الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليـم العالـي والبحــث العلمـــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département des Mathématiques et Informatiques

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du diplôme de Master en : Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Équations Différentielles et Modélisation
Thème

Équations Différentielles Fractionnaires avec Impulsions

Présenté Par :
Melle. BENHADDOU Samira

Devant le jury composé de :

Dr. BENIANI Abderrahmane	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. HELLAL Meryem	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinatrice
Dr. HARIRI Mohamed	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Dr. BELATTAR Zokha	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrante

Année Universitaire 2021/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste mémoire :

A mes Cher parents Abdelkrim et Safia.

A mes sœurs.

A tous membres de ma grande famille, chacun en son nom.

A mes amis.

A tous les enseignants et enseignantes qui ont contribué à ma formation.

Remerciements

Je remercie avant tout Allah de m'avoir donné la force et la volonté nécessaire pour achever ce travail.

Je remercie Dr. BELATTAR pour son aide et ses conseils, en saluant en elle son savoir faire, sa compétence et ses connaissances dont elle m'a profiter.

Je remercie aussi les membres du jury Dr. BENIANI, Dr. HELLAL et Dr. HARIRI de m'avoir fait l'honneur d'en faire partie et d'avoir accepté l'évaluation de ce mémoire.

Je remercie encore une fois mes Chers parents, pour leur amour, leurs conseils ainsi que leur soutien à la fois moral et matériel qui m'ont permis de réaliser le parcours de mes études que je voulais et par conséquent cet aboutissement.

Je remercie mes sœurs pour leur encouragement.

Enfin, je remercie toute personne de près ou de loin qui m'a aidé à réaliser ce travail d'initiation à la recherche.

Table des matières

Introduction

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues à été soumise. Les problèmes les plus connus dans l'étude des équations différentielles sont les problèmes de Cauchy ou les problèmes aux limites (voir [19]).

D'une part, l'année 1960 a marqué le début des équations différentielles impulsives avec le travail de Millman et Myshykis (voir [26,27]). Par la suite, une période de recherches active a été enregistrée principalement en Europe orientale pendant la période 1960-1970 qui a abouti aux résultats de Halanay et Wexler (voir [17]).

A partir de 1991, d'autres mathématiciens comme L. Byszewski, D. Bainov contribuent à l'enrichissement de la théorie des équations différentielles impulsives où ils lancèrent beaucoup de résultats sur ce sujet (voir [1,2,24]).

Les équations différentielles impulsives apparaissent comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel. Certains phénomènes physiques subissant des changements brusques au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact, la dynamique des cellules (voir [10]), les systèmes biologiques (battements du coeur, flux du sang,...) (voir [10]). Ces changements sont souvent de très courtes durées et sont des produits instantanément sous forme d'impulsions.

Dans le cas général, les équations impulsives sont composées de deux parties :

- L'équation différentielle, qui définie la partie continue de la solution.
- La partie impulsive, qui définie le changement instantanée et la discontinuitée de la solution.

La première partie des équations impulsives qui est l'équation différentielle peut se composer des équations différentielles ordinaires, équations différentielles fonctionnelles, équations différentielles semi linéaire,...etc.
Le type des équations différentielles définit les différents types des équations impulsives.

La seconde partie des équations impulsives est appelée le saut, les points les quelles l'impulsion se produit sont appelées les moments d'impulsions et les fonctions qui définient la somme des impulsions sont appelées les fonctions impulsives.

D'autre part, la théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie,...etc (voir [13,20]).

A partir des années 1990, Il existe divers problèmes concrets qui étudier des équations différentielles fractionnaires avec impulsions dans divers directions : existence et unicité des solutions, la dépendance continue des solutions par rapport aux temps initial, la stabilité (voir [18,8,7,9,5,3]).

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de solution d'un problème de Cauchy fractionnaire avec impulsions.

Ce mémoire comporte quatre chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit les outils nécessaires à la compréhension de ce manuscrit.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions le problème de Cauchy impulsif sur un intervalle borné suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \neq t_k, \quad t \in [0, b], \\ \Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, ..., r, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée. $\eta_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sont des fonctions impulsives .
$\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ avec $x(t_k^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} x(t_k + h)$ et $x(t_k^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} x(t_k - h)$.
En appliquant, le théorème de Banach, le théorème de Leray-Schauder et le théorème de Krasnoseleskii (voir [31,24]).

Le troisième chapitre est composé de deux parties :
La première partie représente le calcul fractionnaire (voir [23,29,14,25,32]).
Dans la deuxième partie, nous examinons l'existence et l'unicité de solution du problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Caputo suivante :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J = [0, T], 0 < \alpha < 1, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Où ${}^cD^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, en utilisant le théorème du point fixe de Banach.

Dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à l'existence et l'unicité de solution d'un problème de Cauchy fractionnaire avec impulsions suivant :

$$\begin{cases} {}^cD_a^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \ \ t \in J = [0, T], \ \ t \neq t_k, \ \ k = 1, ..., r, \ \ 0 < \alpha \leq 1, \\ \Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k^-)), \qquad k = 1, ..., r, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.
En utilisant, le théorème du point fixe de Banach et le théorème du point fixe de Schaefer.

A la fin, nous donnons une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au théorème d'Ascoli-Arzelà et les théorèmes du point fixe.

1.1 Définitions et notions fondamentaux

Soit $J = [0, b] \subset \mathbb{R}$, $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_k < ... < t_{r+1} = b$.

Définition 1.1.1 (Fonction Carathéodory) *[15]*
Notons $L^1(J, \mathbb{R}^+)$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $x : J \to \mathbb{R}^+$ qui sont Lebesgue intégrable avec la norme :

$$\|x\|_{L^1} = \int_0^b \|x(s)\| ds.$$

Soient X, Y deux espaces de Banach.
Une application $f : J \times X \to Y$ est dite Carathéodory si f est vérifiée :

(1) $t \to f(t, x)$ est mesurable pour tout $x \in X$,

(2) $x \to f(t, x)$ est continue pour tout $t \in J$.

L'application f est dite L^1-Carathéodory si f est Carathéodory et on a $\forall \omega > 0$, $\exists h_\omega \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$:

$$\|f(t, x)\| \leq h_\omega(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in J \quad \text{et} \quad \forall \|x\| \leq \omega.$$

Définition 1.1.2 (Ensemble uniformément borné) *On dit que M est uniformément borné s'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que :*

$$\|x(t)\| \leq c, \quad \forall t \in [0, b], \forall x \in M.$$

Définition 1.1.3 (Ensemble équicontinue) *On dit que M est équicontinue dans l'intervalle J si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que pour tout $x \in M$ et tout $t_1, t_2 \in]t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, ..., r$, on a $|t_1 - t_2| < \delta$ alors $\|x(t_1) - x(t_2\| < \epsilon$.*

Théorème 1.1.1 (Théorème d'Ascoli-Arzelà) *[35]*
Notons $\mathcal{C}([0,b],\mathbb{R}^n)$, l'espace de Banach de toutes les fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in J}\{|x(t)|/t \in J\}.$$

Où $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.
Soit $A \subset \mathcal{C}([0,b],\mathbb{R}^n)$, A est relativement compact si

i) A est uniformément borné,

ii) A est équicontinue.

Théorème 1.1.2 (Théorème de Fubini) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]\times[c,d]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

1.2 Théorèmes du point fixe

Dans cette section, nous allons rappeler quelques principaux résultats relatifs au "Théorème du point fixe" qui seront exploités par la suite. Dans l'analyse, un théorème du point fixe donne des conditions suffisantes d'existence d'un point fixe pour une fonction ou une famille de fonctions. Ces théorèmes se révèlent des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de résolution des équations différentielles.

Définition 1.2.1 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de f tout point $x \in E$ tel que,*

$$f(x) = x.$$

Définition 1.2.2 *[12] Soient E un espace de Banach, $A : E \to E$ un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant) s'il existe une constante $c \in]0,1]$ telle que*

$$\|Au - Av\|_E \le c\|u - v\|_E, \quad \textit{pour } u, v \in E.$$

Théorème 1.2.1 (Théorème du point fixe de Banach) *[35]*
Toute application contractante A d'un espace de Banach dans lui même admet un unique point fixe.

Définition 1.2.3 (Opérateur complètement continu) *L'opérateur T défini d'un espace de Banach E dans lui même est dit complètement continu si*

i) T est continu,

ii) $\forall B \subset E$ borné, $T(B)$ est relativement compact.

Théorème 1.2.2 (Théorème du point fixe de Schaefer) *[34]*
Soit E un espace de Banach et soit $T : E \to E$ un opérateur complètement continu.
Si l'ensemble

$$E = \{x \in E : \lambda x = Tx \text{ pour } \lambda > 1\}$$

est borné, alors T admet un point fixe.

Théorème 1.2.3 (L'Alternative Non Linéaire de Leray-Schauder) *[16]*
Soit E un espace de Banach, et $U \subset E$ convexe avec $0 \in U$. Soit $F : U \to U$ est un opérateur complètement continu. Alors ou bien

i) F a un point fixe,
ou bien

ii) L'ensemble $\xi = \{x \in U : x = \lambda F(x),\ 0 < \lambda < 1\}$ est non borné.

Théorème 1.2.4 (Théorème du point fixe de Krasnoselskii) *[33]*
Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe et fermée de E. On suppose que $A, B : M \to E$ sont deux applications satisfaisant :

- *$Ax + By \in M,\ \forall x, y \in M$;*
- *A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact ;*
- *B est une contraction.*

Alors $\exists x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*$.

Chapitre 2

Problème de Cauchy avec impulsions

Ce chapitre est consacré à l'existence et l'unicité des solutions d'un problème de Cauchy pour les équations différentielles impulsives sur un intervalle borné. En utilisant le théorème de Banach, théorème de Leray-Schauder et théorème de Krasnoseleskii.

2.1 L'espace PC^i

Définition 2.1.1 *Pour tout $i \geq 0$ et $J' := J - \{t_k\}_{k=1}^r$ on définit l'espace des fonctions impulsives par $PC^i(J) := \{x \in \mathcal{C}^i(J', \mathbb{R}^n)/x^{(j)}$ est continue à gauche de t_k, et $x^{(j)}(t_k^+)$ existe pour tout $k, j; 1 \leq k \leq r, 0 \leq j \leq i\}$.*

Cas particulier
$PC^0(J, \mathbb{R}^n) := PC(J, \mathbb{R}^n) = \{x : J \to \mathbb{R}^n, x \in \mathcal{C}(J', \mathbb{R}^n),\ k = 0, ..., r,$ tel que $x(t_k^-)$ et $x(t_k^+)$ existent et satisfont $x(t_k) = x(t_k^-)$, pour $k = 1, ..., r\}$.

Lemme 2.1.1 $(PC[0,1], \mathbb{R}^n)\|.\|_{PC})$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|x\|_{PC} = \max\left\{\|x_k\|_\infty, k = 1, ..., r\right\},$$

où $\|x_k\|_\infty = \sup\limits_{t \in [t_k, t_{k+1}]} |x(t)|$.

Preuve. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq PC([0,1], \mathbb{R}^n)$ une suite de Cauchy alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, p \geqslant n_0(\epsilon) \Rightarrow \|(x_k)_n - (x_k)_p\|_{PC} < \epsilon$$

$$\begin{aligned} \|(x_k)_n - (x_k)_p\|_{PC} = \max(\|(x_k)_n - (x_k)_p\|_\infty), \qquad & k = 1, ..., r \\ \Rightarrow \|(x_k)_n - (x_k)_p\|_\infty \leq \epsilon, \qquad & k = 1, ..., r. \end{aligned}$$

Pour $k = 1$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_p\|_\infty &= \sup_{t \in [0, t_1]} \|x_n(t) - x_p(t)\| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, t_1], \mathbb{R}^n)$ alors il existe $x_1 \in \mathcal{C}([0, t_1], \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x_1(t), \forall t \in [0, t_1].$$

Pour $k=2$, on considère la suite des fonctions

$$\widetilde{x}_n = \begin{cases} x_n(t), & t \in \left]t_1, t_2\right] \\ x_n(t_1), & t = t_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{x}_n - \widetilde{x}_p\|_\infty &= \sup_{t\in]t_1,t_2]} |\widetilde{x}_n(t) - \widetilde{x}_p(t)| \\ &= \sup_{t\in]t_1,t_2]} |x_n(t) - x_p(t)| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Puisque $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(\left]t_1,t_2\right],\mathbb{R}^n)$ alors il existe $x_2 \in \mathcal{C}(\left]t_1,t_2\right],\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n(t) = x_2(t), \qquad \forall t \in \left]t_1, t_2\right].$$

De la même façon, on trouve que

$$\begin{aligned} \|(x_k)_n - (x_k)_p\|_\infty &= \sup_{t\in]t_k,t_{k+1}]} |x_n(t) - x_p(t)|, \qquad k = 3, ..., r \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{x}_n(t) = x_k(t), \qquad \forall t \in \left]t_k, t_{k+1}\right], \qquad k = 3, ..., r.$$

Posons

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [0, t_1] \\ x_2(t), & t \in \left]t_1, t_2\right] \\ \quad ... \\ x_r(t), & t \in \left]t_{n+1}, 1\right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_{PC} &= \max_{t\in[0,1]} \|(x_k)_n(t) - x_k(t)\|_\infty, \qquad k = 1, ..., r \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

De plus, on peut facilement montrer que $x \in PC([0,1],\mathbb{R}^n)$.
D'où $PC([0,1],\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.

2.2 Solution d'un problème impulsive du premier ordre

On considère le système différentielle impulsif

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \neq t_k, \quad t \in J = [0,1], \\ \Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k^-)), & k = 1, ..., r. \end{cases} \tag{2.1}$$

avec la condition initiale

$$x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

Où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction régulière. $\eta_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sont des fonctions continues .
$\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ avec $x(t_k^+) = \lim\limits_{h\to 0^+} x(t_k + h)$ et $x(t_k^-) = \lim\limits_{h\to 0^-} x(t_k - h)$.

Définition 2.2.1 *La fonction $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ est une solution de l'équation (2.1) si :*

1. $(t, x(t)) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$;
2. *La fonction $x(t)$ est différentiable et $x' = f(t, x(t))$;*
3. *La fonction $x(t)$ est continue sur $J_k =]t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, ..., r$ et si $t = t_k$, alors $x(t_k^+) = x(t_k^-) + \eta_k(x(t_k^-))$.*

Définition 2.2.2 *Toute solution x de (2.1) vérifiant $\lim\limits_{t\to\ 0^+} x(t) = x_0$ est une solution du problème (2.1) - (2.2). De plus, $x \in \mathcal{C}^1(J_k, \mathbb{R}^n)$.*

Lemme 2.2.1 *Une fonction $x \in PC(J, \mathbb{R}^n)$ est une solution du problème (2.1) - (2.2) si et seulement si*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)), \quad t \in [0,1].$$

Preuve. Supposons que x est une solution du problème (2.1)-(2.2), alors
▶ pour $t \in [0, t_1]$, on a

$$\begin{aligned} x'(t) = f(t, x(t)) &\Rightarrow \int_0^t x'(s)ds = \int_0^t f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

▶ Pour $t \in]t_1, t_2]$, on a

$$\begin{aligned} x'(t) = f(t, x(t)) &\Rightarrow \int_{t_1+h}^t x'(s)ds = \int_{t_1+h}^t f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_1 + h) + \int_{t_1+h}^t f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} x(t) = \lim_{h\to 0^+} \left[x(t_1 + h) + \int_{t_1+h}^t f(s, x(s))ds \right] \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_1^+) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_1^-) + \eta_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Comme $x(t_1^-) = x(t_1)$, alors

$$x(t_1^-) = x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s))ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \eta_1(x(t_1^-)) + \int_0^{t_1} f(s,x(s))ds + \int_{t_1}^{t} f(s,x(s))ds \\ &= x_0 + \eta_1(x(t_1^-)) + \int_0^{t} f(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)), \quad \forall t \in [0,t_2].$$

► Pour $t \in \,]t_2, t_3]$, on a

$$\begin{aligned} x'(t) = f(t,x(t)) &\Rightarrow \int_{t_2+h}^{t} x'(s)ds = \int_{t_2+h}^{t} f(s,x(s))ds \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_2+h) + \int_{t_2+h}^{t} f(s,x(s))ds \\ &\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} x(t) = \lim_{h\to 0^+}\left[x(t_2+h) + \int_{t_2+h}^{t} f(s,x(s))ds\right] \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_2^+) + \int_{t_2}^{t} f(s,x(s))ds \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_2^-) + \eta_2(x(t_2^-)) + \int_{t_2}^{t} f(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

Comme $x(t_2^-) = x(t_2)$, alors

$$x(t_2^-) = x_0 + \eta_1(x(t_1^-)) + \int_0^{t_2} f(s,x(s))ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \eta_1(x(t_1^-)) + \eta_2(x(t_2^-)) + \int_0^{t_2} f(s,x(s))ds + \int_{t_2}^{t} f(s,x(s))ds \\ &= x_0 + \eta_1(x(t_1^-)) + \eta_2(x(t_2^-)) + \int_0^{t} f(s,x(s))ds. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)), \quad \forall t \in [0,t_3].$$

Ainsi, si $t \in \,]t_k, t_{k+1}]$, on a

$$x(t) = x_0 + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)) + \int_0^t f(s,x(s))ds, \quad \forall t \in [0,t_{k+1}].$$

Par conséquent

$$x(t) = x_0 + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)) + \int_0^t f(s,x(s))ds, \quad \forall t \in [0,1].$$

2.3 Exemples

On va donner quelques exemples pour illustrer le comportement des solutions des équations différentielles impulsives.

Exemple 2.3.1 *On considère l'équation différentielle impulsive*

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x^2(t), & t \neq \frac{\pi}{4}, \\ \Delta x(t_k) = -1, & t = \frac{\pi}{4}, \quad k = 1, 2, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Supposons que x est une solution du problème (2.3), alors
▶ *Pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a*

$$\begin{aligned} x'(t) = 1 + x^2(t) &\Rightarrow \int_0^t x'(s)\, ds = \int_0^t 1 + x^2(s)\, ds \\ &\Rightarrow \int_0^t \frac{x'(s)}{1 + x^2(s)}\, ds = \int_0^t ds \\ &\Rightarrow \arctan x(s)\Big|_0^t = s\Big|_0^t. \end{aligned}$$

Or $x(0) = 0$, alors

$$\arctan x(t) = t \Rightarrow x(t) = \tan t.$$

Donc

$$x(t) = \tan t.$$

▶ *Pour $t \in]\frac{\pi}{4}, 1]$, on a*

$$\begin{aligned} x'(t) = 1 + x^2(t) &\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}^+}^t x'(s)\, ds = \int_{\frac{\pi}{4}^+}^t 1 + x^2(s)\, ds \\ &\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}^+}^t \frac{x'(s)}{1 + x^2(s)}\, ds = \int_{\frac{\pi}{4}^+}^t ds \\ &\Rightarrow \arctan x(s)\Big|_{\frac{\pi}{4}^+}^t = s\Big|_{\frac{\pi}{4}^+}^t \\ &\Rightarrow \arctan x(t) - \arctan x\left(\frac{\pi^+}{4}\right) = t - \frac{\pi}{4} \\ &\Rightarrow \arctan x(t) = \arctan x\left(\frac{\pi^+}{4}\right) + t - \frac{\pi}{4} \\ &\Rightarrow x(t) = \tan\left[\arctan x\left(\frac{\pi^+}{4}\right) + t - \frac{\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Or $x\left(\frac{\pi^+}{4}\right) = -1 + x\left(\frac{\pi^-}{4}\right)$ et $x\left(\frac{\pi^-}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, *alors*

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{4}^{+}\right) &= -1 + tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -1 + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$x(t) = \tan\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Exemple 2.3.2 *On considère l'équation différentielle impulsive suivante*

$$\begin{cases} x'(t) & = 0, \quad t \neq t_k, \quad t \in [0,1], \\ \Delta x(t_k) & = \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad k = 1, ..., r, \\ x(0^+) & = x_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Supposons que x est une solution du problème (2.4), alors

▶ *Pour $t \in [0, t_1]$, on a*

$$\begin{aligned} x'(t) = 0 &\Rightarrow \int_0^t x'(s)\, ds = \int_0^t 0\, ds \\ &\Rightarrow x(t) = x_0. \end{aligned}$$

▶ *Pour $t \in]t_1, t_2]$, on a*

$$\begin{aligned} x'(t) = 0 &\Rightarrow \int_{t_1^+}^t x'(s)\, ds = \int_{t_1^+}^t 0\, ds \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_1^+). \end{aligned}$$

Or $x(t_1^+) = \beta + x(t_1^-)$ et $x(t_1^-) = x_0$, donc

$$x(t) = \beta + x_0.$$

Ce qui implique

$$x(t) = \beta + x_0, \quad \forall t \in [0, t_2].$$

▶ *Pour $t \in]t_2, t_3]$, on a*

$$\begin{aligned} x'(t) = 0 &\Rightarrow \int_{t_2^+}^t x'(s)\, ds = \int_{t_2^+}^t 0\, ds \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_2^+). \end{aligned}$$

Or $x(t_2^+) = \beta + x(t_2^-)$ et $x(t_2^-) = \beta + x_0$,
alors

$$x(t_2^+) = 2\beta + x_0.$$

Donc

$$x(t) = 2\beta + x_0.$$

Ce qui implique
$$x(t) = 2\beta + x_0, \quad \forall t \in [0, t_3].$$
Ainsi, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$, *on a*
$$\begin{aligned} x'(t) = 0 &\Rightarrow \int_{t_k^+}^{t} x'(s)\, ds = \int_{t_k^+}^{t} 0\, ds \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_k^+). \end{aligned}$$
Or $x(t_k^+) = \beta + x(t_k^-)$ *et* $x(t_k^-) = (k-1)\beta + x_0$,
Donc
$$\begin{aligned} x(t) &= \beta + (k-1)\beta + x_0 \\ &= k\beta + x_0. \end{aligned}$$
Ce qui implique
$$x(t) = k\beta + x_0, \quad \forall t \in [0, t_{k+1}].$$
D'où
$$x(t) = r\beta + x_0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Exemple 2.3.3
$$\begin{cases} x'(t) = \alpha, & t \neq t_k, \quad t \in [0,1], \\ \Delta x(t_k) = (\beta - 1)x(t_k^-), & \beta \in \mathbb{R}, \quad t = t_k, \quad k = 1, ..., r, \\ x(0^+) = x_0. \end{cases} \tag{2.5}$$
Supposons que x *est une solution du problème (2.5), alors*
▶ *Pour* $t \in [0, t_1]$, *on a*
$$\begin{aligned} x'(t) = \alpha &\Rightarrow \int_0^t x'(s)\, ds = \int_0^t \alpha\, ds \\ &\Rightarrow x(s)\Big|_0^t = \alpha s\Big|_0^t \\ &\Rightarrow x(t) - x(0) = \alpha t \\ &\Rightarrow x(t) = x(0) + \alpha t. \end{aligned}$$
Or $x(0) = x_0$.
Donc
$$x(t) = x_0 + \alpha t.$$
▶ *Pour* $t \in]t_1, t_2]$, *on a*
$$\begin{aligned} x'(t) = \alpha &\Rightarrow \int_{t_1^+}^t x'(s)\, ds = \int_{t_1^+}^t \alpha\, ds \\ &\Rightarrow x(s)\Big|_{t_1^+}^t = \alpha s\Big|_{t_1^+}^t \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_1^+) + \alpha(t - t_1^+). \end{aligned}$$

Or $x(t_1^+) = \beta x(t_1^-)$ *et* $x(t_1^-) = x_0 + \alpha t_1$, *alors* $x(t_1^+) = \beta(x_0 + \alpha t_1)$.
Donc

$$x(t) = \beta(x_0 + \alpha t_1) + \alpha(t - t_1^+).$$

Ce qui implique

$$x(t) = \beta(x_0 + \alpha t_1) + \alpha(t - t_1^+), \quad \forall t \in [0, t_2].$$

▶ *Pour* $t \in]t_2, t_3]$, *on a*

$$\begin{aligned} x'(t) = \alpha &\Rightarrow \int_{t_2^+}^{t} x'(s)\, ds = \int_{t_2^+}^{t} \alpha\, ds \\ &\Rightarrow x(s)\Big|_{t_2^+}^{t} = \alpha s\Big|_{t_2^+}^{t} \\ &\Rightarrow x(t) = x(t_2^+) + \alpha(t - t_2^+). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} x(t_2^+) &= \beta x(t_2^-) \\ &= \beta\big(\beta(x_0 + \alpha t_1) + \alpha(t_2 - t_1^+)\big) \\ &= \beta^2(x_0 + \alpha t_1) + \alpha\beta(t_2 - t_1^+). \end{aligned}$$

Donc

$$x(t) = \beta^2(x_0 + \alpha t_1) + \alpha\beta(t_2 - t_1^+) + \alpha(t - t_2^+).$$

Ce qui implique

$$x(t) = \beta^2(x_0 + \alpha t_1) + \alpha\beta(t_2 - t_1^+) + \alpha(t - t_2^+), \quad \forall t \in [0, t_3].$$

▶ *Par itération, pour* $t \in]t_k, t_{k+1}]$, *on trouve*

$$x(t) = \alpha\beta(t_k - t_{k-1}) + \alpha\beta^2(t_{k-1} - t_{k-2}) + ... + \alpha\beta^{k-1}(t_2 - t_1) + \beta^k(x_0 + \alpha t_1) + \alpha(t - t_k^+).$$

Ce qui implique, pour $t \in [0, 1]$

$$x(t) = \alpha\beta(t_r - t_{r-1}) + \alpha\beta^2(t_{r-1} - t_{r-2}) + ... + \alpha\beta^{r-1}(t_2 - t_1) + \beta^r(x_0 + \alpha t_1) + \alpha(t - t_r^+).$$

Exemple 2.3.4 *On considère l'équation différentielle impulsive*

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t), & t \neq t_k, \quad t \in [0, 1], \\ \Delta x(t_k) = \beta, & \beta \in \mathbb{R}, \quad t = t_k, \quad k = 1, 2, 3, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Supposons que x *est une solution du problème (2.6), alors*
▶ *Pour* $t \in [0, t_1]$, *on a*

$$\begin{aligned} x'(t) = \alpha x(t) &\Rightarrow \int_0^t x'(s)\, ds = \int_0^t \alpha x(s)\, ds \\ &\Rightarrow \int_0^t \frac{x'(s)}{x(s)}\, ds = \int_0^t \alpha\, ds \\ &\Rightarrow \ln|x(s)|\Big|_0^t = \alpha s\Big|_0^t \\ &\Rightarrow \ln|x(t)| - \ln|x(0)| = \alpha t \\ &\Rightarrow \ln|x(t)| = \ln|x(0)| + \alpha t. \end{aligned}$$

Or $x(0) = x_0$, *donc*
$$x(t) = x_0 \exp(\alpha t).$$

▶ *Pour* $t \in]t_1, t_2]$, *on a*

$$\begin{aligned}
x'(t) = \alpha x(t) &\Rightarrow \int_{t_1^+}^{t} x'(s)\, ds = \int_{t_1^+}^{t} \alpha x(s)\, ds \\
&\Rightarrow \int_{t_1^+}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)}\, ds = \int_{t_1^+}^{t} \alpha\, ds \\
&\Rightarrow \ln|x(s)|\Big|_{t_1^+}^{t} = \alpha s\Big|_{t_1^+}^{t} \\
&\Rightarrow \ln|x(t)| - \ln|x(t_1^+)| = \alpha(t - t_1^+) \\
&\Rightarrow \ln|x(t)| = \ln|x(t_1^+)| + \alpha(t - t_1^+).
\end{aligned}$$

Or $x(t_1^+) = x(t_1^-) + \beta$, $x(t_1^-) = x_0 \exp(\alpha t_1)$.
Donc
$$x(t) = (x_0 \exp(\alpha t_1) + \beta) \exp \alpha(t - t_1^+).$$

Ce qui implique

$$x(t) = (x_0 \exp(\alpha t_1) + \beta) \exp \alpha(t - t_1^+), \qquad \forall t \in [0, t_2].$$

▶ *Pour* $t \in]t_2, t_3]$, *on a*

$$\begin{aligned}
x'(t) = \alpha x(t) &\Rightarrow \int_{t_2^+}^{t} x'(s)\, ds = \int_{t_2^+}^{t} \alpha x(s)\, ds \\
&\Rightarrow \int_{t_2^+}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)}\, ds = \int_{t_2^+}^{t} \alpha\, ds \\
&\Rightarrow \ln|x(s)|\Big|_{t_2^+}^{t} = \alpha s\Big|_{t_2^+}^{t} \\
&\Rightarrow \ln|x(t)| - \ln|x(t_2^+)| = \alpha(t - t_2^+) \\
&\Rightarrow \ln|x(t)| = \ln|x(t_2^+)| + \alpha(t - t_2^+).
\end{aligned}$$

Or $x(t_2^+) = x(t_2^-) + \beta$, $x(t_2^-) = \big((x_0 \exp(\alpha t_1) + \beta) \exp \alpha(t_2 - t_1^+)\big) + \beta$,
donc
$$x(t) = \big(\big((x_0 \exp(\alpha t_1) + \beta) \exp \alpha(t_2 - t_1^+)\big) + \beta\big) \exp \alpha(t - t_2^+).$$

Ce qui implique

$$x(t) = \big(\big((x_0 \exp(\alpha t_1) + \beta) \exp \alpha(t_2 - t_1^+)\big) + \beta\big) \exp \alpha(t - t_2^+), \qquad \forall t \in [0, t_3].$$

Par conséquent

$$x(t) = \big(\big((x_0 \exp(\alpha t_1) + \beta) \exp \alpha(t_2 - t_1^+)\big) + \beta\big) \exp \alpha(t - t_2^+), \qquad \forall t \in [0, 1].$$

2.4 Théorèmes d'existence et d'unicité de solution

Dans cette section, nous allons étudier les théorèmes qui assurent l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.2).

2.4.1 Résolution du problème par le théorème de Banach

Théorème 2.4.1 *[24] Supposons que $f : J \times \mathbb{R}^n$ est une fonction L^1-Carathéodory et qu'il existe $\vartheta \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que :*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| < \vartheta(t)\|x-y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Alors le problème (2.1)-(2.2) admet une solution unique.

Preuve. La preuve est décomposée en trois étapes.
Notons $\|x\|_1 := \sup\limits_{t\in[0,t_1]} \left\{ \exp\left(-\tau \int_0^t \vartheta(s)ds \right) \|x(t)\|, \quad \tau > 1 \right\}.$
Étape 1 : On considère le problème (2.1)-(2.2) sur $[0, t_1]$

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J_0 = [0, t_1], \tag{2.7}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2.8}$$

La solution du problème (2.7)-(2.8) est donnée par :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Considérons N_1 opérateur définie par :

$$N_1 : \mathcal{C}([0,t_1], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}([0,t_1], \mathbb{R}^n)$$

$$N_1(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Pour montrer que N_1 admet un point fixe, il suffit de montrer que N_1 est une contraction. En effet, soient $x, y \in \mathcal{C}([0,t_1], \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $t \in [0, t_1]$, on a

$$\begin{aligned}
\|N_1(x)(t) - N_1(y)(t)\| &= \left\| \left(x_0 + \int_0^t f(s,x(s))ds\right) - \left(x_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds\right) \right\| \\
&\le \int_0^t \|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\|ds \\
&\le \int_0^t \vartheta(s)\|x(s)-y(s)\|ds \\
&\le \frac{1}{\tau}\int_0^t \tau\vartheta(s)e^{-\tau\int_0^t \vartheta(s)ds}\|x(s)-y(s)\|e^{\tau\int_0^t \vartheta(s)ds}ds \\
&\le \frac{1}{\tau}\int_0^t \tau\vartheta(s)e^{\tau\int_0^t \vartheta(s)ds}ds\|x-y\|_1 \\
&\le \frac{1}{\tau}\int_0^t \left[e^{\tau\int_0^t \vartheta(s)ds}\right]' ds\|x-y\|_1 \\
&\le \frac{1}{\tau}e^{\tau\int_0^t \vartheta(s)ds}\|x-y\|_1.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$e^{-\tau\int_0^t \vartheta(s)ds}\|N_1(x)(t)-N_1(y)(t)\| \leq \frac{1}{\tau}\|x-y\|_1.$$

D'o$\grave{u}$

$$\|N_1x-N_1y\|_1 \leq \frac{1}{\tau}\|x-y\|_1.$$

Donc N_1 est contractant, alors $\exists! x_1 \in \mathcal{C}([0,t_1],\mathbb{R}^n)$ tel que : $N_1x_1(t)=x_1(t)$.
Étape 2 :
Notons $C_1 := \{x \in (\mathcal{C}]t_1,t_2])$, tel que $x(t_1^+)$ existe$\}$ un espace de Banach.
On considère le problème

$$x'(t) = f(t,x(t)), \quad t \in]t_1,t_2], \tag{2.9}$$

$$\Delta x(t_k) = \eta_1(x(t_1^-)), \tag{2.10}$$

La solution du problème (2.9)-(2.10) est donnée par :

$$x(t) = x(t_1^-) + \eta_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^t f(s,x(s))ds.$$

Considérons N_2 opérateur défini par :

$$N_2 : C_1(]t_1,t_2],\mathbb{R}^n) \to C_1(]t_1,t_2],\mathbb{R}^n)$$
$$N_2(x)(t) = x(t_1^-) + \eta_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^t f(s,x(s))ds.$$

Soient $x,y \in C_1(]t_1,t_2],\mathbb{R}^n)$ alors de même façon, on a :
Pour $t \in]t_1,t_2]$

$$\|N_2x-N_2y\|_1 \leq \frac{1}{\tau}\|x-y\|_1.$$

Ce qui donne que N_2 est contractant, donc $\exists! x_2 \in C_1(]t_1,t_2],\mathbb{R}^n)$ tel que : $N_2x_2(t)=x_2(t)$.
Par conséquent, la solution du problème (2.1)-(2.2) est donnée par :

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) & t \in [0,t_1], \\ x_2(t) & t \in]t_1,t_2], \\ \ldots & \\ x_{k+1}(t) & t \in]t_k,t_{k+1}], \\ \ldots & \\ x_{r+1}(t) & t \in]t_r,1]. \end{cases}$$

Étape 3 :
Montrons maintenant l'unicité de la solution du problème (2.1)-(2.2) sur $[0,1]$.
Soit $t \in [0,1]$, supposons qu'il existe x,y deux solutions du problème (2.1)-(2.2).

- Si $t \in [0,t_1]$. Alors $x(t)$ est coinside avec $y(t)$.
  Le fait que $x(t)$ c'est l'unique solution sur $[0,t_1]$ c-à-d $x(t)=y(t)$.
- Si $t \in]t_1,t_2]$. De même façon on a : $x(t)=y(t)$.

  $\vdots$

- Si $t =]t_i, t_{i+1}]$. Alors $x(t) = y(t)$, pour $i = 1, ..., r$.

  $\vdots$

  Maintenant Montrons que : $x(t_i^+) = y(t_i^+)$, pour $i = 1, ..., r$.
  En effet, pour $t = t_i^+$

$$\begin{aligned} x(t_i^+) &= x(t_i^-) + \eta_i(x(t_i^-)) \\ &= y(t_i^-) + \eta_i(y(t_i^-)) \\ &= y(t_i^+). \end{aligned}$$

2.4.2 Résolution du problème par le théorème de Leray-Schauder

Théorème 2.4.2 *[31] Supposons que*

(H_1) *$f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction L^1-Carathéodory et $\eta_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.*

(H_2) *Il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et croissante, et $p \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ telle que*

$$\|f(t, x(t))\| \leq p(t)\psi(\|x\|), \qquad \text{pour } t \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

avec

$$\int_0^1 p(s)ds < \int_{\|x_0\|}^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)}.$$

Alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution.

Preuve. Considérons l'opérateur N défini par :

$$N : PC(J, \mathbb{R}^n) \to PC(J, \mathbb{R}^n)$$

$$x \mapsto N(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)).$$

La démonstration est basée sur le théorème de Leray-Schauder.
Les points fixes de N sont des solutions du problème (2.1)-(2.2), d'après le lemme 2.2.1.
Maintenant, montrons que N est complètement continu. En effet :
Étape 1 : N transforme chaque ensemble borné en un ensemble uniformement borné dans l'espace $PC(J, \mathbb{R}^n)$.
Soit $D \subset PC(J, \mathbb{R}^n)$ une partie bornée, alors $\exists m > 0$, $\forall x \in D : \|x\|_{PC} \leq m$.
Soit $x \in D$

$$\begin{aligned} \|N(x)(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_0^t \|f(s, x(s))\|ds + \sum_{0<t_k<t} \|\eta_k(x(t_k^-))\| \\ &\leq \|x_0\| + \int_0^t p(s)\psi(\|x(s)\|)ds + \sum_{k=1}^{r} \|\eta_k(x(t_k^-))\|. \end{aligned}$$

Le fait que $\|x\|_{PC} \leq m$ alors $\|x(t_k^-)\| \leq m$, pour $k = 1, ..., r$ c-à-d $x(t_k^-) \in \overline{B}(0, m)$.
Puisque les η_k sont continues et $\overline{B}(0, m)$ est compact alors $\sup\limits_{y \in \overline{B}(0,m)} \|\eta_k(y)\| < +\infty$.

Donc

$$\|Nx\|_{PC} \leq \|x_0\| + \|p\|_{L^1}\psi(m) + \sum_{k=1}^{r} \sup_{y \in \overline{B}(0,m)} \|\eta_k(y)\| := R$$

avec R une constante positive.
Étape 2 : N transforme chaque ensemble borné en un ensemble équicontinu dans l'espace $PC(J,\mathbb{R}^n)$,
Soient $\tau_1,\tau_2 \in J, \tau_1 < \tau_2$, et soit $x \in D$,
alors

1. Si $\tau_1 \neq t_i$ (ou bien $\tau_2 \neq t_i$), pour $i = 1,...,r$, on a

$$\begin{aligned}
\|N(x)(\tau_2) - N(x)(\tau_1)\| &= \left\| x_0 + \int_0^{\tau_2} f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<\tau_2} \eta_k(x(t_k^-)) \right. \\
&\quad \left. - \left[x_0 + \int_0^{\tau_1} f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<\tau_1} \eta_k(x(t_k^-)) \right] \right\| \\
&\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|f(s,x(s))ds\| + \sum_{\tau_1<t_k<\tau_2} \|\eta_k(x(t_k^-))\| \\
&\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} p(s)\psi(m)ds + \sum_{\tau_1<t_k<\tau_2} \sup_{y\in\overline{B}(0,m)} \|\eta_k(y)\|.
\end{aligned}$$

   Donc

$$\|N(x)(\tau_2) - N(x)(\tau_1)\| \to 0 \text{ quand } \tau_1 \to \tau_2.$$

2. Si $\tau_1 = t_i^-$, on considère $\delta_1 > 0$ tel que $\{t_k, k \neq i\} \cap [t_i - \delta_1, t_i + \delta_1] = \emptyset$.
   Pour $0 < h < \delta_1$, on a

$$\|N(x)(t_i) - N(x)(t_i - h)\| \leq \int_{t_i-h}^{t_i} p(s)\psi(m)ds \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

3. Si $\tau_2 = t_i^+$, on considère $\delta_2 > 0$ tel que $\{t_k, k \neq i\} \cap [t_i - \delta_2, t_i + \delta_2] = \emptyset$.
   Pour $0 < h < \delta_2$, on a

$$\|N(x)(t_i + h) - N(x)(t_i)\| \leq \int_{t_i}^{t_i+h} p(s)\psi(m)ds \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Étape 3 : N est continu :
Soit $\{x_n\}$ une suite dans $PC(J,\mathbb{R}^n)$ telle que $x_n \to x$, il existe un entier m tel que $\|x_n\|_{PC} \leq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\|x\|_{PC} \leq m$ donc $x_n \in D$ et $x \in D$

$$\|N(x_n)(t) - N(x)(t)\| \leq \int_0^t \|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\|ds + \sum_{k=1}^{r} \|\eta_k(x_n(t_k^-)) - \eta_k(x(t_k^-))\|.$$

Comme les η_k, $k = 1,...,r$ sont continues, et f est L^1-Carathéodory, alors

$$\|N(x_n) - N(x)\|_{PC} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Donc N est continu.
Alors, d'après les étapes 1, 2 et 3, et par le Théorème "Ascoli-Arzelà" on conclut que l'opérateur N est complètement continu.

Étape 4 : Estimation à priori :
Soit $x \in PC(J, \mathbb{R}^n)$ tel que $x = \lambda N x$ et $0 < \lambda < 1$, alors pour tout $t \in [0, t_1]$ on a

$$x(t) = \lambda x_0 + \lambda \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Puisque $0 < \lambda < 1$, alors

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t p(s)\psi(\|x(s)\|)ds, \quad t \in [0, t_1].$$

On Considère l'application ϕ donnée par :

$$\phi(t) = \|x_0\| + \int_0^t p(s)\psi(\|x(s)\|)ds, \quad t \in [0, t_1].$$

On a

$$\phi(0) = \|x_0\|, \quad \|x(t)\| \leq \phi(t), \quad t \in [0, t_1],$$

et

$$\phi'(t) = p(t)\psi(\|x(t)\|), \quad t \in [0, t_1].$$

Le fait que ψ est croissante, pour $t \in [0, t_1]$, on obtient

$$\begin{aligned} \phi'(t) \leq p(t)\psi(\phi(t)) &\Rightarrow \frac{\phi'(t)}{\psi(\phi(t))} \leq p(t) \\ &\Rightarrow \int_0^t \frac{\phi'(s)}{\psi(\phi(s))} ds \leq \int_0^t p(s)ds. \end{aligned}$$

Prenons le changement de variables $u = \phi(s) \Rightarrow du = \phi'(s)$, on trouve

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq \int_0^t p(s)ds.$$

Ce qui implique que pour chaque $t \in [0, t_1]$, on a

$$\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq \int_0^{t_1} p(s)ds.$$

L'application $\Theta_0(z) = \displaystyle\int_{\phi(0)}^{z} \frac{du}{\psi(u)}$ est continue croissante, alors Θ_0^{-1} existe et croissante et on a

$$\Theta_0(\phi(t)) \leq \int_0^{t_1} p(s)ds,$$

donc

$$\phi(t) \leq \Theta_0^{-1}\left(\int_0^{t_1} p(s)ds \right) = M_0.$$

Comme pour tout $t \in [0, t_1]$, $\|x(t)\| \leq \phi(t)$, alors

$$\sup_{t \in [0, t_1]} \|x(t)\| \leq M_0.$$

Maintenant, pour tout $t \in]t_1, t_2]$, on a

$$\begin{aligned}\|x(t_1^+)\| &\leq \|\eta_1(x(t_1^-))\| + \|x(t_1^-)\| \\ &\leq \sup_{y \in \overline{B}(0,M_0)} \|\eta_1(y)\| + M_0 := S_1\end{aligned}$$

et

$$x(t) = \lambda\big(x(t_1^-)) + \eta_1(x(t_1^-)\big) + \lambda \int_{t_1}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Alors

$$\|x(t)\| \leq S_1 + \int_{t_1}^{t} p(s)\psi(\|x(s)\|)ds, \quad t \in]t_1, t_2].$$

On considère l'application ϕ_1 donnée par :

$$\phi_1(t) = S_1 + \int_{t_1}^{t} p(s)\psi(\|x(s)\|)ds, \quad t \in]t_1, t_2].$$

Donc, on a

$$\phi_1(t_1^+) = S_1, \quad \|x(t)\| \leq \phi_1(t), \quad t \in]t_1, t_2],$$

et

$$\phi_1'(t) = p(t)\psi(\|x(t)\|), \quad t \in]t_1, t_2].$$

Le fait que ψ est croissante, pour $t \in]t_1, t_2]$, on obtient

$$\begin{aligned}\phi_1'(t) \leq p(t)\psi(\phi_1(t)) &\Rightarrow \frac{\phi_1'(t)}{\psi(\phi_1(t))} \leq p(t) \\ &\Rightarrow \int_{t_1}^{t} \frac{\phi_1'(s)}{\psi(\phi_1(s))}ds \leq \int_{t_1}^{t} p(s)ds.\end{aligned}$$

Prenons le changement de variables $u = \phi_1(s) \Rightarrow du = \phi_1'(s)$, on trouve

$$\int_{\phi_1(t_1^+)}^{\phi_1(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq \int_{t_1}^{t} p(s)ds.$$

Ce qui implique que pour tout $t \in]t_1, t_2]$, on a

$$\int_{\phi_1(t_1^+)}^{\phi_1(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq \int_{t_1}^{t_2} p(s)ds.$$

Si on considère l'application $\Theta_1(z) = \displaystyle\int_{\phi_1(t_1^+)}^{z} \frac{du}{\psi(u)}$, on obtient

$$\phi_1(t) \leq \Theta_1^{-1}\left(\int_{t_1}^{t_2} p(s)ds\right) := M_1.$$

Comme pour tout $t \in]t_1, t_2]$, $\|x(t)\| \leq \phi_1(t)$, alors

$$\sup_{t \in]t_1, t_2]} \|x(t)\| \leq M_1.$$

Par itération pour $]t_r, 1]$. On trouve qu'il existe une constante M_r telle que

$$\sup_{t\in]t_r,1]} \|x(t)\| \leq \Theta_r^{-1}\left(\int_{t_r}^{1} p(s)ds\right) := M_r.$$

Comme on a choisi x arbitrairement, alors pour toute solution x du problème (2.1)-(2.2) on a

$$\|x\|_{PC} \leq \max\{M_k, k = 0, 1, ..., r\} := 1.$$

Soit l'ensemble

$$V = \{x \in PC : \|x\|_{PC} < 1\}.$$

Par conséquence, l'opérateur $N : \overline{V} \to PC$ est complètement continu.
Par la définition de V il n'existe pas $x \in \partial V$ tel que $x = \lambda Nx$ pour tout $0 < \lambda < 1$.
Il reste le choix que N admette un point fixe $x \in \overline{V}$ qui est solution du (2.1)-(2.2).

Application : On considère l'équation différentielle impulsive suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + x^2(t), \quad t \in J = [0, 1], \quad t \neq \dfrac{1}{2}, \\ \Delta x(t_{\frac{1}{2}}) = x\left(\dfrac{1}{2}^-\right), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

► Montrons que $f(x) = 1 + x^2(t)$ est L^1-Carathéodory.
En effet

1. Soit $t \mapsto f(t, x)$ est mesurable et continue pour $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $x \mapsto f(t, x)$ est continue pour $t \in [0, 1]$.
3. Pour $\omega > 0$, supposons $\|x\| < \omega$, on a :

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &= \|1 + x^2\| \\ &\leq 1 + \|x^2\| \\ &\leq 1 + \omega^2. \end{aligned}$$

Alors $\exists h_\omega(t) = 1 + \omega^2 \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$.

► Soit $\psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ la fonction définie par $\psi(u) = 1 + u^2$, ψ est une fonction positive et croissante et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{\psi(u)} = \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = arctgu\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Alors

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &= \|1 + x^2\| \\ &\leq 1 + \|x^2\| \\ &\leq 1 + \omega^2 \\ &= \psi(\omega). \end{aligned}$$

Donc pour $p(t) = 1$ et d'après le théorème 2.4.2, le problème (2.11) admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

2.4.3 Résolution du problème par le théorème de Krasnoseleskii

Théorème 2.4.3 *[24] Supposons que :*

(H′) $f : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *est une fonction* L^1-*Carathéodory : on a* $\forall \omega > 0, \exists h_\omega \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ *telle que*

$$\|f(t,x)\| \leq h_\omega(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in J \quad \textit{et} \quad \forall \; \|x\| \leq \omega.$$

(H″) $\eta_k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), k = 1, ..., r$ *avec* $\exists c_k > 0,$ *telque*

$$\|\eta_k(x) - \eta_k(y)\| \leq c_k \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

avec

$$\sum_{k=0}^{r} c_k < 1. \tag{2.12}$$

Alors le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution.

Preuve. Considérons l'opérateur N_3 défini par :

$$\begin{aligned} N_3 : PC(J, \mathbb{R}^n) &\to PC(J, \mathbb{R}^n) \\ x \mapsto N_3(x)(t) &= x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.2.1, les points fixes de l'opérateur N_3 sont les solutions du problème (2.1)(2.2). En appliquant le théorème de Krasnoselskii sur l'opérateur N_3.

$$N_3(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)),$$

L'opérateur N_3 est décomposé en deux applications A et B tel que :

$$A(x)(t) = x_0 + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)),$$

et

$$B(x)(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Montrons que A est une contraction et B est complètement continue.
En effet :
Étape 1 : Soit M une partie non vide, convexe et fermée de PC.
On suppose que : $A, B : M \to PC$, avec M est définie par la formule suivante :

$$\exists \ell > 0, M = \{x \in PC, \text{ tel que } \|x\|_{PC} \leq \ell\}.$$

Montrons que $A(x)+B(y)\in M, \forall x,y\in M$. En effet :
Soient $x,y\in M$ donc on a $\|x\|_{PC}\leq \ell$ et $\|y\|_{PC}\leq \ell$, donc

$$\begin{aligned}
\|A(x)(t)+B(y)(t)\| &= \left\| x_0+\sum_{0<t_k<t}\eta_k(x(t_k^-))+\int_0^t f(s,y(s))ds \right\| \\
&\leq \|x_0\|+\left\|\sum_{0<t_k<t}\eta_k(x(t_k^-))\right\|+\left\|\int_0^t f(s,y(s))ds\right\| \\
&\leq \|x_0\|+\sum_{0<t_k<t}\|\eta_k(x(t_k^-))\|+\int_0^t \|f(s,y(s))\|ds \\
&\leq \|x_0\|+\sum_{k=1}^{r}\|\eta_k(x(t_k^-))\|+\int_0^t h_\omega(s)ds \\
&\leq \|x_0\|+\sum_{k=1}^{r}\|\eta_k(x(t_k^-))\|+\|h_\omega\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Pour $\|x\|_{PC}\leq \ell$ on a $\|x(t_k^-)\|\leq \ell, k=1,...,r$ donc $x(t_k^-)\in \overline{B}(0,\ell)=\{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|\leq \ell\}$.
Puisque les η_k sont continues sur le compact $\overline{B}(0,\ell)$ alors

$$\sup_{x\in\overline{B}(0,\ell)}\|\eta_k(x)\|<+\infty.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|A(x)(t)+B(y)(t)\| &\leq \|x_0\|+\sum_{k=1}^{r}\|\eta_k(x(t_k^-))\|+\|h_\omega\|_{L^1} \\
&\leq \|x_0\|+\sum_{k=1}^{r}\sup_{x\in\overline{B}(0,\ell)}\|\eta_k(x)\|+\|h_\omega\|_{L^1} \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Donc $\|A(x)(t)+B(y)(t)\|_{PC}\leq C$ avec C une constante positive, alors $A(x)+B(y)\in M$.
Étape 2 : On montre que A est une contraction :
Soient $x,z\in PC(J,\mathbb{R}^n)$, pour $t\in[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\|A(x)(t)-A(z)(t)\| &= \left\| x_0+\sum_{0<t_k<t}\eta_k(x(t_k^-))-x_0-\sum_{0<t_k<t}\eta_k(z(t_k^-))\right\| \\
&= \left\|\sum_{0<t_k<t}\Big[\eta_k(x(t_k^-))-\eta_k(z(t_k^-))\Big]\right\| \\
&\leq \sum_{0<t_k<t}\|\eta_k(x(t_k^-))-\eta_k(z(t_k^-))\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{r}c_k\|x-z\|.
\end{aligned}$$

Puisque (2.12) est satisfaite, alors A est une contraction.
Étape 3 : On montre que B est complètement continue en appliquant le théorème d'Ascoli-Arzelà :

1. B transforme tout ensemble borné en un ensemble borné dans l'espace $PC(J,\mathbb{R}^n)$.
   Soit $x \in M$
$$\begin{aligned}\|B(x)(t)\| &= \left\| \int_0^t f(s,x(s))ds \right\| \\ &\le \int_0^t \|f(s,x(s))\|ds \\ &\le \int_0^t h_\omega(s)ds \\ &\le \|h_\omega\|_{L^1}.\end{aligned}$$

2. B transforme chaque ensemble borné en un ensemble équicontinu dans l'espace $PC(J,\mathbb{R}^n)$:
   Soit $t_1, t_2 \in [0,1]$ tel que $t_1 < t_2$ et soit $x \in M$
$$\begin{aligned}\|B(x)(t_2) - B(x)(t_1)\| &= \left\| \int_0^{t_2} f(s,x(s))ds - \int_0^{t_1} f(s,x(s))ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^{t_1} f(s,x(s))ds + \int_{t_1}^{t_2} f(s,x(s))ds - \int_0^{t_1} f(s,x(s))ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s,x(s))ds \right\| \\ &\le \int_{t_1}^{t_2} \|f(s,x(s))\|ds \\ &\le \int_{t_1}^{t_2} h_\omega(s)ds.\end{aligned}$$
   Quand $t_1 \to t_2$ alors $\|B(x)(t_2) - B(x)(t_1)\| \to 0$, donc B est équicontinu.

3. Soit $\{x_n\}$ une suite dans $PC(J,\mathbb{R}^n)$ converge vers x. Il existe un entier ℓ tel que $\|x_n\|_{PC} \le \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\|x\|_{PC} \le \ell$ donc $x_n \in M$ et $x \in M$, on a
$$\begin{aligned}\|B(x_n) - B(x)\| &= \left\| \int_0^t f(s,x_n(s))ds - \int_0^t f(s,x(s))ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t (f(s,x_n(s))ds - f(s,x(s))ds \right\| \\ &\le \int_0^t \|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\|ds.\end{aligned}$$
   Puisque f est une fonction continue, nous avons :
$$\|B(x_n) - B(x)\| \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$
   Donc B est continu.

D'après le théorème de Krasnoselskii 1.2.4, le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution.

Application : On considère l'équation différentielle impulsive suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{t^3 + x^3(t)}{t^2 + x^2(t)}, \quad t \in J = [0,1], \quad t \neq \dfrac{1}{2}, \\ \Delta x(t_{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2} x(t^-_{\frac{1}{2}}), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

► On pose la fonction f qui définie par :

$$\begin{aligned} f : J \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t,x) &\mapsto \frac{t^3 + x^3}{t^2 + x^2}, \end{aligned}$$

est L^1-Carathéodory car :

1. Soit $f(t,x)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $f(t,x)$ est continue pour tout $t \in [0,1]$ car :
   Pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose

$$\begin{cases} t = r \cos\theta, \\ x = r \sin\theta, \end{cases}$$

   où $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, +\pi[$.
   On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{(t,x)\to(0,0)} f(t,x) &= \lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3(\theta) + r^3\sin^3(\theta)}{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} \\ &= \lim_{r\to 0} r(\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

3. Pour tout $\omega > 0$, on a $\|x\| \leq \omega$, et d'après l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\| &= \left\| \frac{t^3 + x^3}{t^2 + x^2} \right\| \\ &\leq \frac{1 + \omega^3}{1 + \omega^2} = h_\omega(t). \end{aligned}$$

   avec $h_\omega(t) \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+)$.
   Ainsi f est L^1-Carathéodory.

► On pose

$$\eta_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2}x, \quad x \in \mathbb{R},$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \|\eta_{\frac{1}{2}}(x) - \eta_{\frac{1}{2}}(y)\| &= \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - y|. \end{aligned}$$

Avec $\dfrac{1}{2} < 1$, donc $\eta_{\frac{1}{2}}(x, y)$ est une contraction.
Alors d'après le théorème 2.4.3, le problème (2.13) admet au moins une solution sur $[0, 1]$.

Chapitre 3

Problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Ce chapitre contient deux parties, la première c'est le calcul fractionnaire et la deuxième est consacré à l'étude d'un problème de Cauchy pour des équations différentielles fractionnaires.

3.1 Fonctions spéciales

Dans cette partie on va présenter deux fonctions spéciales : les fonctions Gamma et Bêta qui seront utilisées dans la suite et jouent un rôle capital dans la théorie du calcul fractionnaire.

3.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler, qui généralise la factorielle $n!$ et permet n de prendre aussi des valeurs non entiers et même des valeurs complexes.

Définition 3.1.1 *[11] La fonction Gamma Γ est définie sur $\mathbb{C}$ par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad \mathfrak{Re}(z) > 0. \tag{3.1}$$

Cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, si $\mathfrak{Re}(z) > 0$.

Proposition 3.1.1 *[29,32] L'une des propriétés fondamentaux de la fonction Gamma satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \mathfrak{Re}(z) > 0. \tag{3.2}$$

En particulier :

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. On démontre cette proposition par une intégration par partie de (3.1). Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathfrak{Re}(z) > 0$, alors

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(z+1)-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z} dt \\ &= \Big[- e^{-t} t^{z} \Big]_0^{+\infty} + z \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt}_{\Gamma(z)} .\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

En particulier, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1,$$

et en utilisant (3.2), on obtient pour $z \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{c}\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1.1 = 1! \\ \Gamma(3) = 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2! \\ \Gamma(4) = 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!\end{array}$$

Donc

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Exemple 3.1.1

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

Proposition 3.1.2 *[30,28] Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\ \sqrt{\pi}}{4^n\ n!}, \tag{3.3}$$

avec

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Preuve. On a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

En effet,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

On pose le changement de variable suivant :

$$u = \sqrt{t} \Rightarrow t = u^2 \text{ et } dt = 2u\, du.$$

D'o$\grave{u}$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \cdot u\, du \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

D'après l'intégrale de Gausse, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Alors

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Calculons maintenant (3.3), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n - \frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) . \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) . \Gamma\left(n - \frac{3}{2} + 1\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) . \left(n - \frac{3}{2}\right) . \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) . \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} . \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right) . \left(\frac{2n-3}{2}\right) \dots \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \frac{1}{2^n} . (2n-1) . (2n-3) \dots 3.1.\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

En multipliant et en divisant par $(2n-2)(2n-4) \dots 2$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n-1).(2n-2) \dots 3.2.1}{2^n.(2n-2).(2n-4) \dots 2} . \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^n . 2^{n-1} . (n-1)!} \\ &= \frac{(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^{n-1} . (n-1)!}.\end{aligned}$$

En multipliant et en divisant par $2n$, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{2n.(2n-1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n-1} . 2n . (n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!\ \sqrt{\pi}}{4^n\ n!}.\end{aligned}$$

Par conséquent (3.3) est prouvée.

3.1.2 Fonction Bêta

Définition 3.1.2 *[23,29] Dans de nombreux cas, il est préférable d'utiliser la fonction Bêta au lieu de certaines combinaisons de valeurs de la fonction Gamma.*

$$B(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \qquad \mathfrak{Re}(z)>0,\ \mathfrak{Re}(w)>0, \tag{3.4}$$

cette intégrale est convergente pour tout $z,w\in\mathbb{C}$.

Proposition 3.1.3 *[30] La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \qquad \mathfrak{Re}(z)>0,\ \mathfrak{Re}(w)>0. \tag{3.5}$$

D'où il résulte que Bêta est symétrique :

$$B(z,w)=B(w,z), \qquad \mathfrak{Re}(z)>0,\ \mathfrak{Re}(w)>0.$$

Preuve. Soient $(z,w)\in\mathbb{C}^2$ avec $\mathfrak{Re}(z)>0$ et $\mathfrak{Re}(w)>0$, telle que

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$$

$$\Gamma(w)=\int_0^{+\infty} e^{-s}s^{w-1}ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w)&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}x^{w-1}e^{-x}dt\ dx\\&=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-(t+x)}x^{w-1}dt\ dx.\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $r=t+x\Rightarrow dr=dt+dx$ et $0<r<+\infty$.
Et on pose $t=rs\Rightarrow s=\frac{t}{r}=\frac{t}{t+x}$ donc

$$\begin{gathered}\text{si } t=0\Rightarrow s=0\\ \text{si } t=+\infty\Rightarrow s=1,\end{gathered}$$

on a

$$dr=dt+dx\Rightarrow dx=dr-dt,$$

et on a $t=rs$, donc

$$dx=dr-(rds+sdr)\Rightarrow dx=(1-s)dr-rds.$$

Alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} dt &=& rds+sdr\\ dx &=& (1-s)dr-rds\end{array}\right. \Rightarrow dtdx=rdsdr.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(w) &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 e^{-r}(rs)^{z-1}(r(1-s))^{w-1}r\; ds\; dr\\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 e^{-r}r^{z-1}s^{z-1}r^{w-1}(1-s)^{w-1}r\; ds\; dr\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z-1}r^{w-1}r\; dr \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{w-1}ds\\
&= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z+w-1}dr \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{w-1}ds\\
&= \Gamma(z+w)B(z,w).
\end{aligned}$$

D'où $B(z,w) = \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.

3.2 Calcul Fractionnaire

Dans cette section on va présenter les notions de l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et Caputo.

3.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$ au sens de Riemann-Liouville généralise la célèbre formule attribuée à Cauchy d'intégrale répété n-fois,

$$I_a^n f(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n$$

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

D'après la généralisation du factoriel par la fonction Gamma ; $\Gamma(n) = (n-1)!$. Riemann observe que le second membre de (3.6) pourrait avoir un sens même pour des valeurs non-entières de n, il était donc naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suite :

Définition 3.2.1 (Intégrale de Riemann-Liouville) *[18]*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville de f notée I_a^α, l'intégrale suivante :

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \qquad (x > a, \mathfrak{Re}(\alpha) > 0). \tag{3.7}$$

On note I_0^α par I^α.

Exemple 3.2.1 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta > -1, \quad \alpha > 0.$$

On a alors

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^\beta dt. \tag{3.8}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$\tau = \frac{t-a}{x-a}, \qquad \forall x > a.$$

Alors

$$t = a + (x-a)\tau \qquad avec \qquad 0 \leq \tau \leq 1 \qquad donc \qquad dt = (x-a)d\tau.$$

Donc, (3.8) devient

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1}(a+(x-a)\tau-a)^\beta (x-a)\ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}(x-a)^{\beta+1}\tau^\beta\ d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha+\beta}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^\beta\ d\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^\beta\ d\tau. \end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (3.4) puis de la relation (3.5), on aura

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (x-a)^\beta &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha) \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}. \end{aligned}$$

Alors, on obtient l'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction f, telle que

$$I_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \tag{3.9}$$

Cas particulier :

Si $\alpha = 1$. D'après (3.2) on déduit que

$$I_a^1 (x-a)^\beta = \frac{1}{\beta+1}(x-a)^{1+\beta}.$$

Si $\beta = 0$. On a dans ce cas

$$I_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha.$$

Proposition 3.2.1 *[22] Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Pour α et β des nombres complexes où $\mathfrak{Re}(\alpha) > 0$ et $\mathfrak{Re}(\beta) > 0$, alors*

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x) \right] = I_a^{\alpha+\beta} f(x). \tag{3.10}$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$, On a par définition de I_a^α

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_a^\alpha\left[I_a^\beta f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left[I_a^\beta f\right](t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-s)^{\beta-1}f(s)ds\right]dt.
\end{aligned}
$$

D'après le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on aura :

$$
I_a^\alpha\left[I_a^\beta f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)\underbrace{\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt}_{\mathcal{I}}\ ds. \tag{3.11}
$$

En effectuant le changement de variable suivant dans l'intégrale $\mathcal{I}$:

$$
\tau = \frac{t-s}{x-s}, \qquad \forall x > s,
$$

alors

$$
t = s + (x-s)\tau, \qquad \text{avec} \qquad (0 \leq \tau \leq 1), \qquad \text{donc} \qquad dt = (x-s)d\tau.
$$

On obtient

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^1 (x-s-(x-s)\tau)^{\alpha-1}(s+(x-s)\tau-s)^{\beta-1}(x-s)\ d\tau \\
&= \int_0^1 (x-s)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}(x-s)^{\beta-1}\tau^{\beta-1}(x-s)\ d\tau \\
&= \int_0^1 (x-s)^{\alpha+\beta-1}\tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\ d\tau \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 \tau^{\beta-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\ d\tau.
\end{aligned}
$$

En tenant compte de la définition de Bêta (3.4) puis de la relation (3.5), on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I} &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha) \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}
$$

En retournant à la formule (3.11), on obtient alors

$$
\begin{aligned}
I_a^\alpha\left[I_a^\beta f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)\left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-s)^{\alpha+\beta-1}\right]\ ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\ ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\ ds \\
&= I_a^{\alpha+\beta}f(x).
\end{aligned}
$$

D'o*ù* le résultat.

3.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 3.2.2 (Dérivée de Riemann-Liouville) *[22,30]*
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}([a,b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f notée D_a^α, la fonction définie par :

$$D_a^\alpha f(x) = D^n[I_a^{n-\alpha} f(x)]$$

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \quad (n = [\Re e(\alpha)+1], x > a). \quad (3.12)$$

Où $[.]$ désigne la partie entière d'un nombre réel et $D^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n$.
En particulier, pour $\alpha \in \mathbb{N}$ la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique ;

Si $\alpha = 0$, on a

$$D_a^0 f(x) = D^1[I_a^1 f(x)] = f(x).$$

Si $\alpha = n, (n \in \mathbb{N})$, on a

$$D_a^n f(x) = D^{n+1}[I_a^{n+1-n} f(x)] = D^{n+1}[I_a^1 f(x)] = D^n f(x).$$

Exemple 3.2.2 *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = (x-a)^\beta, \quad x \in [a,b] \quad \text{où} \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \in]n-1, n[$, nous avons

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = D^n[I_a^{n-\alpha}(x-a)^\beta].$$

D'après (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} D_a^\alpha (x-a)^\beta &= D^n\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}(x-a)^{n-\alpha+\beta}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}\right]. \end{aligned}$$

On sait que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1) \ldots (n-\alpha+\beta-n+1)(x-a)^{n-\alpha+\beta-n} \\ &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1) \ldots (\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Alors

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n+1-\alpha)}\left[\frac{\Gamma(\beta+n+1-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\right].$$

Alors, on obtient la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction f, telle que

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}.$$

Cas particulier ;

Si $\alpha = 1$. D'après (3.2), on déduit que

$$D_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} = \beta(x-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dx}(x-a)^\beta.$$

Si $\beta = 0$. On a dans ce cas

$$D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

Ce qui montre que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

Lemme 3.2.1 *[22] Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n-1 \le \alpha < n$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. Supposons que $D_a^\alpha f = 0$. Alors*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n}, \quad (n = [\alpha]+1).$$

Où les $c_k, (k = 0, 1, ..., n-1)$ sont des constantes réelles.

Preuve. Comme $D_a^\alpha f = 0$, alors

$$(D^n I_a^{n-\alpha} f)(x) = 0 \Rightarrow (I_a^{n-\alpha} f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k.$$

Par composition avec I_a^α, on obtient

$$\begin{aligned}(I_a^n f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k I_a^\alpha (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}(x-a)^{k+\alpha}.\end{aligned}$$

En remplaçant $(I_a^n f)(x)$ par son expression, on trouve

$$\begin{aligned}(I_a^n f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}(x-a)^{k+\alpha}.\end{aligned}$$

Puis, par une dérivation classique d'ordre n par rapport à x, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n}.$$

Lemme 3.2.2 *[22] Si* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}([a.b])$*, alors on a l'égalité*

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

Preuve. En se basant sur la propriété classique :

$$(D^n I_a^n f)(x) = f(x).$$

Et en utilisant la définition 3.2.2 et de proposition 3.2.1 on déduit

$$\begin{aligned}(D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) &= D^n[I_a^{n-\alpha}(I_a^\alpha f(x))]\\ &= D^n[I_a^n f(x)]\\ &= f(x).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Proposition 3.2.2 *[22] Si* $n > \mathfrak{Re}(\alpha) > \mathfrak{Re}(\beta) > n-1 > 0$*, alors pour* $f(x) \in \mathcal{C}([a, b])$*, on a la relation*

$$(D_a^\beta I_a^\alpha f)(x) = I^{\alpha-\beta} f(x).$$

En particulier, si $\beta = k \in \mathbb{N}$ *et* $\mathfrak{Re}(\alpha) > k$*, alors*

$$(D_a^k I_a^\alpha f)(x) = I^{\alpha-k} f(x). \tag{3.13}$$

Preuve. En utilisant la définition 3.2.2, la proposition 3.2.1, et le lemme 3.2.2, on déduit

$$\begin{aligned}(D_a^\beta I_a^\alpha f)(x) &= D^n[I_a^{n-\beta}(I_a^\alpha f(x))]\\ &= D^n[I_a^{n+\alpha-\beta} f(x)]\\ &= D^n[I_a^n(I_a^{\alpha-\beta} f(x))]\\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Remarque 3.2.1 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est non-commutative, i.e :*

$$D_a^\alpha \circ D_a^\beta \neq D_a^\beta \circ D_a^\alpha.$$

Proposition 3.2.3 (Linéarité) *[13]*
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[,\ n \in \mathbb{N}^*$ *et soient* f *et* g *deux fonctions pour lesquelles les dérivées fractionnaires d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$ *de Riemann-Liouville existent. Alors pour* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$*, on a*

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(D_a^\alpha f)(x) + \mu(D_a^\alpha g)(x).$$

3.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Les problèmes appliqués requièrent une définition des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales physiquement intraitables. Malheureusement, la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann- Liouville ne satisfait pas cette demande, ce qui a engendré une définition alternative qui répond à ce besoin. C'est Caputo qui a proposé cette nouvelle définition de dérivée fractionnaire, qui d'ailleurs porte son nom.

Définition 3.2.3 (Dérivée de Caputo) *[23]*
Soient $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$. *On appelle dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$ *au sens de Caputo d'une fonction* f *notée* ${}^cD_a^\alpha$, *la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(x) &= I_a^{n-\alpha}[D^n f(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)dt, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1, x > a). \end{aligned} \tag{3.14}$$

On note ${}^cD_0^\alpha$ *par* ${}^cD^\alpha$.

Remarque 3.2.2 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante* $f(x) = C$ *est nulle, autrement dit :* ${}^cD_a^\alpha C = 0$.

Proposition 3.2.4 (Linéarité) *[23]*
Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}^*$ *et soient* f *et* g *deux fonctions pour lesquelles les dérivées fractionnaires d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$ *de Caputo (3.14) existent. Alors pour* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *on a*

$$D_a^\alpha(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(D_a^\alpha f)(x) + \mu(D_a^\alpha g)(x).$$

3.2.4 Lien entre les dérivées fractionnaires de Caputo et de Riemann-Liouville

Proposition 3.2.5 *[22] Si* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, *la relation reliant la dérivée au sens de Riemann-Liouville (3.12) et celle de Caputo (3.14) est donnée par :*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha f(x) &= D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right] \\ &= D_a^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)] + 1, \ x > a). \end{aligned} \tag{3.15}$$

En particulier, lorsque $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]0, 1[$, on a :

$${}^cD_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}. \tag{3.16}$$

A partir de (3.15), on déduit que la dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Riemann-Liouville coïncide avec celle de Caputo, si a est un zéro d'ordre n de f.
Plus précisément, on a :

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, ..., n-1). \tag{3.17}$$

Alors,

$${}^cD_a^\alpha f(x) = D_a^\alpha f(x).$$

3.3 Lemmes fondamentaux

Lemme 3.3.1 *[22] Soit* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[,\ n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$*, alors*

$$({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)\ (x) = f(x). \tag{3.18}$$

Preuve. Soit $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[, n\ \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$.La relation (3.15) de la proposition 3.2.5 permet d'obtenir le résultat suivant :

$$({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = (D_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_a^\alpha f)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Puis d'après le lemme 3.2.2, on a

$$({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(I_a^\alpha f)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}.$$

Et comme $k \leq n-1 < \mathfrak{Re}(\alpha)$, pour $k = 0, 1, ..., n-1$, alors les dérivées

$$(I_a^\alpha f)^{(k)}(a) = 0.$$

Ce qui donne

$$({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(x) = f(x).$$

Lemme 3.3.2 *[36] Soit* $\alpha > 0$*, alors l'équation différentielle*

$${}^cD^\alpha f(x) = 0,$$

admet une solution

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{n-1}x^{n-1}, \quad (n = [\alpha]+1),$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, (i = 0, 1, 2, ..., n-1)$.

Lemme 3.3.3 *[36] Soit* $\alpha > 0$*, alors*

$$I^{\alpha c}D^\alpha f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_{n-1}x^{n-1} + f(x), \quad (n = [\alpha]+1),$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, (i = 0, 1, 2, ..., n-1)$.

Lemme 3.3.4 *[23] Soit* $\mathfrak{Re}(\alpha) \in]n-1, n[,\ n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$*, alors*

$$(I_a^{\alpha c}D_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad (n = [\mathfrak{Re}(\alpha)]+1).$$

En particulier, pour $\alpha \in]0,1[$*,*
on a

$$(I^{\alpha c}D_a^\alpha f)(x) = f(x) - f(0).$$

3.4 Résolution d'un problème de Cauchy pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire

Dans cette section, on s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha < 1, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

3.4.1 Solution d'un problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire

Lemme 3.4.1 *[4,21] Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction x est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \tag{3.20}$$

si et seulement si x est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire

$${}^cD^\alpha x(t) = h(t), \quad t \in [0, T], \tag{3.21}$$

$$x(0) = x_0. \tag{3.22}$$

Preuve. Tout d'abord vérifiant l'équation (3.21).
Soit x la solution de l'équation intégrale (3.20), c-à-d

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &= x_0 + I^\alpha h(t). \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur ${}^cD^\alpha$ aux deux membres de l'égalité précédente, et comme il est linéaire, on aura

$${}^cD^\alpha x(t) =^c D^\alpha(x_0) + ({}^cD^\alpha I^\alpha h)(t).$$

D'après le lemme 3.3.1 et la remarque 3.2.2, on obtient

$${}^cD^\alpha x(t) = h(t), \quad t \in [0, T].$$

Il reste à vérifier la condition initiale (3.22), d'après (3.20) on a

$$\begin{aligned} |x(t)-x_0| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|h(s)|ds \\ &\leq \frac{\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds \\ &\leq \frac{\|h\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}t^\alpha \\ &\leq \frac{\|h\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha. \end{aligned}$$

Quand $t \to 0$, on obtient (3.22).
Alors x est une solution de problème (3.21)-(3.22).

Inversement :
Supposons que x est solution de problème (3.21)-(3.22).
En appliquant l'opérateur I^α aux deux membres de l'égalité dans l'équation (3.21), on aura

$$(I^{\alpha c}D^\alpha x)(t) = I^\alpha h(t)$$

$$(I^{\alpha c}D^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \tag{3.23}$$

le fait que $\alpha \in]0,1[$, et d'après le lemme 3.3.4, on aura

$$(I^{\alpha c}D^\alpha x)(t) = x(t) - x(0). \tag{3.24}$$

D'après (3.23) et (3.24), on aura

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds$$

et on a

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

et comme $x(0) = x_0$, on obtient

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

3.4.2 Théorème d'existence et d'unicité de solution

Théorème 3.4.1 *Soit* $0 < \alpha < 1$, *et* G *un ouvert de* $\mathbb{R}$, *et soit* $f : [0,T] \times G \to \mathbb{R}$, *une fonction telle que, pour chaque* $u \in G, f(t,u) \in \mathcal{C}[0,T]$ *et on suppose qu'il existe une constante* $k > 0$ *telle que :*

$$|f(t,u)-f(t,v)| \leq k|u-v|, \text{ pour tout } t \in [0,T], \text{ et tout } u,v \in G.$$

Si

$$k\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1. \tag{3.25}$$

Alors le problème de Cauchy (3.19) admet une solution unique sur $\mathcal{C}[0,T]$.

Preuve. D'après le lemme 3.4.1, on a la solution de problème (3.19) est :

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds$$

Transformons le problème (3.19) en un problème du point fixe, en utilisant le théorème de Banach.
Considérons l'opérateur :$F : \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$, défini par :

$$F(x)(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds.$$

F est bien défini. En effet, le fait que $x \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ alors $f(t,x(t))$ continue donc $F \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$.
Pour montrer que F admet un unique point fixe, Il suffit de montrer que F est une contraction, en effet :
Si $x,y \in \mathcal{C}[0,T]$ alors pour tout $t \in [0,T]$ on a

$$\begin{aligned}
|F(x)(t)-F(y)(t)| &= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds \\
&\quad - \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds\right]\Bigg| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \big(f(s,x(s))-f(s,y(s))\big)(t-s)^{\alpha-1}ds\right| \\
&\leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}|f(s,x(s))-f(s,y(s))| \\
&\leq \frac{kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\|F(x)-F(y)\|_{\infty} \leq \frac{kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_{\infty}.$$

Puisque (3.25) est satisfaite donc le problème (3.19) admet une unique solution sur $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$.

Application. Considérons le problème de Cauchy fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}x(t) = \dfrac{2}{19+e^{t}}|x(t)|, \quad t \in J = [0,1], \quad \alpha \in]0,1[, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{3.26}$$

Posons
$$f(t,x) = \frac{2|x(t)|}{19+e^t}, \qquad (t,x) \in J \times \mathbb{R}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in J$, alors on a :

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \left|\frac{2}{19+e^t}(x-y)\right| \\
&\leq \left|\frac{2}{19+e^t}\right||x-y| \\
&\leq \frac{2}{20}|x-y| \\
&\leq \frac{1}{10}|x-y|.
\end{aligned}$$

D'oǜ la condition (3.25) est vérifiée avec $k = \frac{1}{10}$.
Maintenant la condition (3.25) doit satisfaite pour du appriori de α.
En effet
$$\frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1}{10\Gamma(\alpha+1)} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > \frac{1}{10} = 0,1. \tag{3.27}$$

Alors par le théorème 3.4.1, le problème (3.26) a une solution unique sur $[0,1]$ pour les valeurs de α satisfaisant (3.27).

Chapitre 4

Problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaires impulsives

Ce chapitre est consacré à l'étude d'existence et d'unicité de solutions du problème de Cauchy d'équation différentielle d'ordre fractionnaire avec impulsions.
Premièrement, en appliquant le théorème du point fixe de Banach et deuxièmement, le théorème du point fixe de Schaefer.

4.1 Solution d'un problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaires impulsives

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$^{c}D_{a}^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)), \quad t \in J = [0, T], t \neq t_k, k = 1, ..., r, 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.1}$$

$$\Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, ..., r, \tag{4.2}$$

$$x(0) = x_0, \tag{4.3}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Définition 4.1.1 *Une fonction $x \in PC(J, \mathbb{R})$ dont la dérivée α existe sur $J' = [0, T] \setminus \{t_1, ..., t_r\}$ est dite solution de (4.1)-(4.3) si x satisfait l'équation $^{c}D_{a}^{\alpha}x(t) = f(t, x(t))$ sur J', et satisfont aux conditions*

$$\Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, ..., r,$$

$$x(0) = x_0.$$

Lemme 4.1.1 *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et soit $h : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction x est une solution de l'équation intégral fractionnaire (4.1)-(4.3).*

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds, & si \ \ t \in [0, t_1], \\ x_0 + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} h(s)ds & \\ + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x(t_i^-)), & si \ \ t \in]t_k, t_{k+1}], k = 1, ..., r. \end{cases} \tag{4.4}$$

Où $k = 1, ..., r$ si et seulement si x est une solution de :

$$^cD_a^\alpha x(t) = h(t), \quad t \in J', t \neq t_k, k = 1, ..., r, 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.5}$$

$$\Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k^-)), \quad k = 1, ..., r, \tag{4.6}$$

$$x(0) = x_0, \tag{4.7}$$

Preuve. Supposons que x satisfait (4.5)-(4.6) et (4.7).
Si $t \in [0, t_1]$, alors

$$^cD^\alpha x(t) = h(t) \Rightarrow I_0^\alpha(^cD^\alpha x(t)) = I_0^\alpha h(t),$$

où I_0^α l'intégral de Riemann-Liouville et d'après le lemme 3.3.3, on aura

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds \\ &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds. \end{aligned}$$

En particulier,

$$x(t_1^-) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} h(s)ds,$$

Si $t \in]t_1, t_2]$, alors

$$^cD^\alpha x(t) = h(t) \Rightarrow I_{t_1^+}^\alpha(^cD^\alpha x(t)) = I_{t_1^+}^\alpha h(t),$$

où $I_{t_1^+}^\alpha$ l'intégral de Riemann-Liouville et d'après le lemme 3.3.3 on aura

$$x(t) = x(t_1^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds.$$

Or $\Delta x(t_1) = x(t_1^+) - x(t_1^-)$, donc

$$x(t) = \Delta x(t_1) + x(t_1^-) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds.$$

Comme $\Delta x(t_1) = \eta_1(x(t_1^-))$ et $x(t_1^-) = x(t_1)$, donc

$$x(t) = \eta_1(x(t_1^-)) + x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} h(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds.$$

En particulier,

$$x(t_2^-) = \eta_1(x(t_1^-)) + x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

Si $t \in]t_2, t_3]$, alors

$$^cD^\alpha x(t) = h(t) \Rightarrow I_{t_2^+}^\alpha ({}^cD^\alpha x(t)) = I_{t_2^+}^\alpha h(t),$$

où $I_{t_2^+}^\alpha$ l'intégral de Riemann-Liouville et d'après le lemme 3.3.3 on aura

$$x(t) = x(t_2^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t} (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Or $\Delta x(t_2) = x(t_2^+) - x(t_2^-)$, donc

$$x(t) = \Delta x(t_2) + x(t_2^-) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t} (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Comme $\Delta x(t_2) = \eta_2(x(t_2^-))$ et $x(t_2^-) = x(t_2)$, donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \eta_2(x(t_2^-)) + \eta_1(x(t_1^-)) + x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} h(s) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_2}^{t} (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $t \in]t_k, t_{k+1}]$ alors

$$^cD^\alpha x(t) = h(t) \Rightarrow I_{t_k^+}^\alpha ({}^cD^\alpha x(t)) = I_{t_k^+}^\alpha h(t),$$

où $I_{t_k^+}^\alpha$ l'intégral de Riemann-Liouville et encore d'après le lemme 3.3.3, on aura

$$x(t) = x(t_k^+) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Or $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$, donc

$$x(t) = \Delta x(t_k) + x(t_k^-) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Comme $\Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k^-))$ et $x(t_k^-) = x(t_k)$, alors

$$x(t_k^-) = \sum_{i=1}^{k-1} \eta_i(x(t_i^-)) + x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Finalement

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \sum_{i=1}^{k-1} \eta_i(x(t_i^-)) + \eta_k(x(t_k^-)) \\ &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x(t_i^-)). \end{aligned}$$

Inversement

Vérifiant tout d'abord la condition initiale (4.7).

Supposons que x satisfait l'équation intégral fractionnaire impulsive (4.4).

Pour $t \in [0, t_1]$, on a

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

En particulier pour $t = 0$

$$x(0) = x_0.$$

Ensuite, on vérifie l'équation (4.5)

- Pour $t \in [0, t_1]$, on a

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

En appliquant l'opérateur ${}^cD^\alpha$ *à* l'équation précédente, comme il est linéaire et d'après le lemme 3.3.1 et la remarque 3.2.2, on aura

$${}^cD^\alpha x(t) = h(t)$$

- Pour $t \in]t_k, t_{k+1})$, on a

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x(t_i^-)) \\ &= x_0 + \sum_{i=1}^{k} I_{t_{i-1}}^{\alpha} h(t_i) + I_{t_k}^{\alpha} h(t) + \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x(t_i^-)). \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur ${}^cD^\alpha$ *à* l'équation précédente, comme il est linéaire on aura

$${}^cD^\alpha x(t) = {}^c D^\alpha x_0 + {}^c D^\alpha \left(\sum_{i=1} I_{t_{i-1}}^{\alpha} h(t_i) \right) + {}^c D^\alpha (I_{t_k}^{\alpha} h(t)) + {}^c D^\alpha \left(\sum_{i=1}^{k} \eta_i(x(t_i^-)) \right),$$

et par le lemme 3.3.1 et la remarque 3.2.2, on trouve

$${}^cD^\alpha x(t) = h(t), \quad t \in]t_k, t_{k+1}).$$

Pour $t \in]t_k, t_{k+1}]$, l'équation (4.6) est bien vérifiée.

Lemme 4.1.2 *x est solution du problème (4.1)-(4.3) si et seulement si $x \in PC(J, \mathbb{R})$ et satisfait*

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, & t \in [0, t_1] \\ x_0 + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + & \\ \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x(t_i^-)), & t \in]t_k, t_{k+1}], k = 1, ..., r. \end{cases}$$

4.2 Théorèmes d'existence et d'unicité de solution

Dans cette section, nous allons étudier les théorèmes qui assure l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.1)-(4.3). En utilisant le théorème de Banach et de Schaefer.

4.2.1 Résolution du problème par le théorème de Banach

Théorème 4.2.1 *[6] Supposons que :*

(H_1) *Il existe une constante* $\ell > 0$ *telle que* $|f(t,u) - f(t,v)| \leq \ell|u-v|$, *pour chaque* $t \in J$ *et* $u, v \in \mathbb{R}$.

(H_2) *Il existe une constante* $Q > 0$ *telle que* $|\eta_k(u) - \eta_k(v)| \leq Q|u-v|$, *pour chaque* $u, v \in \mathbb{R}$ *et* $k = 1, ..., r$.

Si

$$\left[\frac{T^\alpha \ell(r+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + rQ\right] < 1, \tag{4.8}$$

alors, le problème (4.1)-(4.3) a une unique solution sur J.

Preuve. Nous transformons le problème (4.1)-(4.3) en un problème de point fixe .
Considérons l'opérateur $F : PC(J,\mathbb{R}) \to PC(J,\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{aligned} F(x)(t) = x_0 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.1.2, les points fixes de l'opérateur F sont des solutions du problème (4.1)-(4.3).
Démontrons que F admet un point fixe en utilisant le principe de contraction de Banach.
Soient $x, y \in PC(J,\mathbb{R})$.

Alors pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|F(x)(t) - F(y)(t)| &= \Bigg| x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)) \\
&\quad - \Bigg[x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(y(t_k^-)) \Bigg] \Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&\quad + \sum_{0<t_k<t} |\eta_k(x(t_k^-)) - \eta_k(y(t_k^-))| \\
&\leq \frac{\ell}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{r} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} |x(s) - y(s)| ds \\
&\quad + \frac{\ell}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |x(s) - y(s)| ds + \sum_{k=1}^{r} Q |x(t_k^-) - y(t_k^-)| \\
&\leq \frac{r\ell T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x - y\|_\infty + \frac{\ell T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|x - y\|_\infty + rQ \|x - y\|_\infty. \\
&\leq \left[\frac{T^\alpha \ell (r+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + rQ \right] \|x - y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0, T]$, nous avons

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty = \left[\frac{T^\alpha \ell (r+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + rQ \right] \|x - y\|_\infty.$$

Par la condition (4.8). F est une contraction.
Par le théorème du point fixe de Banach 1.2.1, le problème (4.1)-(4.3) admet une unique solution sur J.

4.2.2 Résolution du problème par le théorème de Schaefer

Théorème 4.2.2 *[6] Supposons que :*

(H_3) *La fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue .*

(H_4) *Il existe une constante $M > 0$ telle que $|f(t, u)| \leq M$ pour chaque $t \in J$ et chaque $u \in \mathbb{R}$.*

(H_5) *Les fonctions* $\eta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont continues et il existe une constante* $L > 0$ *telle que* $|\eta_k(u)| \leq L$ *pour chaque* $u \in \mathbb{R}$, $k = 1, ..., r$.

Alors le problème (4.1)-(4.3) admet au moins une solution sur J.

Preuve. Nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour prouver que F admet un point fixe. La preuve sera donnée en quatre étapes.
Étape 1 : F est continu.
Soit $\{x_n\}$ une suite telle que $x_n \to x$ dans $PC(J, \mathbb{R})$. Alors pour chaque $t \in J$

$$\begin{aligned}
|F(x_n)(t) - F(x)(t)| = \Bigg| x_0 &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, x_n(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_n(s)) ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x_n(t_k^-)) \\
&- \Bigg[x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)) \Bigg] \Bigg| \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))| ds \\
&+ \sum_{0<t_k<t} |\eta_k(x_n(t_k^-)) - \eta_k(x(t_k^-))|.
\end{aligned}$$

Puisque f et η_k, $k = 1, ..., r$ sont des fonctions continues, on a

$$\|F(x_n) - F(x)\|_\infty \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty,$$

donc F est continu.
Étape 2 : F transforme tout ensemble borné en ensemble borné dans $PC(J, \mathbb{R})$, i.e
Il suffit de montrer que pour tout $q > 0$, il existe une constante strictement positive R telle que pour chaque $x \in B_q = \{x \in PC(J, \mathbb{R}) : \|x\|_\infty \leq q\}$, on a $\|F(x)\| \leq R$.
En effet :

Par (H_4) et (H_5) on a pour chaque $t \in J$,

$$
\begin{aligned}
|F(x)(t)| &= \bigg| x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)) \bigg| \\
&\leq |x_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_k<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} |f(s, x(s))| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s))| ds + \sum_{0<t_k<t} |\eta_k(x(t_k^-))| \\
&\leq |x_0| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{r} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} ds + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} ds + \sum_{k=1}^{r} L \\
&\leq |x_0| + \frac{rMT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{MT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + rL \\
&\leq |x_0| + \frac{rMT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + rL.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\|F(x)\|_\infty \leq |x_0| + \frac{MT^\alpha(r+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + rL = R,
$$

donc $F(B_q)$ est uniformement borné.
Étape 3 : F transforme les ensembles bornés en ensembles équicontinus de $PC(J, \mathbb{R})$.
Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$, $\tau_1 < \tau_2, B_q$ un ensemble borné de $PC(J, \mathbb{R})$ comme à l'étape 2, et soit $x \in B_q$.

Puis

$$
\begin{aligned}
|F(x)(\tau_2)-F(x)(\tau_1)| &= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{0<t_k<\tau_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds+\sum_{0<t_k<\tau_2}\eta_k(x(t_k^-)) \\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{0<t_k<\tau_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
&-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{\tau_1}(\tau_1-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds-\sum_{0<t_k<\tau_1}\eta_k(x(t_k^-))\Bigg| \\
&= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\sum_{0<t_k<\tau_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
&-\sum_{0<t_k<\tau_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\Bigg] \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_{t_k}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds-\int_{t_k}^{\tau_1}(\tau_1-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\Bigg] \\
&+\Bigg[\sum_{0<t_k<\tau_2}\eta_k(x(t_k^-))-\sum_{0<t_k<\tau_1}\eta_k(x(t_k^-))\Bigg]\Bigg| \\
&= \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\sum_{0<t_k<\tau_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
&-\sum_{0<t_k<\tau_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\Bigg] \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_{t_k}^{\tau_1}(\tau_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds+\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
&-\int_{t_k}^{\tau_1}(\tau_1-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\Bigg]+\sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1}\eta_k(x(t_k^-))\Bigg| \\
&\le \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\sum_{0<t_k<\tau_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
&-\sum_{0<t_k<\tau_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\Bigg] \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\int_{t_k}^{\tau_1}(\tau_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds+\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
&-\int_{t_k}^{\tau_1}(\tau_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\Bigg]+\sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1}\eta_k(x(t_k^-))\Bigg|.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
|F(x)(\tau_2)-F(x)(\tau_1)| \leq & \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Bigg[\sum_{0<t_k<\tau_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
& -\sum_{0<t_k<\tau_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\Bigg] \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds+\sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1}\eta_k(x(t_k^-))\Bigg|. \\
\leq & \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau_1}[(\tau_2-s)^{\alpha-1}-(\tau_1-s)^{\alpha-1}]f(s,x(s))ds \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}(\tau_2-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds+\sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1}\eta_k(x(t_k^-))\Bigg| \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\tau_1}|(\tau_2-s)^{\alpha-1}-(\tau_1-s)^{\alpha-1}||f(s,x(s))|ds \\
& +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_1}^{\tau_2}|(\tau_2-s)^{\alpha-1}||f(s,x(s))|ds+\sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1}|\eta_k(x(t_k^-))| \\
\leq & \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}[2(\tau_2-\tau_1)^{\alpha}+\tau_2^{\alpha}-\tau_1^{\alpha}]+\sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1}|\eta_k(x(t_k^-))|.
\end{aligned}
$$

Lorsque $\tau_1 \to \tau_2$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. Suite aux étapes 1 à 3 et au théorème d'Ascoli-Arzelà, nous pouvons conclure que
$F : PC(J,\mathbb{R}) \to PC(J,\mathbb{R})$ est complètement continu.

Étape 4 : Estimation à priori des solutions.
Maintenant reste à montrer que l'ensemble :

$$\mathcal{E}=\{x\in PC(J,\mathbb{R}) : x=\lambda F(x) \text{ pour } 0<\lambda<1\}$$

est borné. Soit $x \in \mathcal{E}$, alors $x=\lambda F(x)$ pour $0<\lambda<1$.
Ainsi, pour chaque $t \in J$ on a

$$
\begin{aligned}
x(t) = & \lambda x_0+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\sum_{0<t_k<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
& +\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds+\lambda\sum_{0<t_k<t}\eta_k(x(t_k^-)).
\end{aligned}
$$

Cela implique par (H_4) et (H_5) (comme dans l'étape 2) que pour chaque $t \in J$ on a

$$
\begin{aligned}
|x(t)| & \leq \lambda|x_0|+\lambda\frac{rMT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\lambda\frac{MT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\lambda rL \\
& \leq |x_0|+\frac{rMT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{MT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+rL.
\end{aligned}
$$

Ainsi pour tout $t \in J$, on a

$$\|x(t)\| \leq |x_0| + \frac{rMT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + rL = R_1$$

avec R_1 une constante strictement positive. Cela montre que l'ensemble $\mathcal{E}$ est uniformément borné.
Par conséquence du théorème du point fixe de Schaefer, on déduit que F admet au moin un point fixe qui est une solution du problème (4.1)-(4.3).

Application. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha x(t) = \dfrac{1}{9+e^t}x(t), \quad t \in J = [0,1], \quad t \neq \frac{1}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ \Delta x(t_{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{5}x\left(\dfrac{1}{2}^-\right), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

On pose

$$f(t,x) = \frac{1}{9+e^t}x, \quad (t,x) \in J \times \mathbb{R},$$

et

$$\eta_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{5}x, \quad x \in \mathbb{R}$$

. ► Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in J$, on a

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \left| \frac{1}{9+e^t}x - \frac{1}{9+e^t}y \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{9+e^t} \right| |x-y| \\ &\leq \frac{1}{10}|x-y|. \end{aligned}$$

Donc, la condition (H_1) est vérifiée avec $\ell = \dfrac{1}{10}$.
► Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |\eta_{\frac{1}{2}}(x) - \eta_{\frac{1}{2}}(y)| &= \left| \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}y \right| \\ &\leq \frac{1}{5}|x-y| \end{aligned}$$

Donc, la condition (H_2) est vérifiée avec $Q = \dfrac{1}{5}$.
► Vérifions la condition (4.8) pour $T = 1$ et $r = 1$.
On aura,

$$\frac{T^\alpha \ell(r+1)}{\Gamma(\alpha+1)} + rQ = \frac{\frac{2}{10}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{5} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > \frac{1}{4} = 0.25. \tag{4.10}$$

Alors par le théorème 4.2.1, le problème (4.9) à une unique solution sur $[0,1]$ pour les valeurs de α satisfaisant (4.10).

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressé à l'existence et l'unicité de solution d'un problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaires impulsives, en utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème du point fixe de Schaefer.

Nous espérons dans l'avenir, étudier la bifurcation, la dépendance continue des solutions par rapport aux temps initial et peut être aussi la stabilité.

Bibliographie

[1] D.D. Bainov and P.S. Simeonov, *Systems with Impulsive Effect,* Ellis Horwood Ltd, Chichister, 1989.

[2] M. Benchohra, P. eloe. On nonresonance impulsive functional differential equations with periodic boundary conditions. *Appl. Math.* E-Notes, **1** :65–72, 2001.

[3] M. Benchohra, R,J. Graef and S. Hamani. Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations, *Appl. Anal.* **87 (7)** (2008), 851-863.

[4] M. Benchohra, S. Hamani. *Boundary value problems for differential inclusions with fractional order.* Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization **28**, **1** (2008), 147–164.

[5] M. Benchohra, F.Ouaar. Existence results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions , Math. *Anal and Appl* **2** (2010), 7-15.

[6] M. Benchohra, B. A. Slimani. Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations,* Vol. 2009(2009), No. **10**, pp. 1–11.

[7] L. Byszewski. Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem, *J. Math. Anal. Appl.* **162** (1991), 494-505.

[8] L. Byszewski. Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional-differential evolution nonlocal Cauchy problem. *Selected problems of mathematics,* 25–33, 50th Anniv. Cracow Univ. Technol. Anniv. Issue, **6**, Cracow Univ. Technol, Krakow, 1995.

[9] L. Byszewski and V. Lakshmikantham, Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space, *Appl. Anal.* **40** (1991), 11-19.

[10] M. Choisy, J.F Guegan, and Pejman Rohani. Dynamics of infectious diseases and pulse vaccination : teasing apart the embedded resonance effects. *Physica D : Nonlinear Phenomena,* **223(1)** :26–35, 2006.

[11] S. Das. *Fractional Calculus for System Identification and Controls,* Springer, New York, 2007.

[12] J.P. Denailly. *Analyse Numérique et Equations differentielles,* Collection Grenoble Sciences, France, 2006.

[13] K. Diethelm, A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in " *Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties"* (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer- Verlag, Heidelberg, 1999.

[14] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations,* springer, New York, 2004.

[15] I. Fonseca. and G. Leon. *Modern methods in the calculus of variations, L^p spaces.* Springer, New York, 2007.

[16] A. Granas, J. Dugundji. *Fixed Point Theory,* Springer-Verlag, New York, 2003. Sciences, **99**, Springer-Verlag, New York, 1993.

[17] A. Halanay and D. Wexler, *Teoria Calitativa a Systeme cu Impulduri,* Editura Republicii Socialiste Romania, Bucharest, 1968.

[18] A.S. Hamani and S. K. Ntouyas. Boundary value problems for differential equations with fractional order, *Surv. Math. Appl.* **3** (2008), 1-12.

[19] P. Hartman. On local homeomorphisms of euclidean spaces, bol. soc. math. mexicana 5 (1960) 220–241 ; p. hartman, *ordinary differential equations, j,* 1964.

[20] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics,* Singapore, World Scientific, 2000.

[21] A. Kilbas, S.Marzan. Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions. *Ordinary differential equations* **41**, **1** (2005), 84–89

[22] A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J.Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations,* vol. **204**. Elsevier science B. V., Amsterdam, 2006.

[23] A. A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and J. Juan Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* North-Holland Mathematics Studies, **204**. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[24] V.Lakshmikantham , D. Bainov and P.S. Simenov. *Theory of Impulsive Differential Equations,*World Scientific ,Syngapore ,1989.

[25] K. S. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, John Wiley, New York, 1993.

[26] V.D. Milman and A.A. Myshkis, On the stability of motion in the presence of impulses, *Sib. Math. J.* (in Russian), **1** (1960), 233-237.

[27] V.D. Milman and A.A. Myshkis. *Randorn impulses in linear dynamical systems, in "Approximante Methods for Solving Differential Equations,"* Publishing house of the Academy of Sciences of Ukainian SSR, Kiev, in Russian, (1963) 64-81.

[28] K. B. Oldham, J.Spanier. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order,* vol. **111**. Elsevier, 1974.

[29] I. Podlubny. *Fractional Differential Equation,* academic Press, San Diego, 1999.

[30] I. Podlubny, *Fractional differential equations* : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, vol. **198**. Elsevier, 1998.

[31] R. Roummani, A. Ouahab. *Existence Result for an Impulsive Ordinary Differential Problem,* Univerzita Mateja Bela, (2017), 83-98.

[32] S. G. Samko, A.. A. Kilbas , O. I. Marichev. Fractional Integrals and Derivatives. *Theory and Applications,* Gordon, Breach, Yverdon, 1993.

[33] D.R. Smart, *Fixed Point Theorem,* Cambridge Tracts in Mathematics, No.**66**, Cambridge University Press, London.New York,1974.

[34] D.R. Smart. *Fixed point theorems,* Cambridge university Press, Cambridge, Vol. **66**, 1980. **13**

[35] E. Zeidler. Nonlinear Functionnal Analysis and its Applications, *Fixed Point Theorems,* Springer-Verlag, New York, 1990.

[36] S. Zhang, Positive Solutions for Boundary-Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations , *Electron. J. Differ. Equ.* ,**36** ,(2006), 1-12.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudier l'existence et l'unicité de solution du problème de Cauchy pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire impulsives en utilisant le principe de contraction de Banach et le théorème du point fixe de Schaefer.

Mots-clés : *dérivée fractionnaire au sens de Caputo, équation différentielle impulsive, problème de Cauchy, la théorie du point fixe.*

ملخص

في هذه المذكرة ، درسنا وجود و وحدانية حل مشكلة كوشي للمعادلات التفاضلية ذات الأس الكسري النبضي باستخدام مبدأ التقلص لنظرية باناك ونظرية النقطة الثابتة لشيفر.

الكلمات المفتاحية: الإشتقاقية ذات رتبة ناطقة حسب كابيتو , معادلة تفاضلية نبضية ، مشكلة كوشي ، مبدأ النقطة الثابتة.

Abstract

In this paper, we have studied the existence and uniqueness of the solution of a Cauchy problem for impulsive differential equations of fractional order using Banach's contraction principle and Schaefer's fixed point theorem.

Keywords: *Caputo fractional derivative, impulsive differential equation, Cauchy problem, fixed point theory.*