Des exemples sont inclus pour montrer l'applicabilité des résultats théoriques.

Mots-clés: Equations différentielles fractionnaires implicites, Stabilité,Ulam-Hyers , Point fixe.

Abstract

The main objective of this paper is to establish Ulam-Hyers stability for problems of implicit fractional differential equations with Caputo fractional derivative and the order between 0 and 1 in a Banach space, with boundary and non-local conditions.The arguments are based upon the Banach contraction principle. Examples are included to show the applicability of our theoretical results.

Keywords: Implicit fractional differential equations , Stability, Ulam-Hyers, Fixed point

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو إثبات استقرار بمفهوم اولام-هايرز لمشاكل المعادلات التفاضلية الكسرية الضمنية مع مشتق كسري بمفهوم كابوتو والترتيب بين ٠ و ١ في فضاء باناك بشروط حدية وغير محلية. تستند النتائج التي تم الحصول عليها في هذا العمل على مبدأ التقلص لدى باناك. يتم تضمين أمثلة لإظهار قابلية تطبيق النتائج النظرية.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية الكسرية الضمنية ، استقرار، اولام-هايرز، النقطة الصامدة.