

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République algérienne démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب  
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaib  
Faculté des Sciences et de Technologie  
Département Génie mécanique



Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du diplôme de Master en génie mécanique  
Domaine : science technologie  
Filière : génie mécanique  
Spécialité : construction mécanique  
Thème

## **Analyse numérique des rotors creux FGM a protection externe en céramique**

**Présenté Par :**

- 1) Melle. Mankour Yamine Nesrine
- 2) Melle. BoualemFerial

**Devant le jury composé de :**

BELOUFA .Mouhemed .A	Dr UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
DJABBAR .Noureddine	Pr UAT.B.B (Ain Temouchent )	Examineur
ASSEM .Hassan	Dr UAT.B.B (Ain Temouchent )	Encadrant
SAIM .Ahmed	Dr Université (Blida)	Co-Encadrante

*Année Universitaire 2022/2023*

# *Remerciement*

*Nous remercions Allah, le tout puissant qui nous a donné la santé, la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de fin d'études. En premier lieu, nous remercions sincèrement nos encadreurs Monsieur Assem Hassen et Saimi Ahmed pour leurs disponibilites, leurs encouragements et leurs précieux conseils donnés pour finirs ce travail. Nos remerciements respectives s'adressent aussi a Monsieur Beloufa Mohamed et Amine d'avoire accepter de présider nos juries et Monsieur Djebbar Noureddine d'avoire examiner ce precieux travail. Sans oublier de remercier vivement nos familles pour leurs soutient physiques et morales durant la préparation et le traitement de ce sujet, également nos remerciements s'adressents aussi a toutes et tous les amis (ies) sans oublié de remercier vivement tous les enseignants ren*



## **Résumé :**

Le but de ce travail est l'étude par la méthode des éléments finis d'un rotor creux en matériaux à mélange graduels métal et céramique à protection externe en céramique sous un gradient thermique. Une étude théorique a été faite par l'utilisation des énergies cinétiques et potentielle du système tournant. Pour la détermination de l'équation différentielle du mouvement est obtenue par le paramètre du lagrangien. On a appliqué la version P de la méthode des éléments finis pour l'établissement de toutes les matrices constituant l'équation différentielle du mouvement du rotor. Les valeurs propres de cette équation sont les solutions finales de l'équation différentielle et qui représentent les fréquences vibratoires propres du système tournant. Les résultats obtenus sont représentés par des courbes et des valeurs numériques données sur des tableaux traduisant le comportement vibratoires du rotor à mélange graduels métal et céramique sous divers types de paramètre de température, et divers indices du volume fraction du mélanges graduels Ni-SUS304 et  $AL_2O_3$ -SUS304 .

## **Abstract**

The aim of this work is the study by the finite element method of a hollow rotor made of FGM materials with external ceramic protection under a thermal gradient. A theoretical study was made by using the kinetic and potential energies of the rotating system. For the determination of the differential equation of motion is obtained by the Lagrangian parameter. The P version of the finite element method was applied. for the establishment of all the matrices constituting the differential equation of the motion of the rotor. The eigenvalues of this equation are the final solutions of the differential equation and which represent the natural vibration frequencies of the rotating system. The results obtained are represented by curves and numerical values given on tables reflecting the vibration behavior of the FGM rotor under various types of temperature parameters, and various indices of the volume fraction of the gradual mixtures Ni-SUS304 and  $[AL]_2 O_3$ - SUS304

## ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة طريقة العناصر المحدودة لدوار مجوف مصنوع من خليط تدريجي من المواد المعدنية والسيراميك مع حماية خارجية من السيراميك تحت التدرج الحراري. أجريت دراسة نظرية باستخدام الطاقات الحركية وطاقة الوضع للنظام الدوار، ولتحديد المعادلة التفاضلية للحركة تم الحصول على معامل لاغرانج. تم تطبيق النسخة P من طريقة العناصر المحدودة لإنشاء جميع المصفوفات التي تشكل المعادلة التفاضلية لحركة الدوار. القيم الذاتية لهذه المعادلة هي الحلول النهائية للمعادلة التفاضلية والتي تمثل ترددات الاهتزازات الطبيعية للنظام الدوار. يتم تمثيل النتائج التي تم الحصول عليها من خلال منحنيات وقيم رقمية معطاة على جداول تعكس سلوك اهتزاز الدوار بمزيج تدريجي من المعدن والسيراميك تحت أنواع مختلفة من معلمات درجة الحرارة، ومؤشرات مختلفة لكسر الحجم التدريجي Ni-SUS304 مخاليط و. [ AL ] \_2 O\_3-SUS304

# Tables des matières

## Remerciement

Resume .....	I
Tables des matières .....	III
Liste des tableaux .....	VI
Liste des figures .....	VII
Introduction .....	1

## *Chapitre I :*

### *Céramique – matériaux à gradients des propriétés*

<b>1 Introduction :</b> .....	<b>5</b>
<b>2 Définition du rotor :</b> .....	<b>6</b>
2.1 Classification des rotors : .....	6
2.2 Les composants de base d'un rotor : .....	7
2.3 Cinématique d'un arbre de transmission : .....	8
2.4 Bref Historique de la céramique : .....	9
2.5 Propriétés des céramiques : .....	10
2.5.1 propriétés mécaniques : .....	10
2.5.2 Propriétés thermiques: .....	10
2.5.3 Propriétés électriques: .....	10
2.5.4 propriétés physiques : .....	11
2.5.5 Caractéristiques environnementales : .....	11
2.6 L'utilisation de la céramique : .....	13
<b>3 Définition des matériaux FGM :</b> .....	<b>14</b>
3.1 L'idée générale de développer des matériaux fonctionnellement gradués: .....	15
3.2 . Avantages et inconvénients des matériaux à gradient fonctionnel: .....	16
3.3 Domaines d'application : .....	17
3.4 Conversion de l'énergie : .....	18

3.5	Modélisation des matériaux PFGM :.....	19
<b>4</b>	<b>Conclusion :</b> .....	<b>22</b>

## *Chapitre II*

### *Analyse numérique pour la méthode des éléments finis*

<b>1</b>	<b>Introduction :</b> .....	<b>24</b>
<b>2</b>	<b>Définition de la méthode des éléments finis :</b> .....	<b>24</b>
<b>3</b>	<b>Domaines d'applications de la MEF :</b> .....	<b>25</b>
3.1	Modélisation par la méthode des éléments finis en générale : .....	26
3.2	Types de problèmes MEF :.....	26
<b>4</b>	<b>Théorie pratique :</b> .....	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>Equations aux dérivées partielles :</b> .....	<b>28</b>
<b>6</b>	<b>démarche générale :</b> .....	<b>28</b>
6.1	Les équations du mouvement de l'arbre :.....	30
6.1	L'équation du mouvement de rotor : .....	31
<b>7</b>	<b>Localisation du problème :</b> .....	<b>32</b>
<b>8</b>	<b>Formulation du matériau FGM métal-céramique:</b> .....	<b>33</b>
<b>9</b>	<b>Champs des déplacements :</b> .....	<b>36</b>
<b>10</b>	<b>Fonctions de forme :</b> .....	<b>37</b>
<b>11</b>	<b>Détermination des matrices du disque :</b> .....	<b>39</b>
11.1	Matrice de rigidification centrifuge : .....	39
11.2	Matrice gyroscopique : .....	40
11.3	Matrice masse : .....	41
<b>12</b>	<b>Détermination les matrices de l'arbre :</b> .....	<b>42</b>
12.1	Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre:.....	42
12.2	Matrice masse de l'arbre :.....	43
12.3	Matrice gyroscopique de l'arbre : .....	44
12.4	Matrice de rigidité de l'arbre : .....	45

<b>13</b>	<b>Influence de la température :</b> .....	<b>46</b>
<b>14</b>	<b>Conclusion :</b> .....	<b>49</b>

### *Chapitre III*

#### *Résultats et Interprétation*

<b>1</b>	<b>Protection externe en céramique :</b> .....	<b>51</b>
<b>2</b>	<b>Evolution des fréquences vibratoires du mode 1 du Rotor avec la température .....</b>	<b>52</b>
	<b>Conclusion 1.....</b>	<b>54</b>
<b>3</b>	<b>.Evolution des fréquences vibratoires du mode 2 du Rotor avec la température ...</b>	<b>55</b>
	<b>Conclusion 2.....</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Diagramme de Campbell .....</b>	<b>58</b>
	4.1 Dynamique du Rotor avec mélange graduel AL <sub>2</sub> O <sub>3</sub> -SS.....	58
	<b>Conclusion Générale :</b> .....	<b>63</b>
	<b>References bibliographiques.....</b>	<b>64</b>

## Liste des tableaux

Tableau I 1: Comparaison entre les propriétés de céramique et du métal.....	11
Tableau II.01 : Les coefficients de température T pour l'oxyde d'aluminium.....	52
Tableau III.01 : Propriétés des constituants du mélange.....	55
Tableau III.2 : fréquences vibratoires du Mode 1 .....	58
Tableau III.03 : Fréquences vibratoires du Mode 2. ....	61

## Liste des figures

Figure I 1 : matériau FGM.....	5
Figure I 02 :Rotor Management Solutions .....	6
Figure I 03 :Présentation du rotor.....	8
Figure I 04 : Réparation d'un arbre de transmission.....	9
Figure I. 05 : La céramique technique.....	9
Figure I.06 : cartactéristiques des céramiques.....	12
Figure I.07 : Concepte des matériaux à gradient de propriété.....	15
Figure I 08 : principaux domaines d'application des matériaux FGM.....	18
Figure I 09 :Coupe transversale du modèle d'arbre FG avec protection extérieure en céramique (Assem et al., 2020). .....	20
Figure I 10 :Variation du module de Young à travers le rayon de la structure P-FGM (Otmani Malika,2020). .....	21
Figure II 01 : Modèle de méthode des éléments finis.....	25
Figure II 02 : Différents types des problèmes physiques en éléments finis .....	27
Figure II 03 :Modèle de maillage .....	29
Figure II 04 : Rotor au centre relié à l'axe tournant, stator fixe extern .....	37
Figure II 05 : les déplacements et les rotations de l'arbre.....	38
Figure II.06 : Représentation d'un élément de poutre. ....	40
Figure II07 :Palier.....	41
Figure II 08 : déformation de l'arbre autour de l'axeoy .....	42
Figure III 1 : fréquences vibratoires d'un rotor fait 100% métal- .....	56
Figure III.2 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec $k=2$ .....	57
Figure III 3 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec $k=1$ .....	57
Figure III 4 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec $k=0.5$ .....	57

Figure III 5 : fréquences vibratoires d'un rotor 100% en céramique AL2O3 .....	54
Figure III 6 : fréquences vibratoires d'un rotor 100% métal-.....	59
Figure III 7 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec k=2 .....	60
Figure III 8 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec k=1 .....	60
Figure III 9 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec k=0.5 .....	60
Figure III 10 : fréquences vibratoires d'un rotor 100% AL2O3.....	61
Figure III 11 : Mode 1 fréquences vibratoires du mélange graduel AL2O3-SUS304 $\nu_f=0.5$ T(int)=300°K=T(ext) .....	62
Figure III 12 Mode 1 fréquences vibratoires du mélange graduel AL2O3-SUS304 $\nu_f=0.5$ T(int)=300°K=T(ext).....	63
Figure III 13 Mode 1 fréquences vibratoires du mélange graduel AL2O3-SUS304 $\nu_f=0.5$ T(int)300°K et T(ext)=900°K.....	64
Figure III 14 Mode 2 fréquences vibratoires du mélange graduel AL2O3-SUS304 $\nu_f=0.5$ T(int)=300°K=T(ext).....	65

# **Introduction générale**

### Introduction

Le monde industriel est en pleine évolution. Cette évolution ne peut se faire sans progrès qui permet à l'industrie d'utiliser les résultats de la recherche scientifique, permettant de concevoir des processus et des vecteurs de développement industriel innovants.

Les machines rotatives ont été un facteur important dans le développement de l'humanité. Depuis l'aube de l'industrie. Il est devenu une partie intégrante de l'industrie moderne de la production et la conversion de puissance (en turbocompresseur) véhicules automatisés, turbines pour bateaux ou sous-marins, turbines génératrices Éoliennes et nucléaires...),

Les matériaux classés fonctionnellement (MGF) constituent un nouveau groupe de matériaux caractérisés par une distribution graduelle continue de deux ou plusieurs composants. En raison des propriétés spécifiques des matériaux de ce groupe, ils sont de plus en plus largement étudiés et utilisés.

Les matériaux FGM restent les matériaux les plus recherchés, les concepteurs ont il était passionné par les MGF (céramique/métal) parce que ce mélange combine les propriétés du métal et de la céramique anticorrosion dont le but était de concevoir un rotor avec une graduation des propriétés continue à travers l'épaisseur, en passant d'une face complètement métallique vers une face complètement céramique selon les conditions du fonctionnement

En particulier, ces matériaux composites FGM céramique-métal, ont des propriétés avantageuses recherchées telles que la relaxation efficace du stress thermique, dureté élevé, résistance élevée à la rupture et bonne tenue en corrosion. Ils peuvent être utilisés dans de nombreuses applications allant de l'aérospatiale à l'industrie chimique

Les matériaux composites viennent, malgré leur âge dans le monde mais ils ont apporté des solutions aux défis par leurs avantages fonctionnels : légèreté, dureté élevée, résistance mécanique et chimique, excellente dureté, longue durée de vie, Le temps le plus court possible pour la fabrication, une meilleure isolation thermique et acoustique.

Les matériaux composites sont constitués de différents matériaux aux propriétés différentes au sein d'une même pièce, qui sont en plusieurs couches appelées plaquettes car ils ont montré une défaillance dans leur environnement à haute température. En raison de leur

hétérogénéité, les propriétés des matériaux à travers l'interface subissent un changement brusque, l'explosion de la navette spatiale Columbia 2003) (Gehman, 2003).

À cette fin, un nouveau groupe de matériaux appelés matériaux classés fonctionnellement (FGM) a été conçu, dont l'idée a été extraite de la nature pour résoudre des problèmes d'ingénierie en éliminant le problème rencontré dans les composites conventionnels et en réduisant les contraintes thermiques.

Les FGM est un nouveau groupe de matériaux composites qui ont été fabriqués par un certain nombre de procédés, et ces matériaux ont une variation progressive des propriétés en fonction des fractions volumétriques de chacun des composants, et ces propriétés varient généralement en fonction de l'épaisseur comme : module d'Young, coefficient de Poisson, densité selon les lois La gouvernance est bien définie comme la loi de puissance P-FGM. Ainsi, ils peuvent combiner les propriétés de deux ingrédients complètement différents sans que l'un fasse de concessions en faveur de l'autre.

Les voies de développement des matériaux FGM cherchent actuellement à généraliser davantage leur application dans les domaines de l'énergie, de l'aéronautique, du spatial, de l'automobile et de l'industrie mécanique, dont l'arrivée a ouvert de nouvelles voies pour augmenter les performances des machines industrielles grâce à leur qualités intrinsèques, en particulier celles qui fonctionnent dans des environnements corrosifs et à des températures élevées face aux problèmes auxquels vous êtes confrontés.

Les matériaux FGM restent les matériaux les plus demandés, les concepteurs ont été fascinés par le type de FGM (céramique/métal) car cette combinaison combine les propriétés du métal ductile et de la céramique anti-corrosion qui était conçue comme une conception rotative avec une gradation continue de propriétés dans l'épaisseur, de la face tout métal à la face tout céramique selon les conditions opératoires (Assem et al., 2020)

L'analyse vibratoire est devenue une discipline importante afin d'éviter que trop de vibrations ne provoquent de graves dommages : casse, détérioration des roulements, frottements rotor/stator, et c'est ce qui guide nos efforts pour comprendre le comportement des rotors FGM afin de les utiliser positivement et de façon optimale. Ainsi, nous avons besoin d'outils de modélisation plus performants requis par ces connaissances, et tenant compte des spécifications de ces matériaux, parmi lesquels la méthode des éléments finis offre un outil efficace pour les structures très complexes dans les machines tournantes.

Pour le bon fonctionnement de la machine ou du moteur, le rotor doit être équilibré (l'axe de rotation coïncide avec l'axe de l'arbre) et symétrique, et pour cela certaines conditions doivent être remplies, à savoir :

- Bonne répartition des masses autour de l'axe de rotation.
- Atterrissage symétrique
- Nombre de pales égales ou équilibrées.

Les chercheurs ont développé des matériaux composites de pointe et divers modèles mathématiques pour étudier le comportement physique des matériaux FGM dans des géométries d'arbres fixes et mobiles, comme la méthode analytique de Riley-Ritz et la méthode classique des éléments finis (FEM). Ou version H, version P ou version HP.

A partir de ce qui précède, il convient de déterminer les lois de comportement applicables à ces capacités de fonctionnement des composants ou éléments constitués de ces matériaux.

Les efforts de cette recherche visent à étudier le comportement du rotor des mutilations génitales féminines sous un gradient de température. Pour atteindre nos objectifs, le travail de cette thèse a été organisé autour de trois chapitres.

Le premier chapitre porte sur une présentation synthétique des matériaux à gradient des propriétés et céramique. Il aborde également la loi régissant les caractéristiques des MGF, ainsi que ses avantages, ses inconvénients et ses domaines d'application. D'autre part, il présente une définition des rotors et de leurs différents composants.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la méthode des éléments finis.

À la fin, une conclusion générale est rédigée qui met en évidence les principaux résultats obtenus dans notre thèse.

***Chapitre I :***

*Céramique – matériaux à  
gradients des propriétés*

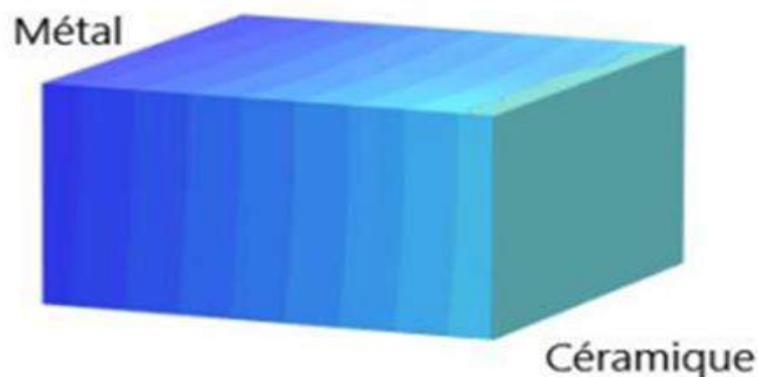
## 1 Introduction :

La gradation fonctionnelle, ou FGM est devenue largement utilisée dans l'industrie moderne, c'est un mélange de deux composants (à l'intérieur c'est 100% de métal et à l'extérieur c'est 100% de céramique, et entre ces deux matériaux il y a un mélange graduel métal-céramique.

Où le métal supporte la structure et se caractérise par sa solidité et sa force et sa durabilité. Quant à la céramique, elle est excellente avec les propriétés de barrière thermique dans les environnements ayant des grands changements de température telles que les cuves de réacteur et les chambres de combustions des turbines à gaz ou turboréacteurs et sa tenue particulièrement recherchée au frottement et à la corrosion.

Ces innovations technologiques sont utilisées dans tous les domaines, comme une protection externe pour les structures travaillant dans un milieu environnant où la variation de la température est présente.

Les matériaux fonctionnellement classés jouent un rôle très importants dans l'ingénierie des constructions mécaniques et autres applications mais le prix de revient de ces matériaux les rend prohibitifs à certains égards applications.[6]



**Figure I 1 : matériau FGM.**

## 2 Définition du rotor :

Interagissant avec le stator fixe, le rotor désigne généralement l'élément tournant d'une machine mécanique ou électrique. Les rotors ont pour fonction primordiale de transformer l'énergie en fonction des applications visées. Bien que les rotors soient largement utilisés dans diverses industries, y compris les turbines, l'aéronautique et les champs pétrolifères, entre autres, le terme est principalement utilisé dans le domaine des centrales électriques et hydrauliques. Hadj Said (2020) discute de ce vaste domaine d'application du rotor.



Figure I 02 :Rotor Management Solutions

### 2.1 Classification des rotors :

Suivant les éléments de base des rotors On peut les classés selon deux paramètres :

- **Les paramètres géométriques :**
  - **Rotor arbre long :** les dimensions de l'arbre sont plus grandes à celui de disque. Il est bien adapté pour modéliser les rotors des différentes machines tournantes industrielles (turbine, générateur... etc.)
  - **Rotor type disque arbre :** les dimensions du disque sont plus grandes à celles de l'arbre.
  - **Rotor à aubes :** ce type est bien adapté pour étudier le comportement vibratoire de quelques rotors ayant une structure aubage (hélicoptère, aérogénérateur, turboréacteur, soufflerie industrielle, ...etc.).
  - **Rotor libre :** ce type de rotor est caractérisé par l'absence des suspensions (paliers, support).
- **Les paramètres mécaniques :**
  - on distingue les modèles suivants :

- **Rotor rigide** :Un rotor peut être considéré comme rigide lorsqu'il tourne à des vitesses sensiblement inférieures à la vitesse critiques associées à la flexion de l'arbre.
- **Rotor flexible** :Un rotor est généralement considéré comme étant souple ou flexible quand il fonctionne à proximité ou au-dessus de sa fréquence naturelle (vitesse critique) (MELIH, 2017).

## 2.2 Les composants de base d'un rotor :

Un rotor se compose de plusieurs éléments de base sont les suivants (l'arbre, disque et paliers, le balourd qui ne peut pas être complètement évité doit aussi être pris en compte) :

- **L'arbre** :c'est l'élément principal du rotor (arbre de transmission ou axe intermédiaire), il peut être rigide ou flexible et cela dépend de ses propriétés mécaniques du matériau de fabrication .
- **Disque** : le disque peut être rigide ou déformable.il est représenté sous plusieurs formes géométriques .
- **Palier** : le palier est considéré comme support du rotor ou l'élément de guidage en rotation de l'arbre, il peut être rigide ou flexible (isotrope ou anisotrope).  
La surface d'appui est séparée par le logement de l'arbre du rotor, qui est lubrifié avec de la graisse ou de l'huile pour éviter les frottements agressifs.
- **Balourd** :le balourd est une masse excentré d'un rotor, il se répartit le long du rotor dont la résultante de cette répartition peut être assimilée à une ou deux masses (Hadj Said, 2020).

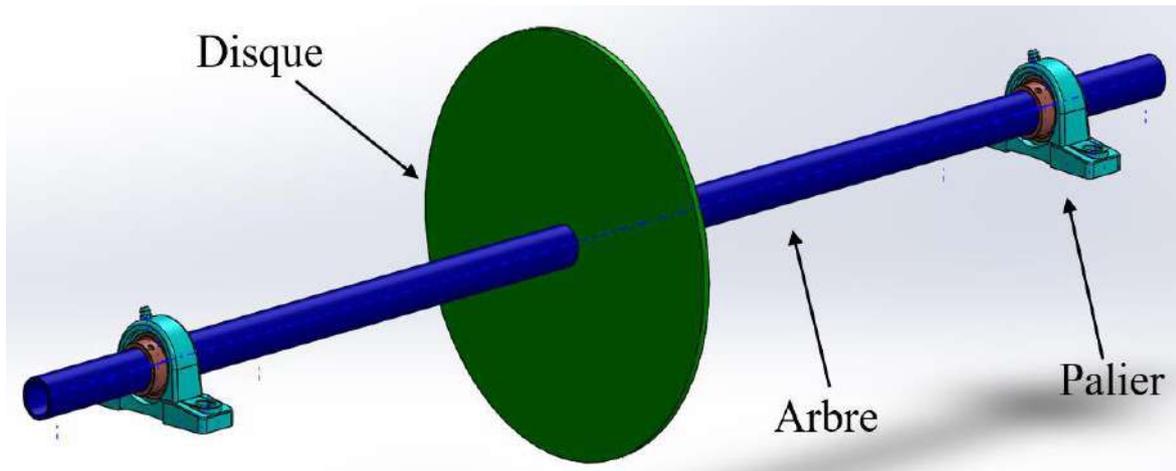


Figure I 03 :Présentation du rotor

### 2.3 Cinématique d'un arbre de transmission :

Les joints à cardan sont des joints rotatifs qui transmettent le couple et le mouvement de rotation. Un joint universel relie deux arbres qui ne sont pas alignés l'un avec l'autre. Dans lequel le couple et la vitesse de rotation sont transmis de manière inégale, on parle de transmission irrégulière.

Pour éviter cela, deux joints universels sont utilisés, reliés l'un à l'autre par l'arbre dit intermédiaire et cette combinaison est appelée arbre à cardan ou arbre d'entraînement à cardan. Le KI 150 permet également d'étudier l'arbre de transmission à cardan.

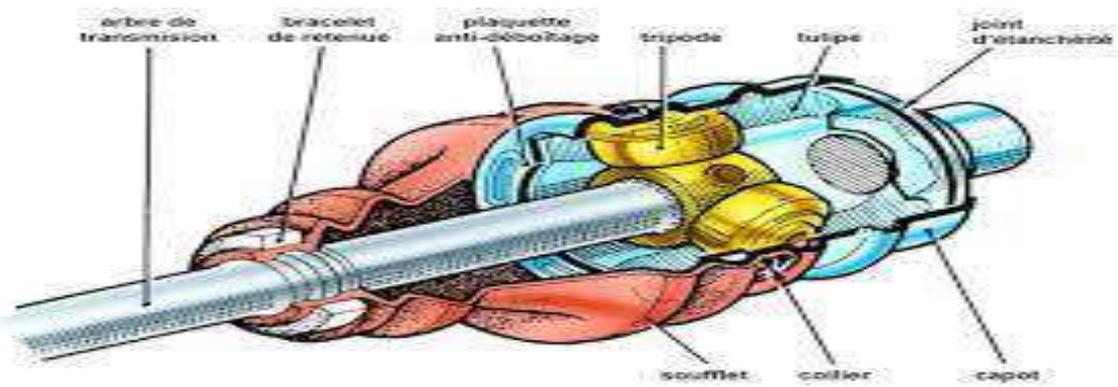
L'appareil expérimental se compose de deux axes et d'un arbre intermédiaire .La disposition des deux axes et l'angle de flexion peuvent être réglés au moyen de deux rotors sur la plaque de base.

L'angle de rotation d'entrée de l'essieu moteur côté entraînement est réglé et lu de sorte que l'arbre intermédiaire transmette le couple au joint universel entraîné, puis lit l'angle de rotation de sortie.

L'erreur de cardan est due à la différence entre ces deux angles.

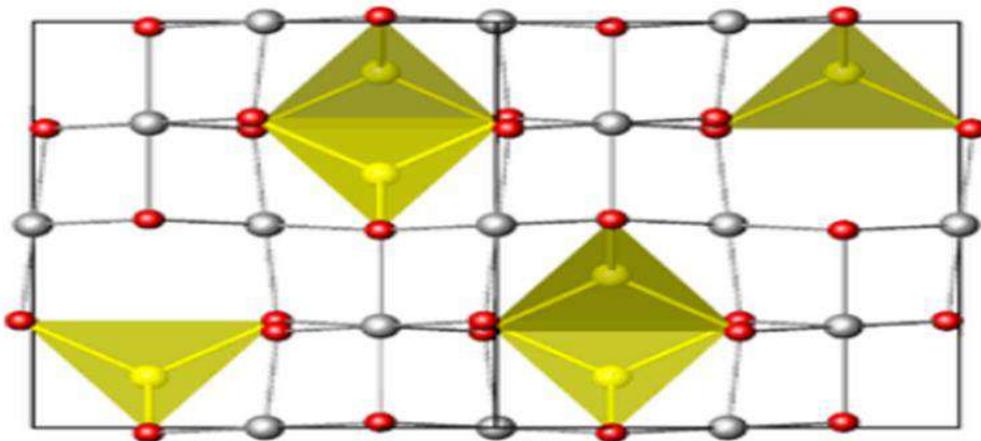
Les articles sont situés sur la plaque de base.

Deux poignées traduisent pour déplacer l'appareil



**Figure I04 : Réparation d'un arbre de transmission**

- Où leur une très grande pureté est à l'origine de leurs hautes performances, dont Tarta est constituée de composés de métaux associés à des oxydes, des carbures ou des nitrures durée de vie du produit.
- La céramique présente de nombreux avantages, notamment :
  - amélioration de l'efficacité et des performances.
  - réduction des coûts et du poids.
  - entretien complet et réel.
  - allongement de la durée de vie du produit.
- les céramiques techniques avancées remplacent les métaux, les polymères et les réfractaires dans diverses catégories d'applications en raison de leur résistance Pour sa haute température, sa cohésion et ses caractéristiques électriques.



**Figure I. 05 : La céramique technique**

## 2.4 Bref Historique de la céramique :

Le mot « céramique » est dérivé du mot grec (κεραμικός) (keramikos), qui signifie poterie. L'ingénierie céramique, comme de nombreuses sciences, est née et s'est

développée à partir d'une nouvelle science et d'un nouveau concept selon la science moderne. La science de l'ingénierie céramique est combinée à la science des matériaux à ce jour.

## 2.5 Propriétés des céramiques :

En raison de la grande petite disponibilité de la céramique, il est difficile d'établir les caractéristiques que Kafta peut posséder. Bien sûr, il y aura toujours de nombreuses exceptions. Cependant, certains d'entre eux partagent des propriétés( mécaniques, chimiques et physiques) en fonction de leurs paramètres.[7]

### 2.5.1 propriétés mécaniques :

La capacité du matériau à résister à la pression et une résistance mécanique élevée Il a un module d'élasticité[8]

Faible intensité, haute dureté, haute résistance à l'usure

. Son coefficient spécifique E (dureté spécifique)

Très élevé le rend très distinct. En raison de sa faible densité céramique  $E > \text{métal}$   $E > \text{polymère}$  E plus liaisons.

Les ions et contributions ont une forte cohésion :

De plus, la porcelaine est composée d'atomes légers (C, O, Si, Al) et généralement

Structure cristalline non dense :  $\rho \text{ métal} < \text{céramique} < \rho \text{ polymère}$

#### **Exemple :**

Notre carbure de bore offre une protection balistique à haute efficacité avec des économies de poids significatives dans les équipements blindés militaires.

### 2.5.2 Propriétés thermiques:

Les céramiques techniques appelée aussi céramiques avancées conservent leurs propriétés même à des températures très élevées et sont étonnamment résistantes aux chocs thermiques, au vieillissement et aux agressions du rayonnement solaire. Ils ont une conductivité thermique très faibles.

### 2.5.3 Propriétés électriques:

Les composants en céramique et les raccords hermétiques en céramo-métallique à base d'alumine permettent d'obtenir une excellente isolation électrique. Il est

couramment utilisé dans les programmes haute tension avec une bonne tenue diélectrique, également appelée résistance à la rupture.

**Exemple :**

jonctions cuivre haute tension pour l'imagerie médicale.

**2.5.4 propriétés physiques :**

Les propriétés physiques de la matière sont : (poids, densité, imperméabilité aux gaz,

Chaleur), rayonnement radiatif et résistance aux contraintes érosives atmosphériques.[7]

**Tableau 1: Comparaison entre les propriétés de céramique et du métal.**

<b>Face à haute température</b>	<b>Céramique</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>_Bonne résistance thermique.</li> <li>_Bonne résistance à l'oxydation</li> <li>_Faible conductivité thermique.</li> </ul>
<b>Les couches intermédiaires</b> (continuité du matériau d'un point à l'autre)	<b>Céramique - métal</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>_Elimination des problèmes d'interface.</li> <li>_Relaxer les contraintes thermiques.</li> </ul>
<b>Face à basse température</b>	<b>Métal</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>_Bonne résistance mécanique.</li> <li>_Haute conductivité thermique</li> <li>_Très bonne ténacité.</li> </ul>

**2.5.5 Caractéristiques environnementales :**

La céramique est un matériau conservateur et sans danger pour l'homme et l'environnement, étant donné qu'elle est considérée comme un matériau neutre et amorphe.

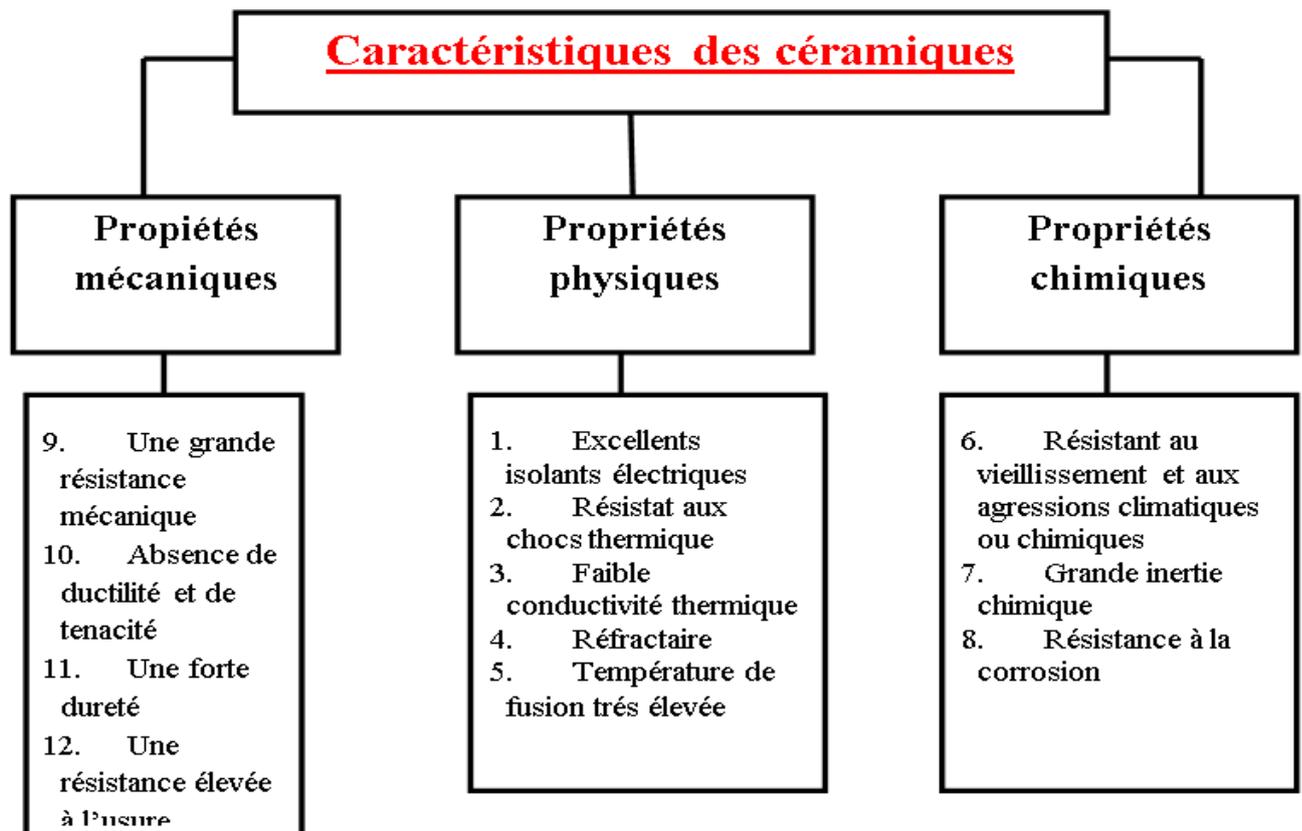
**Exemple :** Composants hypoallergéniques à base de zircone pour montres en céramique.

### Pourquoi remplacer le métal par la céramique?

A notre époque, la céramique est un produit exceptionnel aux propriétés très importantes. Dans la plupart des cas, les céramiques produites ou leurs propriétés de résistance à l'aggrégation sont supérieures ou similaires aux métaux durs dans lesquels elles sont présentes, tout en révélant des qualités tribologiques et des propriétés d'isolation électriques et thermiques supérieures. La céramique réduit les limitations physiques des autres matériaux et, au final, vous obtenez un produit de grande valeur avancé.

### Exemples de matériaux céramiques:

il existe plusieurs exemples de matériaux décoratifs, dont les suivants :( l'alumine moderne, /le nitrure de silicium /et de titane, le TiN, le graphite, le diamant, le verre pyrex, l'oxyde d'étain et le saphir d'indium. Règle de fibre optique et trioxyde de rhénium).



**Figure I.06 : cartactéristiques des céramiques**

## 2.6 L'utilisation de la céramique :

La céramique Technique occupe une place prépondérante dans plusieurs secteurs tels que médical, électronique et l'industrie mécanique , l'industrie nucléaire, aérospatiale, et l'industrie aéronautique.

Et nous le savons comme suit:

- **Médical :**

Le domaine médical utilise toujours le mot ou le concept de "biocéramique" pour désigner cette famille qu'il occupe

Matériaux utilisés en chirurgie réparatrice en utilisant des prothèses ( dents en céramiques, prothèse de fémur ou autres...)

- **mécanique :**

Quant au domaine mécanique, les céramiques techniques sont utilisées en raison des caractéristiques suivantes :

/Leur résistance aux conditions difficiles, telles que :

/résistance à la corrosion, stress

Haute mécanique,

fortes vibrations,

haute température. (1)

- **électronique:**

En raison de la variété des propriétés électriques et thermiques. Pour la céramique (1) il est devenu principalement et distinctement utilisé dans le domaine de l'électronique

- **Espace et aviation:**

En raison des propriétés thermiques de la céramique, elle est devenue couramment utilisée dans le domaine spatial.

De construction:

(Thermique)

- Temp > 1000°C.

- Résistance à certains environnements .

- Résistance mécanique et fiabilité des céramiques

Fibre Reinforced : C.M.C (Ceramic Matrix Compounds), qui permet

De nombreuses pièces complexes

- Composants de turbines .

- Chambre de combustion .

- Protection thermique .

### 3 Définition des matériaux FGM :

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués a été introduit pour la première fois au Japon dans la période 1984 lors du projet de fabrication d'un avion spatial, où un groupe de matériaux utilisés sert à un séparateur thermique capable de résister à une température de surface de 2000 °K, cela est devenu le sens est plus courant en Europe, en particulier en Allemagne. SFB Transregio se nourrit de puis 2006 en capitalisant sur le potentiel de la classification de matériaux uniques, tels que l'acier, l'aluminium et le polypropylène, à l'aide de procédés de fabrication à couplage thermique nous pouvons appliquer le sens de la gradation fonctionnelle à divers matériaux pour des applications structurelles et fonctionnelles. Il y a longtemps le concept a d'abord été évalué dans le développement de revêtements barrières pour doubler la résistance thermique des aubes dans les moteurs turbocompressés avec gaz pour différents programmes comme systèmes de protection thermique .

Des propriétés de gradient ont été développées dans les matériaux classés et ajoutés au mieux pour réduire les contraintes thermiques qui cela a causé la rupture de la céramique. Quant à la réalité dans laquelle nous vivons, ces matériaux se trouvent dans la nature à la limite de ces informations, nous avons l'exemple de la catégorisation du bambou, de l'os et même de notre peau pour subvenir les uns aux autres qualités tactiles et élastiques selon la profondeur de la peau et emplacement sur le corps quant aux composants (FGM) modifiés par l'homme ils impliquent généralement deux phases de matière isotrope ses composants sont souvent des alliages techniques de magnésium, d'aluminium, de cuivre, de titane, de tungstène, d'acier, etc.

Et céramique structurelles avancées telles que la zircone, l'alumine et le carbure de silicium et de tungstène.

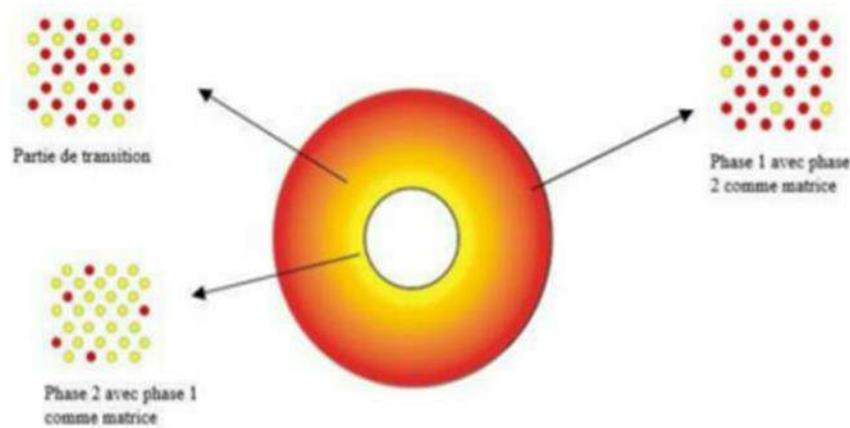


Figure I.07 : Concepte des matériaux à gradient de propriété

### 3.1 L'idée générale de développer des matériaux fonctionnellement gradués:

En 1987, l'idée de ce projet tournait autour de la façon dont les structures de rendu de matériaux florissants peuvent être utilisées comme séparateurs thermiques dans l'aérospatiale. Les éléments qui composent les parois des engins spatiaux sont destinés à fonctionner avec des températures de surface allant jusqu'à 1800°C et également avec un gradient de température de 1300°C. Il y a trois caractéristiques qui doivent être suivies pour concevoir de tels matériaux pour résister aux contraintes mécaniques :

- Résistance thermique.
- Résistance à l'oxydation à haute température de la couche superficielle du matériau (cohésion du matériau côté basse température).
- Relaxation efficace des contraintes thermiques le long du matériau. A l'issue de la première étape (1987-1989), les chercheurs ont réussi à l'issue de la première étape (1987-1989) à fabriquer de petites pièces expérimentales (1-10 mm de diamètre et 30 mm) capables de résister à des températures jusqu'à 2000 K (température de surface) et à une température. La gamme de couleurs est de 1000 K. Quant à la deuxième étape (1990-1991), le but était de produire des pièces de plus grandes tailles et de formes plus complexes par rapport à celles produites dans la première étape.
- Analyse numérique du comportement statique des dalles de matériaux fonctionnellement classés

- Recherche bibliographique sur les panneaux de matériaux fonctionnellement gradués durant les années 90.
- Il étend également le développement de matériaux classifiés et invités à d'autres domaines et les étend à d'autres applications : biomécanique, technologie des capteurs, optique, etc.

### **3.2 . Avantages et inconvénients des matériaux à gradient fonctionnel:**

Avec l'aspect d'atteindre son objectif premier, qui consiste à fournir les différentes propriétés requises et disponibles en différents points et surfaces du futur produit, qui peuvent être obtenues dans un simple revêtement. [Narottam.P et al, 2011]

De nombreuses autres personnes énumèrent de nombreux avantages supplémentaires des MGF. Ils démontrent certains avantages qui résultent principalement du fait qu'ils n'ont pas un front fort pour les MGF

#### **Par exemple**

##### **a. Avantage :**

- Réduire les contraintes thermiques résultant des différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés.
- Avoir une bonne cohésion entre différents matériaux tels que le métal et la céramique.
- Extension du domaine fonctionnel avant d'atteindre la valeur limite de déformation Plastique.
- Détartrage
- Augmentation de la ténacité à la rupture.
- Élimination des singularités de contrainte à divers endroits, tels que les surfaces libres, les coins, etc. [Narottam 2011].

##### **b. Inconvénients :**

Le principal obstacle à l'application généralisée des MGF est la complexité de sa fabrication.

En raison de l'inadéquation de diverses propriétés, qui sont représentées dans (température de fusion), (différentes affinités pour divers autres éléments), (taille des particules), (morphologie), etc.

On a par exemple des métaux à leur température de fusion ( $T_1$ ) et un mélange de Céramique à sa température de fusion ( $T_2$ ).

Dans la plupart des cas, cette paire est généralement ( $T_1 \ll T_2$ ). Puis si

La température de fabrication est proche de (T1), la céramique reste démoulée et la structure est intacte. La finale comprend des particules de céramique inutilisées dans une matrice métallique.

Dans de nombreux cas, ces structures présentent une porosité élevée et un manque d'adhérence entre elles divers composants, ce qui exclut de leurs applications générales. Cependant, pour Dans certaines applications, la présence de particules solides (carbures) dans une matrice Solide peut être nécessaire.

En revanche, travailler à proximité de (T2) conduira inévitablement à l'oxydation et à l'évaporation De nombreux minéraux.

Une cravate indésirable. Le matériel doit être

Il est réalisé sous atmosphère protectrice ou sous pression réduite, et ces deux technologies sont très intenses bien-aimé[14].

### 3.3 Domaines d'application :

Les applications céramiques sont nombreuses et variées, cependant, elles ne sont pas connues car cachées dans les systèmes

#### quelques exemples :

- **Electronique** :substrats, enceintes, condensateurs, ...
- **Automobile** :bougies, capteurs, pots catalytiques, filtres à particules diesel,
- **Industrie** : combustible nucléaire, filtres, composants de pompes, réacteurs chimiques, ...
- **Médical** :prothèses, tubes à vide pour scanner, etc...

La plupart des applications ci-dessus ne peuvent exister sans la céramique. Comme ses caractéristiques le rendent préféré et important presque partout. De plus, les matériaux gradués et additifs se sont distingués du reste des matériaux, c'est-à-dire la production de matériaux légers et résistants pouvant être appliqués dans de nombreux domaines tels que: (matériaux de construction; matériaux de conversion d'énergie; énergie nucléaire).

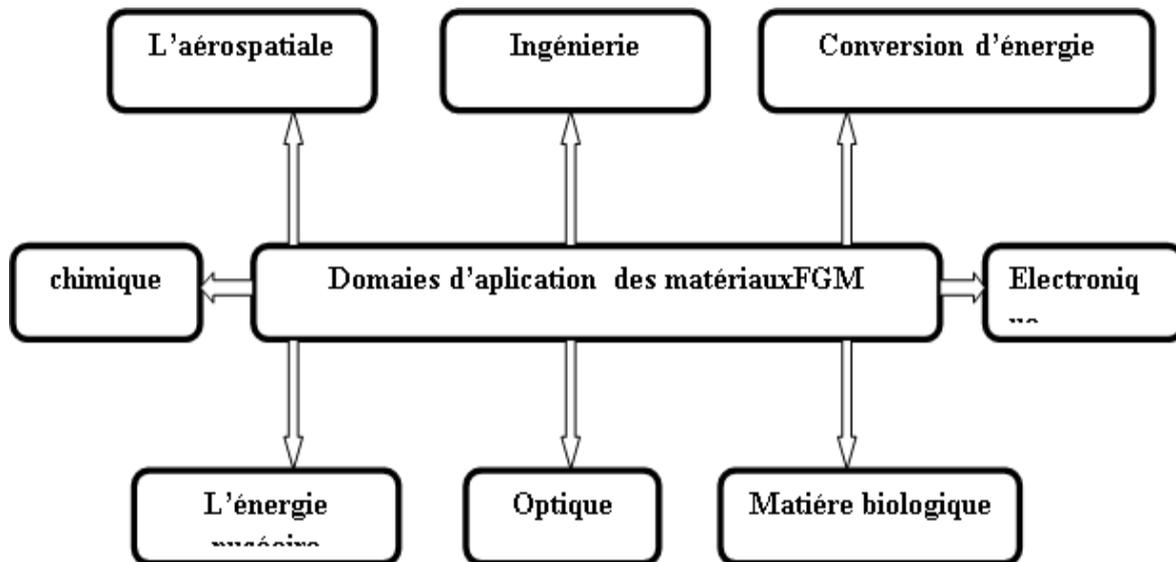


Figure I08: principaux domaines d'application des matériaux FGM

### 3.4 Conversion de l'énergie :

Des matériaux fonctionnellement classés sont également utilisés dans les dispositifs de commutation

d'énergie. Ils fournissent également des barrières thermiques et sont à leur tour utilisés comme

Revêtements pour protéger les aubes des moteurs à turbine à gaz.

La paroi interne du réacteur nucléaire est en FGM (céramique/métal) et convertisseurs thermiques pour la conversion d'énergie, panneaux solaires,

Cellules solaires, tubes et récipients sous pression, électrodes graduées Production de combustible à oxyde solide, piézoélectrique (3)

- **Sport** : Même dans les équipements sportifs, les matériaux gradués et la céramique font désormais partie des matériaux avec lesquels ces matériaux sont fabriqués.

**Par exemple** : matériel Golf, raquettes de tennis et planches à neige.

- **Agriculture** : La céramique technique est un matériau unique et efficace pour ce type d'application car sa résistance à la corrosion et à l'adhérence assure et réalise un fonctionnement correct dans ce type d'application.

Alors que dans le domaine de l'agriculture, des produits chimiques abrasifs sont utilisés pour les pesticides

De plus, les buses de pulvérisation doivent garantir que la sortie achemine le débit correct

- **Biomédecine :**

Quant à l'industrie biomédicale, il doit y avoir compatibilité entre les matériaux inertes et l'état vital, et il ne doit y avoir aucune interaction avec les tissus du corps humain.

De plus, les céramiques techniques telles que (l'alumine) ne réagissent pas chimiquement avec des facteurs étrangers, bien qu'elles soient le meilleur choix pour les prothèses et les implants dentaires.

Ainsi notre garantie de longévité est atteinte une fois implanté dans le corps humain.

- **L'aérospatiale:**

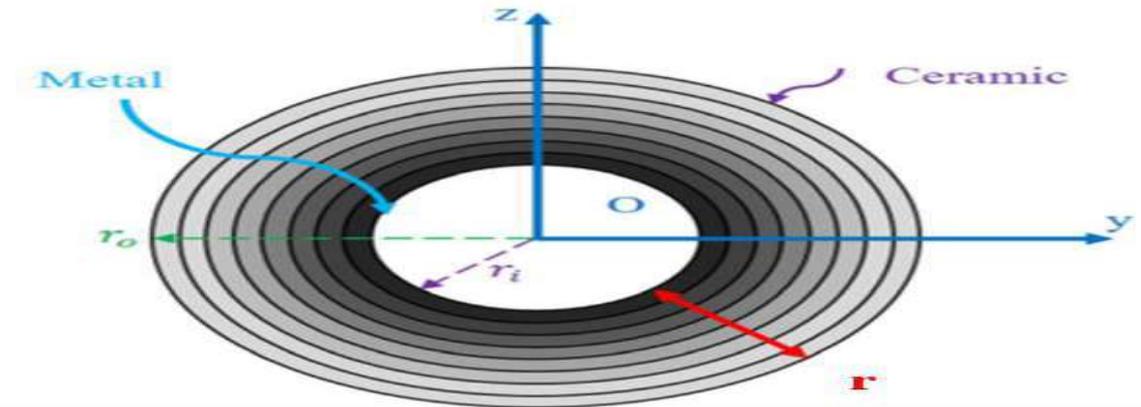
L'utilisation de la céramique technique est devenue populaire et florissante dans l'industrie aérospatiale au fil des ans. Les matériaux à gradation fonctionnelle se caractérisent par leur capacité à résister aux gradations Températures très élevées, ce qui le rend adapté aux espaces structurels et non structurels.

Les composants incluent (moteur de fusée), (châssis de vaisseau spatial),(plaques) et les structures d'échangeurs de chaleur telles que les plaques Panneaux solaires, couvercles de cames, aubes de turbine avec roues, revêtement d'aubes Turbines, capuchons avant et bords principaux de fusées et de navettes spatiales.

Des matériaux fonctionnellement classés sont également utilisés pour les murs porteurs Qui combinent des propriétés thermiques et acoustiques.

### **3.5 Modélisation des matériaux PFGM :**

La FGM est un matériau hétérogène composé de deux matériaux aux propriétés structurelles et fonctionnelles différentes, et il est utile d'utiliser un schéma d'homogénéisation pour simplifier sa microstructure hétérogène complexe afin qu'elle puisse être analysée de manière efficace. Du fait de cette idéalisation, les solutions fermées de certains problèmes peuvent également être résolues, ce qui est également très utile pour l'évolution et le développement de modèles numériques de structures FGM. La FGM peut être définie par des changements dans les fractions volumiques des phases constitutives. Les propriétés de ces matériaux sont généralement supposées suivre un gradient continu à travers l'épaisseur. Plusieurs modèles mathématiques ont été développés au fil des ans pour déduire les propriétés effectives des matériaux FGM. Ces modèles peuvent être utilisés pour estimer les propriétés globales des matériaux composites sur la base de la connaissance de la composition des matériaux constitutifs et de leurs propriétés (Elishakoff et al., 2016).



**Figure I.09 : Coupe transversale du modèle d'arbre FG avec protection extérieure en céramique (Assem et al., 2020).**

Les axes  $y$  et  $z$  définissent la direction de l'épaisseur (Figure I.10). Les propriétés mécaniques du rotor, à savoir son module d'Young, sa densité et son coefficient de Poisson, qui varient continûment dans le sens de l'épaisseur selon l'axe  $z$ , à savoir :  $E=E(z)$ ,  $\rho=\rho(z)$ ,  $\nu=\nu(z)$ .

Les propriétés de l'arbre hiérarchique fonctionnel dépendent de la position radiale.

- **Propriétés matérielles des structures P-FGM :**

Cette méthode est la plus communément utilisée. La fraction volumique de cette classe obéit à une fonction de loi de puissance, selon laquelle une variation continue de la fraction volumique entraîne une modification des propriétés des FGM, la fraction volumique des métaux est donnée par ((Otmani Malika, 2020) :

$$V_f = \left( \frac{r-r_i}{r_o-r_i} \right)^k \quad (\text{I.01})$$

Avec :

$r_o$  Rayon de la face extérieure.

$r_i$  Rayon de la face intérieure.

$k$  Indice de graduation Power Law du volume fraction.

Pour les positions radiales entre deux surfaces extrêmes, les fractions volumiques totalisent toujours 1.

$$V_m + V_c = 1 \quad (\text{I.02})$$

Les propriétés du matériau FGM sont données selon une loi de puissance (I.3) mise à l'échelle en fonction de la fraction volumique de la masse volumique. L'extérieur est en céramique et l'intérieur en métal.

$$P(z) = [P_c - P_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + P_m \quad (\text{I.03})$$

$$\rho(z) = [\rho_c - \rho_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + \rho_m \quad (\text{I.04})$$

$$E(z) = [E_c - E_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + E_m \quad (\text{I.05})$$

$$V(z) = [V_c - V_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + V_m \quad (\text{I.06})$$

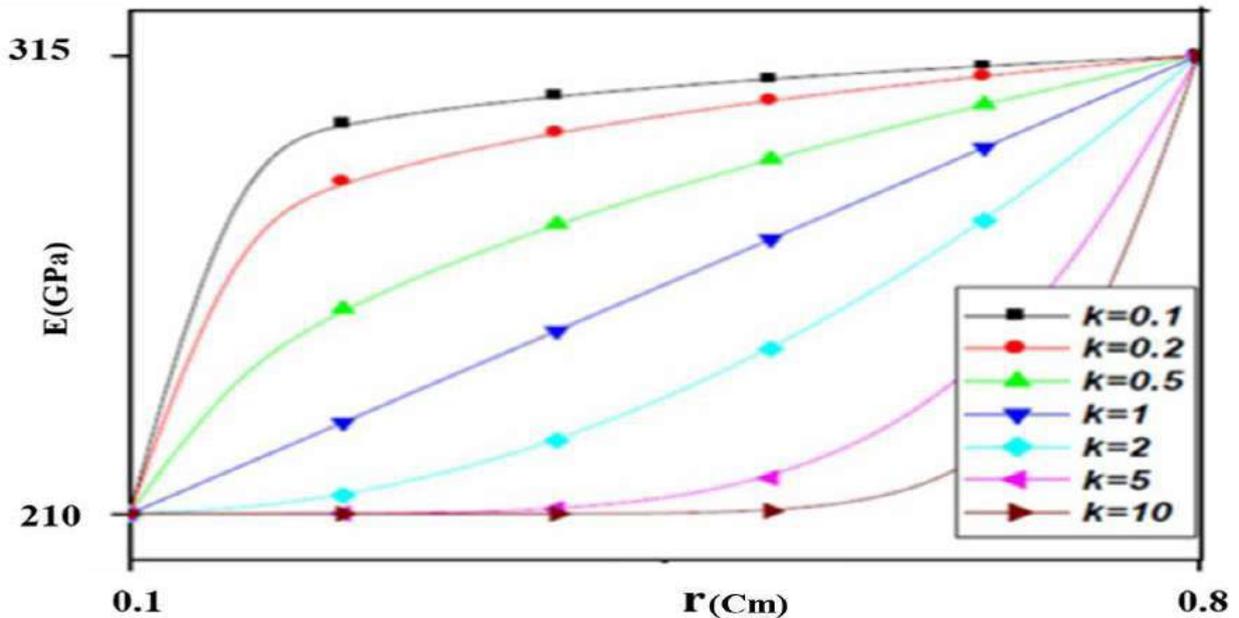
La somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\Sigma V_j = 1 \quad (\text{I.07})$$

Ainsi, le module de Young de ces structures est exprimé par :

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (\text{I.08})$$

Le changement des propriétés du matériau FG peut être observé sur la courbe de la figure 05, qui montre le changement du module de Young de l'arbre. Ces propriétés sont fonction de l'exposant de mise à l'échelle du volume fractionnaire, qui peut varier avec le rayon de l'arbre selon une loi de puissance.



FigureI10 :Variation du module de Young à travers le rayon de la structure P-FGM (Otmani Malika,2020).

Nous remarquons sur la Figure 05 que le module de Young diminue ( $k > 1$ ) vers le bas de l'arbre et augmente ( $k < 1$ ) vers le haut, et que le module de Young change linéairement pour  $k = 1$ . Nous avons également remarqué qu'en raison de l'augmentation de la valeur du module de résistance, l'arbre devient plus fort, bien sûr si nous augmentons le pourcentage de céramique dans l'arbre et vice versa : si le module d'Young de l'arbre est faible, c'est en raison de la diminution de la quantité de céramique due à l'utilisation accrue de métal (Otmani Malika, 2020).

#### **4 Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons vu une brève introduction aux matériaux FGM, à leur historique de développement et à leurs propriétés. Décrivez ensuite les différentes lois régissant l'anisotropie des matériaux (module d'Young, densité, coefficient de Poisson), ces lois peuvent être une exponentielle ou même une puissance  $x$ . Enfin, nous avons terminé avec les propriétés physiques et mécaniques des matériaux FGM et leurs domaines d'application ainsi que leurs avantages et inconvénients.

Nous introduisons à nouveau le modèle de lissage P-FGM qui régit la variation des propriétés physiques du matériau "module d'Young, coefficient de Poisson et densité" à travers des épaisseurs d'arbres fonctionnellement graduées, et enfin nous introduisons les différents éléments du rotor.

## ***Chapitre II***

*Analyse numérique pour la méthode des  
éléments finis*

## **1 Introduction :**

L'étude ou l'analyse des vibrations n'est pas une science récente, mais au fil des années, il y a eu un regain d'intérêt pour les exigences de conception et de dimensionnement pour des conditions optimales de fonctionnement, de sécurité et d'environnement.

L'analyse dynamique du rotor repose d'abord sur la publication d'un modèle mathématique approprié. Les ingénieurs ont souvent besoin de développer un modèle mathématique qui décrit un problème de manière aussi fiable que possible.

Le développement du modèle est généralement basé sur certaines hypothèses et certaines hypothèses simplificatrices pour dériver les équations gouvernantes, qui sont généralement des équations différentielles avec des conditions aux limites ajoutées. Compte tenu de la complexité du problème, le modèle éléments finis est le modèle le plus sûr, nous l'avons donc adopté.

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique, etc.) permettent de décrire le comportement des systèmes physiques à l'aide d'équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus courantes pour résoudre efficacement ces équations aujourd'hui.

Cela nécessite beaucoup d'utilisation de l'ordinateur.

Il s'agit d'une approche très générale, applicable à la plupart des problèmes rencontrés en pratique : stationnaires ou instationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans n'importe quel domaine géométrique 1D, 2D ou 3D.

De plus, il est bien adapté aux environnements hétérogènes que les ingénieurs rencontrent souvent dans la pratique.

## **2 Définition de la méthode des éléments finis :**

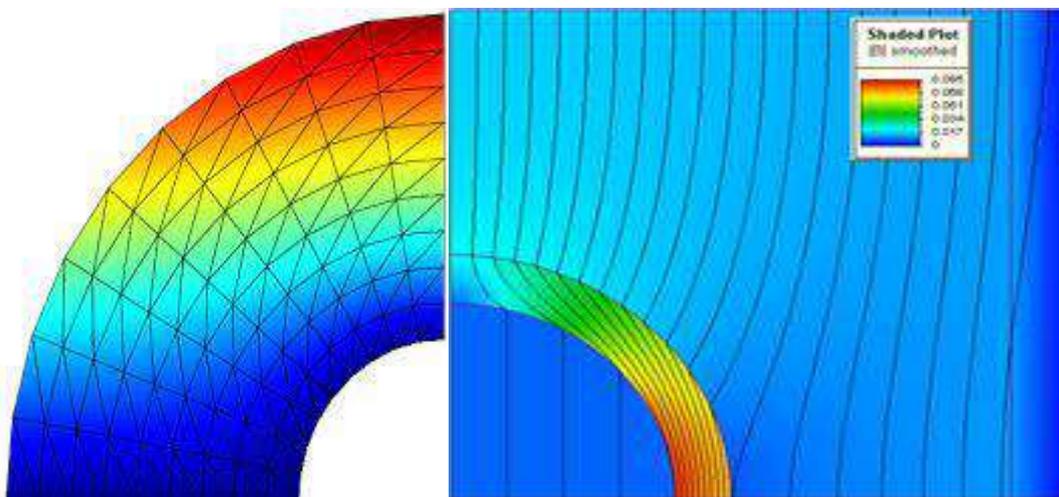
Connue depuis les années 1950, la méthode des éléments finis a été utilisée dans les calculs de l'analyse Numérique et n'a cessé d'évoluer.

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis est utilisée pour le calcul de dimensionnement des structures mécaniques, génie civil et calculs fréquentielles pour la maintenance prévisionnelle des équipements industriels

Est utilisée aussi pour résoudre des problèmes environnemental et énergétiques écoulement de fluide ou de transfert de chaleur. La M.E.F. est une technique multidisciplinaire qui met en œuvre des connaissances issues de plusieurs disciplines fondamentales telles que la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée.

La méthode des éléments finis est une méthode qui donne des résultats approchés aux résultats réels, et l'optimisation de ces résultats est effectués par la décomposition de l'élément étudié en plusieurs sous éléments appelé champ M.E.F où l'on souhaite effectuer des simulations dans un sous-domaine de formes géométriques simples dites "éléments finis", pour lequel on effectue une approximation nodale du champ de déplacement qui prend en général la forme de fonctions polynomiales. L'ensemble de ces éléments constitue ce que l'on appelle le maillage du domaine.

Ces éléments sont liés par un nombre fini de conditions de continuité, exprimées en certains points communs à plusieurs éléments appelés 'nœuds'.



**FigureII 01 :Modèle de méthode des éléments finis**

### **3 Domaines d'applications de la MEF :**

Les principaux domaines d'application du MEF sont les suivants :

- **Problèmes d'équilibre et de statique** : le comportement du système ne change pas dans le temps.
- **Problèmes dynamiques et de stabilité (valeurs propres)** : Ce sont des extensions de problèmes d'équilibre où l'on détermine des valeurs spécifiques ou critiques pour certains paramètres.
- **Problèmes de propagation** : problèmes ou phénomènes dont le comportement coordonné dépend de facteurs temporels.

### 3.1 Modélisation par la méthode des éléments finis en générale :

De nombreux scientifiques ont été motivés pour faire avancer leurs recherches sur le calcul par éléments finis en raison de son approche unique. Cette méthode est issue de la combinaison de deux versions distinctes.

Pour la version h, les fonctions de forme sont des polynômes linéaires représentant chaque degrés de libertés.

Le degré polynomial est souvent noté " P " dans la version p, également connue sous le nom de méthode des éléments finis hiérarchiques-MEFH. Cette version permet d'augmenter les degrés des fonctions polynomiales sans modifier la taille du maillage.

Maintenant, le but est de faire converger les deux méthodes précédentes en affinant le maillage et en augmentant le degré de l'élément.

Il en résulte une approche innovante, Version h-p, qui combine efficacement ces méthodes.

### 3.2 Types de problèmes MEF :

- **Problèmes d'équilibre statique** : Défini par l'état, la géométrie, les charges et les conditions aux limites du système, un ensemble de variables nodales crée un système d'équations linéaires qui décrit le comportement dans cette classe de problèmes. Les types de problèmes entrant dans cette catégorie couvrent l'équilibre statique, l'écoulement constant, le transfert de chaleur et les états électromagnétiques.
- **Problème aux valeurs propres** : L'instabilité de l'écoulement laminaire, le flambement des structures et les modes naturels de vibration sont autant d'exemples de phénomènes instables qui se produisent au repos. Ceux-ci constituent des vibrations.

- **Problèmes liés au temps** : L'interdépendance survient dans un système lorsque son historique et ses paramètres de sortie jouent un rôle critique dans la détermination de son état, ce qui le rend impossible à résoudre directement.

Les transitoires, la fissuration des pièces, le comportement non linéaire (matériau et géométrie) et la dynamique non linéaire (amortissement, rigidité, etc.) sont tous présents dans ces instances.

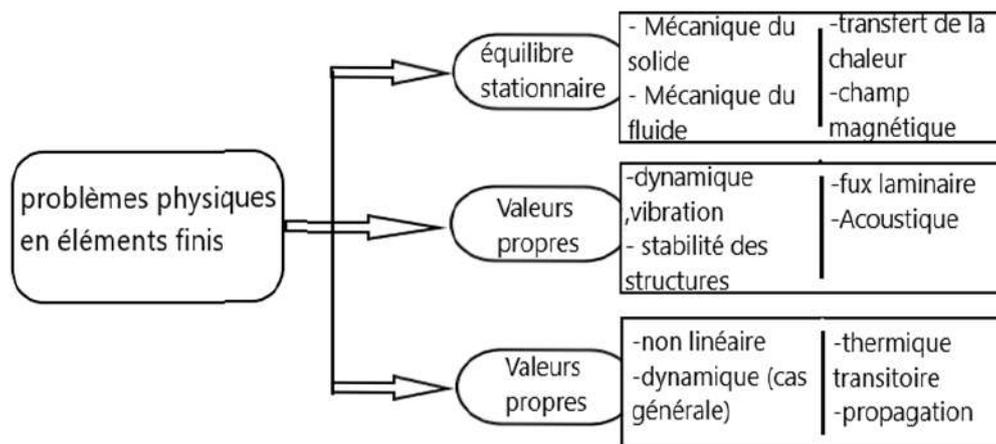


Figure II02 : Différents types des problèmes physiques en éléments finis

#### 4 Théorie pratique :

Pour l'utilisation de la méthode des éléments finis certaines approximations doivent être faites afin de faciliter et de respecter la compatibilité d'utilisations.

Pour un dimensionnement optimal de la structure, il faut connaître :

- Les déplacements en tout points.
- Les déformations, les contraintes.
- Les températures et les flux de chaleurs
- Les fréquences propres ...etc.....

## 5 Equations aux dérivées partielles :

Par des équations aux dérivées partielles (EDP) de nombreux problèmes physiques sur des domaines spatiaux et des volumes sont décrits.

C'est une fonction qui généralise une équation différentielle à plusieurs variables. Par exemple, si nous avons une fonction à trois variables  $f(x_1, x_2, x_3)$ , alors l'équation suivante :

C'est une équation aux dérivées partielles.

Cette équation est accompagnée de conditions aux limites : la valeur de la fonction ou ses dérivées partielles en certains points.

Remarque : La fonction  $f$  peut être une fonction vectorielle

\* Cette équation inclut généralement la dérivée seconde.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} ; \text{ou} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

## 6 démarche générale :

La méthode des éléments finis (MEF) comprend : Décomposer le modèle spatial en éléments finis : c'est le maillage.

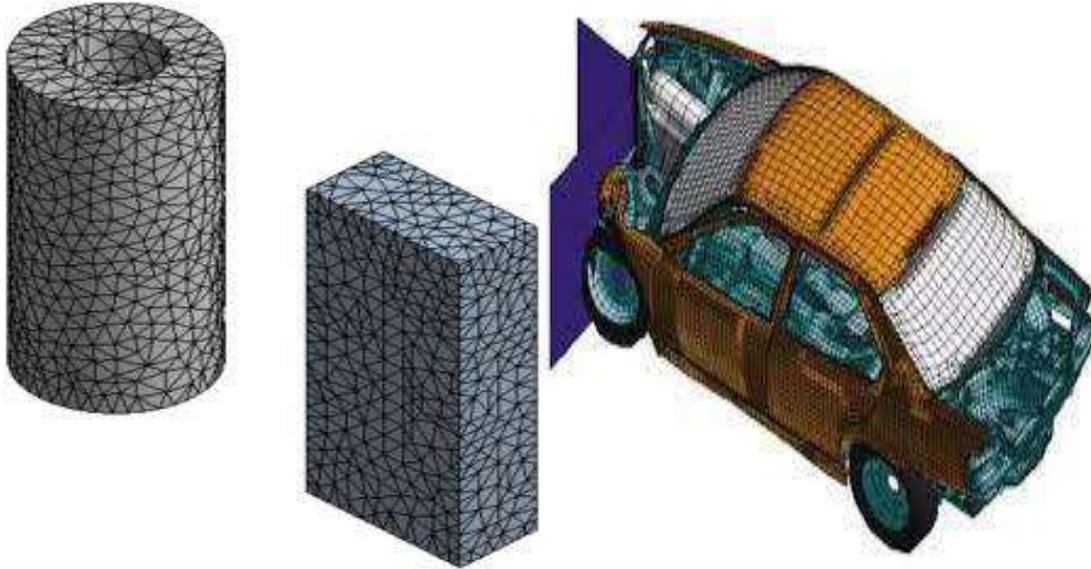
Rédiger une version simplifiée de l'EDP sur chaque élément sélectionné ; Et notez que les conditions aux limites de l'élément ne sont pas connues, seuls les termes généraux sont connus.

Recueillir des expressions d'équations aux dérivées partielles locales pour appliquer les conditions aux limites du problème.

La mise en œuvre de cette méthode comprend les étapes suivantes :

- **Analyse du problème** : Clarifier l'objectif du calcul, rechercher les zones où des problèmes pourraient survenir et le calculer manuellement à l'aide d'un modèle hautement simplifié pour obtenir des résultats d'un ordre de grandeur supérieur.

- **Maillage:** Divisez le modèle en éléments finis, il est recommandé de choisir une forme pour les éléments d'adaptation afin qu'ils puissent avoir un maillage régulier, et de vérifier la qualité du maillage.



Maillage d'une structure creuse  
Et pleine

Maillage d'un crash test  
de véhicule

**Figure II03 :Modèle de maillage**

Le maillage consiste à diviser l'espace en petits domaines appelés éléments finis. Utilisez des objets solides (3D), mais vous pouvez :

- Utiliser des éléments surfaciques (2D) si la pièce étudiée est une couverture.
- Si la partie étude est un package.
- Utilisation d'éléments linéaires (1D) Plusieurs types d'éléments finis sont utilisés. Tout d'abord, rappelez-vous qu'il existe deux principaux types de coques et de solides :
  - Articles carrés (coque) ou cubiques (volume).
  - Éléments triangulaires (coque) ou tétraédriques (volume).

Déduire ensuite les autres points par interpolation polynomiale.

Sauf cas particuliers, en interpolation, plus on s'éloigne du point connu, plus l'écart avec la valeur théorique est grand.

Par conséquent, plus le réseau est grossier, plus l'erreur en dehors des nœuds est importante.

Considérons un élément donné dont les nœuds sont numérotés de 1 à n ; Nous nous référons aux sommets d'un polygone ou d'un polyèdre.

FEM consiste à calculer la valeur solution de la fonction de la PDE - aux nœuds ; Nous ne recherchons pas des valeurs à chaque point de l'espace, mais seulement à certains points.

Par conséquent, FEM est une estimation du problème. La fonction  $f$  est une fonction vectorielle de dimension  $d$ .

Il faut donc, pour chaque nœud, déterminer la valeur de  $d$  nœuds dits à "degrés de liberté". (1)

## 6.1 Les équations du mouvement de l'arbre :

Les équations de la grange utilisent l'expression des énergies calculées à partir d'une formulation de type éléments finis , le vecteur des déplacements aux nœuds de l'arbre est noté ( $q$ ).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{cr}}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial E_{cr}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{dr}}{\partial q_i} \quad (\text{II.01})$$

Avec l'énergie cinétique du rotor :

$$E_{cr} = E_{cd} + E_{ca} \quad (\text{II.02})$$

$$E_{dr} = E_{da} \quad (\text{II.03})$$

$E_{cr}$  :Energie cinétique du rotor.

$E_{cd}$  :Energie cinétique de disque.

$E_{ca}$  :Energie cinétique de l'arbre .

$E_{dr}$  :Energie de déformation du rotor.

$E_{da}$  :Energie de déformation de l'arbre .

On obtient l'équation finale du mouvement du rotor :

$$[M_a + M_d]\{\ddot{q}\} + ([C_{ga} + C_{gd}] + [C_p])\{\dot{q}\} + ([q_a] + [K_p])\{q\} = 0 \quad (\text{II.04})$$

$M_a$  :Matrice masse d'arbre.

$M_d$  :Matrice masse du disque .

$C_{ga}$  :Matrice gyroscopique d'arbre proportionnelle à la vitesse de rotation  $\Omega$ .

$C_{gd}$  :Matrice gyroscopique du disque proportionnelle à la vitesse de rotation  $\Omega$

$C_p$  :Matrice d'amortissement visqueux due aux paliers.

$K_a$  :Matrice de rigidité de l'arbre.

$K_p$  :Matrice de rigidité des paliers.

On pose :

$$K = K_a + K_p \quad (\text{II.05})$$

$$M = M_a + M_d \quad (\text{II.06})$$

$$C = C_g = C_{ga} + C_{gd} + C_p \quad (\text{II.07})$$

L'équation différentielle prend la forme :

$$[M_a]\{\ddot{q}\} + [C_g]\{\dot{q}\} + [K_g]\{q\} = 0 \quad (\text{II.08})$$

$[M_g]$ ,  $[C_g]$ ,  $[K_g]$  ,sont respectivement la masse globale, la raideur et les matrices d'amortissement du système rotor.

Les solution de cette équation différentielle en tenant compte de l'amortissement structural donnent les fréquences recherchées à variable complexes.(Gmu r , 1997).

## 6.1 L'équation du mouvement de rotor :

L'équation globale du mouvement du système rotor est développée en utilisant la version classique de la méthode des éléments finis (h-MEF) et par l'application de l'équation de la grange .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = F_i \quad (\text{II.09})$$

$E_c$  :énergie cinétique du système rotor .

$E_p$  :énergie potentielle du système rotor .

$F_i$  :forces extérieures.

$q_i$  :coordonnées généralisées.

Pour la modélisation par éléments finis, chaque éléments de l'arbre est limité par deux nœuds, chaque nœud de ces éléments possède deux degrés de libertés, les paliers sont situés aux extrémités de l'arbre.

Tous les déplacements et rotations sont remplacés par le produit du vecteur des coordonnées généralisées et la matrice des fonctions de forme  $c$

$$\begin{cases} U_t = [N_{ut}]\{q_{ut}\} \\ \theta_y = [N_{ut}]\{q_{ut}\} \\ V_t = [N_{vt}]\{q_{vt}\} \\ \theta_x = [N_{vt}']\{q_{vt}\} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

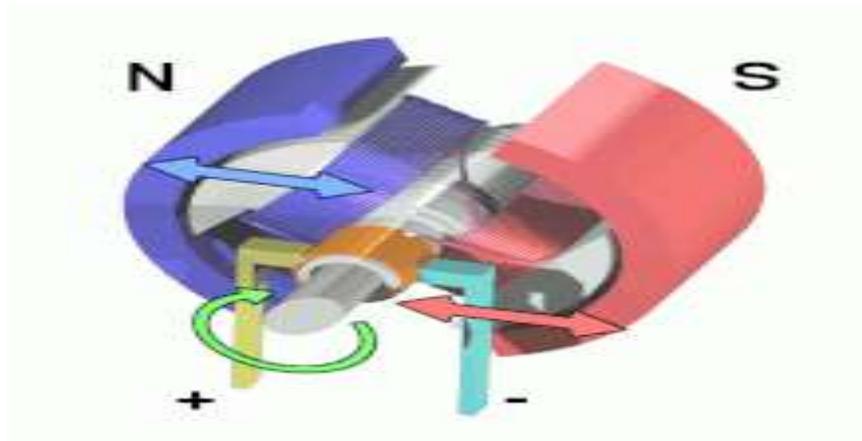
Ou,  $[N'_{ut}]$  et  $[N'_{vt}]$  sont donnés comme suit :

$$\begin{cases} [N'_{ut}] = \frac{\partial [N_{ut}]}{\partial z} \\ [N'_{vt}] = \frac{\partial [N_{vt}]}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

$[N]$  est la matrice des fonctions de forme et  $\{q\}$  est le vecteur des coordonnées généralisées.

Les fonctions de forme de la version classique de la méthode des éléments finis, qui représentant les déplacements et rotations réels de chaque nœud d'un élément, sont données par Bardell(1996).

Le remplacement des déplacements et des rotations par les coordonnées généralisée et les vecteurs des fonctions de forme dans les équations des énergies cinétiques et potentielles des différentes composants du système rotor et l'application de l'équation de la grange, permettent de déduire les matrices élémentaires de notre système.



**6.1.1.1** Figure II 04 : **Rotor au centre relié à l'axe tournant, stator fixe externe**

## 7 Localisation du problème :

La structure se caractérise par sa géométrie et ses matériaux constitutifs. Il est affecté par la pression : tension, déplacement, flux de chaleur et vitesse.

Pour obtenir la taille optimale de la structure, il faut savoir :

- Mouvement à chaque point
- Déformation et compression.
- Température
- Fréquences propres etc...

La solution au problème d'estimation est la solution approchée du problème réel, et la méthode généralement utilisée est la méthode des éléments finis.

La méthode des éléments finis a une très large gamme d'applications en génie mécanique, telles que : l'industrie automobile et autres.

La méthode des éléments finis consiste à diviser le domaine pour lequel la solution est recherchée en sous-domaines appelés « éléments finis ».

Les quantités inconnues telles que le déplacement dans chaque élément sont représentées par un simple frottis appelé "fonction de forme".

Pour de telles formules, le choix des subdivisions étiquetées "maille" limite la précision de l'approximation.

## 8 Formulation du matériau FGM métal-céramique:

- **Arbre à gradient fonctionnel :**

- ❖ L'expression de la fraction volumique des métaux dans la structure P-FGM est :

$$V_f = \left( \frac{r-r_i}{r_o-r_i} \right)^k \quad (\text{II.12})$$

- ❖ Les propriétés matérielles de l'arbre Ps donnée par :

$$P(r) = [P_o - P_i] \left( \frac{r-r_i}{r_o-r_i} \right)^k + P_i \quad (\text{II.13})$$

Avec :

$r_i$  :Le rayon intérieur de l'arbre.

$r_o$  :Le rayon extérieur de l'arbre.

$k$  :L'indice de volume fraction.

$P_i$  :Propriété de la couche intérieure de l'arbre.

$P_o$  :Propriété de la couche extérieure de l'arbre.

$$P(r) = [P_c - P_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + P_m \quad (\text{II.14})$$

• **Énergie cinétique :**

- ❖ Le vecteur de position de tout point sur la section transversale de l'arbre dans OXYZ comme suit :

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_t \\ V_t \\ W_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta_z \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta_z & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\theta_x \\ 0 & \theta_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Omega t & -\sin\Omega t & 0 \\ \sin\Omega t & \cos\Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{II.15})$$

$U_t, V_t, W_t$  : représente les déplacements en translation de l'arbre dans OXYZ.

- ❖ les rotations  $\theta_y$  et  $\theta_x$  sont donnés comme suit :

$$\theta_x = \frac{dU_t}{dy}, \theta_z = \frac{dW_t}{dy} \quad (\text{II.16})$$

- ❖ L'énergie cinétique de l'arbre FG en rotation peut s'écrire :

$$T_a = \frac{1}{2} \int_0^{L_a} I_m \left( (\dot{U}_t^2) + (\dot{W}_t^2) \right) dy + 2\Omega I_p \int_0^{L_a} (\theta_x (\dot{\theta}_z)) dy \quad (\text{II.17})$$

- ❖ Les expressions de  $I_m$  et  $I_p$  sont définis comme suit :

$$\begin{cases} I_m = 2\pi \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho_a(r) r dr \\ I_p = 2\pi \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho_a(r) r^3 dr \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

- ❖ La densité  $\rho_s(r)$  varie selon la relation de gradation donnée dans l'Eq :

$$\rho(r) = [\rho_c - \rho_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + \rho_m \quad (\text{II.19})$$

• **Énergie de déformation :**

- ❖ L'énergie de déformation de l'arbre est déterminée à partir du champ de déplacement de tout point de l'arbre dans les coordonnées de rotation :

$$\{U_r, V_r, W_r\}^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z\theta_x + x\theta_z \end{pmatrix} \quad (\text{II.20})$$

$U_r, V_r, W_r$  Représente les déplacements et les rotations de tout point sur la section transversale de l'arbre.

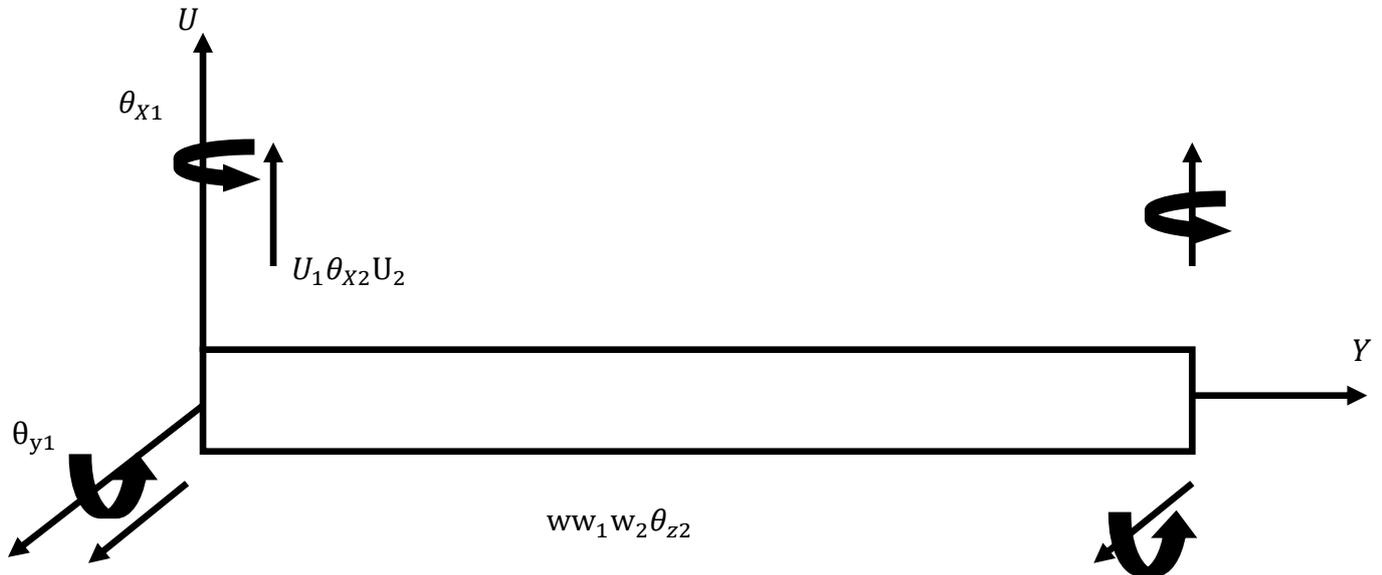


Figure II.05 : les déplacements et les rotations de l'arbre.

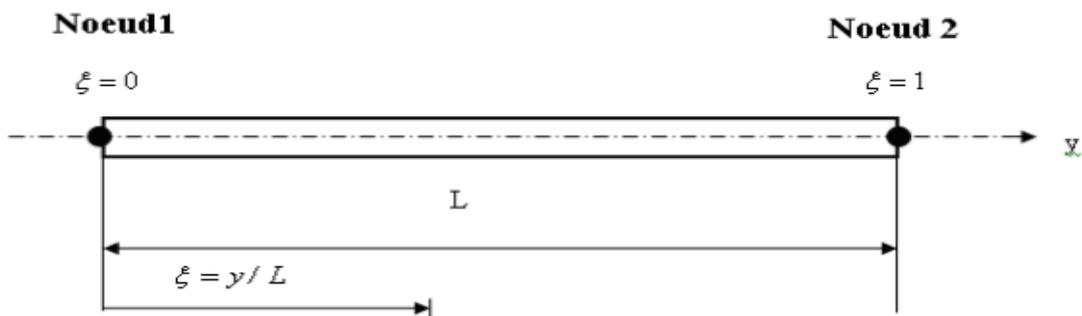


Figure II 06 : Représentation d'un élément de poutre

- ❖ l'énergie de déformation due à la flexion de l'arbre est donnée comme suit :

$$U_{arbre} = \frac{1}{2} \int_0^{L_a} E_a(r) \varepsilon^2_{zz} dS dz \quad (II. 21)$$

$$U_{arbre} = \frac{1}{2} \int_0^{L_a} \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \pi E_a(r) r^3 \left( \frac{d^2 V_t}{dZ^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 U_t}{dZ^2} \right)^2 dr dz \quad (II. 22)$$

- ❖ l'expression du module de Young  $E(r)$  s'écrit :

$$E(r) = [E_c - E_m] \left( \frac{r - r_m}{r_c - r_m} \right)^k + E_m \quad (\text{II. 23})$$

- **Paliers :**

- ❖ le travail virtuel  $\partial W$  des efforts extérieurs des paliers agissant sur l'arbre s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial W = & -k_{XX}U\partial U - k_{XY}V\partial U - k_{YY}V\partial V - k_{YX}U\partial V - c_{XX}\dot{U}\partial U - c_{XY}\dot{V}\partial U - c_{YX}\dot{U}\partial V \\ & - c_{YY}\dot{V}\partial V = F_U\partial U + F_V\partial V \end{aligned} \quad (\text{II. 24})$$

- ❖ Les composantes des forces généralisées  $F_U$  et  $F_V$  sont données par :

$$\begin{bmatrix} F_U \\ F_V \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{bmatrix} \quad (\text{II. 25})$$

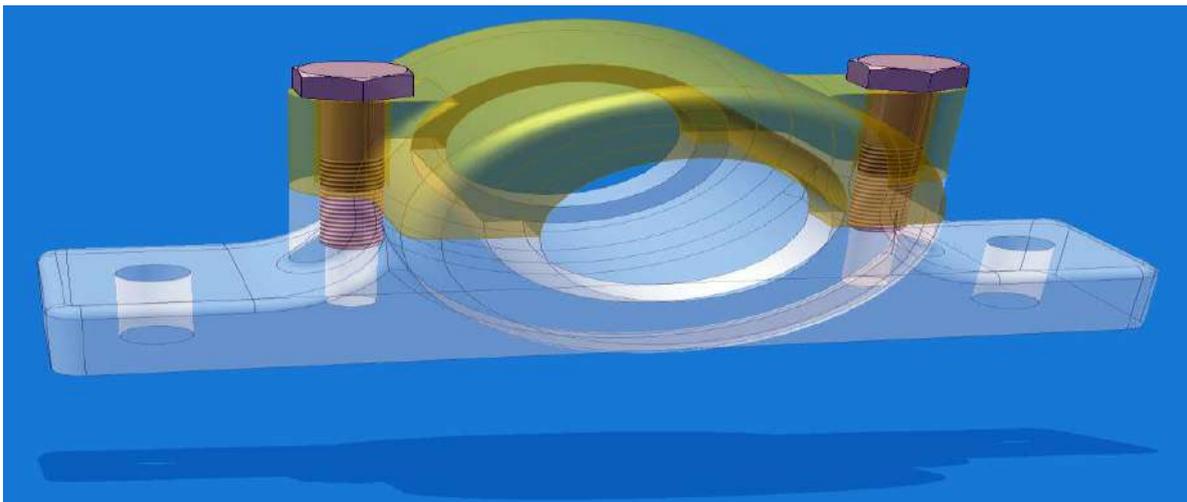


Figure II07 :Palier.

## 9 Champs des déplacements :

Est donnée par la relation :

$$\begin{cases} u(X, Y, Z) = u_o(y) \\ v(X, Y, Z) = v_o(y) - Z\psi - X\theta(Y) \\ w(X, Y, Z) = w_o(y) \end{cases} \quad (\text{II. 26})$$

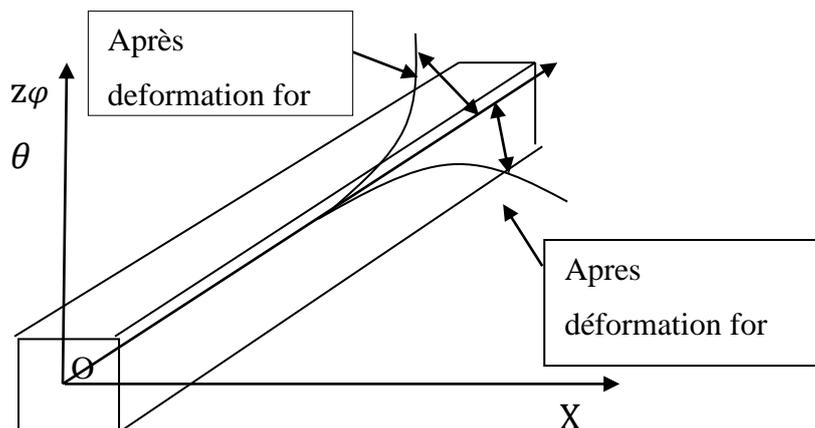
$v_o(y)$  :Déplacement transversal suivant.

$u_o(y)$  :Déplacement longitudinal négligé suivant.

$w_o(y)$  :Déplacement transversal suivant.

$\psi(y)$  :Rotation de la section droite autour deOZ .

$\theta(y)$  :Rotation de la section droite autour de OX .



**FigureII 08 : déformation de l'arbre autour de l'axeoy**

Dans le cas des hypothèses d'Euler Bernoulli, les rotations  $\theta$  et  $\psi$  s'expriment en fonction de  $u_o$  et  $w_o$ :

$$\theta(Y) = u_{o,y} \quad (\text{II. 27})$$

$$\psi(Y) = w_{o,y} \quad (\text{II. 28})$$

- Pour une flexion dominante  $v_o = 0$ , le déplacement s'exprime par :

$$V(X, Y, Z) = -Zw_{o,y} + Xv_{o,y} \quad (\text{II. 29})$$

- Le champ de déplacement obtenu est :

$$\begin{cases} u(X, Y, Z) = u_o(y) \\ v(X, Y, Z) = -Z\psi(y) + X\theta(y) \\ w(W, Y, Z) = w_o(y) \end{cases} \quad (\text{II. 30})$$

## 10 Fonctions de forme :

Est utilisées sont les fonctions de forme hiérarchique trigonométrique définies :

$$N: \begin{cases} f_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ f_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \\ f_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ f_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \\ f_{r+4}(\xi) \end{cases} \quad (\text{II. 31})$$

$$f_{r+4}(\xi) = \delta r [-\xi + (2 + (-1)^r)\xi^2 - (1 + (-1)^r)\xi^3] + \sin \delta r \xi \quad (\text{II. 32})$$

$$\delta r = r\pi \quad (\text{II. 33})$$

$$r = 1, 2, 3.. \quad (\text{II. 34})$$

- Les fonctions de forme associées aux deux nœuds sont :

$$f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), f_4(\xi) \quad (\text{II. 35})$$

- Les fonctions de forme associées à l'intérieur de l'élément arbre (entre les nœuds) sont :

$$f_{r+4}(\xi) \quad (\text{II. 36})$$

- Le champ des déplacements d'un point de la poutre sont données par :

$$u_0(\xi) = [N_u]\{q_u\} \quad (\text{II. 37})$$

$$\{q_u\}^T = \{X_1, X_2, X_3 \dots X_{P_x}\}^T \quad (\text{II. 38})$$

$$w_0(\xi) = [N_w]\{q_w\} \quad (\text{II. 39})$$

$$\{q_w\}^T = \{Z_1, Z_2, Z_3 \dots Z_{P_z}\}^T \quad (\text{II. 40})$$

$N_u$  :Les fonctions de forme suivant la direction x.

$N_w$  :Les fonctions de forme suivant la direction z.

$q_u$  et  $q_w$  :Représentent les vecteurs déplacements généralisés.

$$\{q\} = \{q_u, q_w\}^T \quad (\text{II. 41})$$

## 11 Détermination des matrices du disque :

- l'expression de l'énergie cinétique prend la forme suivante :

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \rho(r) S e (\{B\}^T [\dot{\phi}]^T [\dot{\phi}] \{B\}) + \frac{1}{2} \rho(r) S e (\{B\}^T \{B\}) + \rho(r) S e \Omega (\{B\}^T [\dot{\phi}] \{B\}) \quad (\text{II. 42})$$

### 11.1 Matrice de rigidification centrifuge :

Est déduite du premier terme de la relation :

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2} \rho(r) S_D e (\{B\}^T [\dot{\phi}]^T [\dot{\phi}] \{B\}) \quad (\text{II. 43})$$

- L'énergie cinétique exprimée par la matrice des vitesses de rotations :

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2} \rho(r) S_D e \left( \{B\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} \right) \quad (\text{II. 44})$$

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2} \rho(r) S_D e \Omega^2 \left( \{B\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{B\} \right) \quad (\text{II. 45})$$

- l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme :

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2} \rho(r) S_D e \Omega^2 (\{q\}^T [N]^T [N] \{q\}) \quad (\text{II. 46})$$

- En introduisant les deux plans la matrice de rigidification est :

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2} \rho(r) S_D e \Omega^2 (\{q_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{q_u\}) + \frac{1}{2} \rho(r) S_D e \Omega^2 (\{q_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{q_w\}) \quad (\text{II. 47})$$

$$[R_{Du}] = \rho(r) S_D e \Omega^2 ([N_u]^T [N_u]) \quad (\text{II. 48})$$

$$[R_{Dw}] = \rho(r) S_D e \Omega^2 ([N_w]^T [N_w]) \quad (\text{II. 49})$$

- La matrice globale de rigidification centrifuge est donnée par la matrice suivante :

$$[R_D] = \begin{bmatrix} [R_{Du}] & 0 \\ 0 & [R_{Dw}] \end{bmatrix} \quad (\text{II. 50})$$

- La matrice de rigidification centrifuge globale est donnée par les fonctions de formes:

$$[R_D] = \begin{bmatrix} \rho(r)S_D e\Omega^2([N_u]^T[N_u]) & 0 \\ 0 & \rho(r)S_D e\Omega^2([N_w]^T[N_w]) \end{bmatrix} \quad (\text{II. 51})$$

## 11.2 Matrice gyroscopique :

Le troisième terme de la relation de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique :

$$E_C(C_{gD}) = \int_v \rho(r) \{B\}^T [\phi] \{B\} dv \quad (\text{II. 52})$$

- la matrice des vitesses et le vecteur déplacement par leurs valeurs dans l'expression de l'énergie cinétique on obtient :

$$\begin{aligned} E_C(C_{gD}) &= \int_v \rho(r) \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \end{aligned} \quad (\text{II. 53})$$

$$\begin{aligned} E_C(C_{gD}) &= \int_v \rho(r) \{u \quad v \quad w\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \end{aligned} \quad (\text{II. 54})$$

$$E_C(C_{gD}) = \int_v \rho(r) \{-\Omega w \quad 0 \quad \Omega u\} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (\text{II. 55})$$

$$E_C(C_{gD}) = \int_v \rho(r) \{-\Omega w u + \Omega u w\} dv \quad (\text{II. 56})$$

$$E_C(C_{gD}) = \Omega \int_v \rho(r) \{-w u + u w\} dv \quad (\text{II. 57})$$

- L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes :

$$\begin{aligned} E_C(C_{gD}) &= \Omega \int_v \rho(r) (-[N_u] \{q_u\} [N_w]^T \{q_w\}^T \\ &\quad + [N_w] \{q_w\} [N_u]^T \{q_u\}^T) dv \end{aligned} \quad (\text{II. 58})$$

- o Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_u\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} &= \Omega \int_v \rho(r) \left( \frac{d}{dt} ([N_w] \{q_w\} [N_u]^T) + [N_u] [N_w]^T \{q_w\} \right) dv \end{aligned} \quad (\text{II. 59})$$

Transformation par les coordonnées adimensionnelle :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = 2\rho(r)S_D e\Omega ([N_u]^T [N_w] \{q_w\}) \quad (\text{II. 60})$$

- Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_w\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} \\ = \Omega \int \rho(r) \left( \frac{d}{dt} (-[N_u]\{q_u\}[N_w]^T) - [N_w]\{q_u\}[N_u]^T \right) dv \end{aligned} \quad (\text{II. 61})$$

Transformation par les coordonnées adimensionnelle

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} = -2\rho(r)S_D e\Omega \left( \frac{d}{dt} (-[N_u]^T [N_w]^T) \{q_u\} \right) \quad (\text{II. 62})$$

Donc :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} = - \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}^T} \right) \quad (\text{II. 63})$$

on pose aussi :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}} &= 2\rho(r)S_D e\Omega \left( \frac{d}{dt} ([N_u]^T [N_w] \{q_w\}) \right) \\ &= C_{gD1} \end{aligned} \quad (\text{II. 64})$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}} &= -2\rho(r)S_D e\Omega \left( \frac{d}{dt} (-[N_u]^T [N_w]) \{q_u\} \right) \\ &= C_{gD2} \end{aligned} \quad (\text{II. 65})$$

Donc on remarque :

$$C_{gD1} = -C_{gD2} \quad (\text{II. 66})$$

### 11.3 Matrice masse :

- Le deuxième terme de la relation de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse :

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2} \int_v \rho(r) \{B\}^T \{B\} dv \quad (\text{II. 67})$$

- La matrice globale de rigidification centrifuge est donnée par :

$$[M_D] = \begin{bmatrix} [M_{Du}] & 0 \\ 0 & [M_{Dw}] \end{bmatrix} \quad (\text{II. 68})$$

Avec  $[M_{Du}]$  la matrice de rigidification dans la direction  $Ox$  et  $Oz$  peuvent être exprimées par les fonctions de formes :

$$[M_D] = \begin{bmatrix} \rho(r)S_D e([N_u]^T [N_u]) & 0 \\ 0 & \rho(r)S_D e([N_w]^T [N_w]) \end{bmatrix} \quad (\text{II. 69})$$

## 12 Détermination les matrices de l'arbre :

On a Les matrices de masse, gyroscopique et rigidification centrifuge

Ces matrices sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre donnée par la relation :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \int_v \rho(r) \{B\}^T [\dot{\phi}]^T [\dot{\phi}] \{B\} dv + \frac{1}{2} \int_v \rho(r) \{B\}^T \{B\} dv \\ + \int_v \rho(r) \{B\}^T [\phi] \{B\} dv \quad (\text{II. 70})$$

### 12.1 Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre:

Le premier terme de la relation de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice de rigidification centrifuge :

$$E_C(R_A) = \frac{1}{2} \int_v \rho(r) \{B\}^T [\dot{\phi}]^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (\text{II. 71})$$

- la matrice des vitesses est :

$$E_C(R_A) = 2 \int_v \rho(r) \{\dot{B}\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\dot{B}\} dv \quad (\text{II. 72})$$

$$E_C(R_A) = 2 \int_v \rho(r) \{B\}^T \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} \{B\} dv \quad (\text{II. 73})$$

$$E_C(R_A) = \frac{\Omega^2}{2} \int_v \rho(r) \{B\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{B\} dv \quad (\text{II. 74})$$

- les vecteurs déplacements par les fonctions de forme :

$$E_C(R_A) = \frac{\Omega^2}{2} \int_v \rho(r) \{q\}^T [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \{q\} dv \quad (\text{II. 75})$$

- L'énergie cinétique exprimée par la coordonnée adimensionnelle :

$$E_C(R_A) = \frac{S_A L \Omega^2}{2} \int_0^1 \int_0^r \rho(r) \{q\}^T [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N] \{q\} d\xi dr \quad (\text{II. 76})$$

- a matrice de rigidification centrifuge de l'arbre exprimée par les fonctions de formes est :

$$E_C(R_A) = \frac{S_A L \Omega^2}{2} \int_0^r \rho(r) \left( \int_0^1 \{q_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{q_u\} d\xi + \int_0^1 \{q_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{q_w\} d\xi \right) dr \quad (\text{II. 77})$$

- Les composantes de la matrice de rigidification sont :

$$[R_{Au}] = \frac{S_A L \Omega^2}{2} \int_0^r \int_0^1 \rho(r) [N_u]^T [N_u] d\xi dr \quad (\text{II. 78})$$

$$[R_{Aw}] = \frac{S_A L \Omega^2}{2} \int_0^r \int_0^1 \rho(r) [N_w]^T [N_w] d\xi dr \quad (\text{II. 79})$$

- La matrice de rigidification centrifuge globale peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$[R_A] = \begin{bmatrix} [R_{Au}] & 0 \\ 0 & [R_{Aw}] \end{bmatrix} \quad (\text{II. 80})$$

## 12.2 Matrice masse de l'arbre :

Le deuxième terme de la relation de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse :

$$E_C(M_A) = \frac{1}{2} \int_v \rho(r) \{B\}^T \{B\} dv \quad (\text{II. 81})$$

- le vecteur déplacement par les fonctions de forme :

$$E_C(M_A) = \frac{S_A L}{2} \int_0^r \rho(r) \left( \int_0^1 \{q_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{q_u\} d\xi + \int_0^1 \{q_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{q_w\} d\xi \right) dr \quad (\text{II. 82})$$

- Les composantes de la matrice de rigidification sont :

$$[M_{Au}] = \frac{S_A L}{2} \int_0^r \int_0^1 \rho(r) [N_u]^T [N_u] d\xi dr \quad (\text{II. 83})$$

$$[M_{Aw}] = \frac{S_A L}{2} \int_0^1 \int_0^r \rho(r) [N_w]^T [N_w] d\xi dr \quad (\text{II. 84})$$

- La matrice masse peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[M_A] = \begin{bmatrix} [M_{Au}] & 0 \\ 0 & [M_{Aw}] \end{bmatrix} \quad (\text{II. 85})$$

### 12.3 Matrice gyroscopique de l'arbre :

Le troisième terme de la relation de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique de l'arbre :

$$E_C(C_{gA}) = \int_v \rho(r) \{B\}^T [\phi] \{B\} dv \quad (\text{II. 86})$$

$$E_C(C_{gA}) = \int_v \rho(r) \{B\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} dv \quad (\text{II. 87})$$

- L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_C(C_{gD}) = S_A L \Omega \int_0^1 \int_0^r \rho(r) (-[N_u] \{q_u\} [N_w]^T \{q_w\}^T + [N_w] \{q_w\} [N_u]^T \{q_u\}^T) d\xi dr \quad (\text{II. 88})$$

- Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_u\}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}^T} \\ & = 2S_A L \Omega \int_0^1 \int_0^r \rho(r) ([N_u]^T [N_w] \{q_w\}) d\xi dr \end{aligned} \quad (\text{II. 89})$$

$C_{gA1}$

$$= 2S_A L \Omega \int_0^1 \int_0^r \rho(r) ([N_u]^T [N_w] \{q_w\}) d\xi dr \quad (\text{II. 90})$$

- Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_w\}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}^T} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}^T} \\ & = -2S_A L \Omega \int_0^1 \int_0^r \rho(r) \left( \frac{d}{dt} (-[N_u]^T [N_w]^T \{q_u\}) \right) d\xi dr \end{aligned} \quad (\text{II. 91})$$

$$\begin{aligned}
& C_{gA2} \\
& = -2S_A L \Omega \int_0^1 \int_0^r \rho(r) \left( \frac{d}{dt} (-[N_u]^T [N_w]^T) \{q_u\} \right) d\xi dr \quad (\text{II. 92})
\end{aligned}$$

Donc :

$$C_{gA1} = -C_{gA2} \quad (\text{II. 93})$$

- La matrice gyroscopique de l'arbre peut s'écrire :

$$[C_{gA}] = \begin{bmatrix} 0 & -[C_{gA1}] \\ [C_{gA2}] & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II. 94})$$

## 12.4 Matrice de rigidité de l'arbre :

Est déterminée à partir de son énergie de déformation ,Par substitution du champ de déplacement en terme des fonctions de forme et de la coordonnée adimensionnelle, on a :

$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_v E(r) (\mathcal{E}_y^2) dv \quad (\text{II. 95})$$

$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_s E(r) \left( x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 ds dy \quad (\text{II.96})$$

$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_s E(r) \left( x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 - 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) ds dy \quad (\text{II.97})$$

$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{R_{int}}^{R_{ext}} r \cdot E(r) \left( x^2 \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 - 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dr \cdot d\theta dy$$

Par symétrie le troisième terme de l'intégrale est nul et, en introduisant les inerties de section :

$$E_{dA} = \frac{2\pi}{2} \int_0^L \int_{R_{int}}^{R_{ext}} E(r) \left( I_z \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dr dy \quad (\text{II.98})$$

$$I_x = \int_s z^2 \cdot ds \quad I_z = \int_s x^2 \cdot ds \quad (\text{II.99})$$

En prenant en considération de la relation

$$I_m = \frac{I_x + I_z}{2} \quad (\text{II .100})$$

$$I_a = \frac{I_x - I_z}{2} \quad (\text{II .101})$$

En tenant compte qu'on est en présence d'un arbre symétrique.

$$I_x = I_z \quad \text{donc} \quad I_a = 0 \quad (\text{II .102})$$

Pour un arbre symétrique où  $(I_x = I_z)$  L'expression de l'énergie potentielle devient :

Finalement :

$$E_{dA} = \pi \int_0^L \int_{R_{int}}^{R_{ext}} E(r)r \left[ I_m \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dr dy \quad (\text{II.103})$$

### 13 Influence de la température :

dus à L'effet de la température sur les structures constituées par des matériaux FGM ou des matériaux conçus à partir des mélanges de deux matériaux aux propriétés différentes est essentiel pour l'analyse dynamique. La continuité des changements de propriétés dans des directions bien définies est primordiale pour avoir une bonne optimisation de la constitution du mélange des deux matériaux. Ces matériaux (FGM) sont exposés à des températures très intenses et très variables et nécessitent des durées de vie de fonctionnement longues et raisonnables, notamment dans le domaine des navettes spatiales ou de l'aviation, tels que les rotors de réacteurs d'avion ou les turbines de propulsion aéronautique ou dans le domaine militaire comme les Turbine à gaz ou les centrifugeuses nucléaires.

**Auparavant, la recherche scientifique s'appuyait sur la protection surfacique des matériaux** contre les hautes variations des températures pour éviter que ces solides ne soient endommagés de manière indésirable. Cette solution est valable pour des températures basses et moyennes. Pour les hautes températures nocives et dangereuses, nous avons pris l'exemple de La navette spatiale américaine Columbia qui était construite avec des matériaux de protection de surface utilisant des tuiles de céramiques collées à la surface de la navette spatiale, qui agissait comme une couche isolante contre les frottements et le rayonnement

solaire était très intense, faisant tomber ces dernières tuiles et déclenchant par la suite en 1989 L'explosion et la désintégration de la navette spatiale et de ses occupants, entraînant la mort de neuf astronautes, Cette séparation est due à une modification brutale des propriétés physiques et mécaniques à l'interface des deux matériaux, et depuis lors les dangers de cette solution ont été démontrés et éliminés par l'utilisation de matériaux FGM ou de matériaux à gradient de propriétés. évitant ainsi des changements brusques de propriétés des problèmes d'interface

La fonction de température agissant sur les paramètres caractéristiques constituant la composition du mélange FGM est définie selon le modèle mathématique suivant :

$$P_j = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T^1 + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (\text{II. 104})$$

Où  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2$  et  $P_3$  est le coefficient de température T (en K) de chaque matériau qui compose la fraction volumique de mélange FGM (matériaux à gradient fonctionnel)

La répartition de la température le long de la direction radiale du rotor peut être représentée en résolvant l'équation de transfert de chaleur suivante :

$$-\frac{d}{dy}\left(Kt\frac{dT}{dy}\right) = 0 \quad (\text{II.105})$$

La solution de cette équation différentielle en fonction de la température est obtenue en plaçant la température  $T_m$  sur la surface du métal pure du rotor FGM avec des conditions aux limites, données par la relation suivante : (Functionallygradedmatérials)

$$T(y) = T_m + (T_c - T_m)\mu(y) \quad (\text{II.106})$$

Avec

$$\mu(y) = \frac{1}{c} \left[ \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^k - \frac{K_{cm}}{(K+1)k_c} \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^{k+1} + \frac{K^2_{cm}}{(2K+1)k^2_c} \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^{2k+1} - \frac{K^3_{cm}}{(3K+1)k^3_c} \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^{3k+1} + \frac{K^4_{cm}}{(4K+1)k^4_c} \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^{4k+1} - \frac{K^5_{cm}}{(5K+1)k^5_c} \left(\frac{r-r_m}{r_c-r_m}\right)^{5k+1} \right] \quad (\text{II.107})$$

$K_{cm}$  et  $c$  des constante.

Les coefficients de température T pour l'oxyde d'aluminium

Propriété d'un matériau	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Coefficient de Dilatation Thermique	$6,8269 \cdot 10^{-6}$	0	$1,8388 \cdot 10^6$	0	0
Module de Young E	$349,55 \cdot 10^9$	0	$-3,853 \cdot 10^{-6}$	$4,027 \cdot 10^{-7}$	$-1,673 \cdot 10^{-10}$
Rapport DE Poisson n	0,26	0	0	0	0
La densité de masse	2700	0	0	0	0

**Tableau II.01 : Les coefficients de température T pour l'oxyde d'aluminium**

**14 Conclusion :**

Pour calculer des structures complexes, des outils de plus en plus puissants doivent être construits pour quantifier le comportement mécanique et rendre compte de la spécification de ces structures physiques.

D'un point de vue éléments finis (la méthode numérique) est absolue pour la conception et le calcul de telles structures complexes.

Ainsi, les aspects liés au domaine de la mécanique de la continuité et des méthodes des éléments finis sont abordés à la fois par les méthodes de déplacement et de déformation.

## ***Chapitre III***

### ***Résultats et Interprétation***

## 1 Protection externe en céramique :

et ) avec P : propriétés

La protection externe en céramique est faite par un mélange à propriétés graduelles FGM de

la couche de métal (SUS304) située à l'intérieur de l'arbre creux vers l'extérieur. Le mélange

étudié est un mélange constitué de AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (oxyde d'aluminium) et SUS303 (acier inoxydable), et la protection est assurée par AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sur la couche externe

La protection en céramique est externe et Les propriétés en fonction de l'épaisseur sont définies par la loi de puissance :

L'indice de volume fraction  $k=VF$  sur les graphes.

$$P(y) = [P_{ex} - P_i] \left( \frac{r-r_i}{r_{ex}-r_i} \right)^k + P_i \quad (\text{III.1})$$

$$\rho(y) = [P_{ex} - P_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + P_m \quad (\text{III.2})$$

$$E(y, T) = [E_c(T) - E_m(T)] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + E_m(T) \quad (\text{III.3})$$

1)-Si  $k=0$  cela veut dire de la formule reste ) c'est-à-dire propriétés outer=externe=propriétés céramique. On peut dire que si  $k=0$  on est sur la couche externe en céramique pure (100% céramique).

2)-Si  $k$  les propriétés du rotor sont les propriétés de la couche interne majoritairement constituée de métal SUS304 acier inoxydable

3)-si alors les propriétés du rotor sont les propriétés à graduation métal-céramique des couches FGM se trouvant entre la couche externe 100% céramique et la couche interne 100% métal

**Tableau III.01 : Propriétés des constituants du mélange**

Propriété	matériaux	$P_{-1}$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
E(Pa). young	SUS304	0	201.035 4e9	3.079296e-7	-653371e-7	0
	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	0	349.548	-3853206e-4	4.026993e-7	-16734e-10

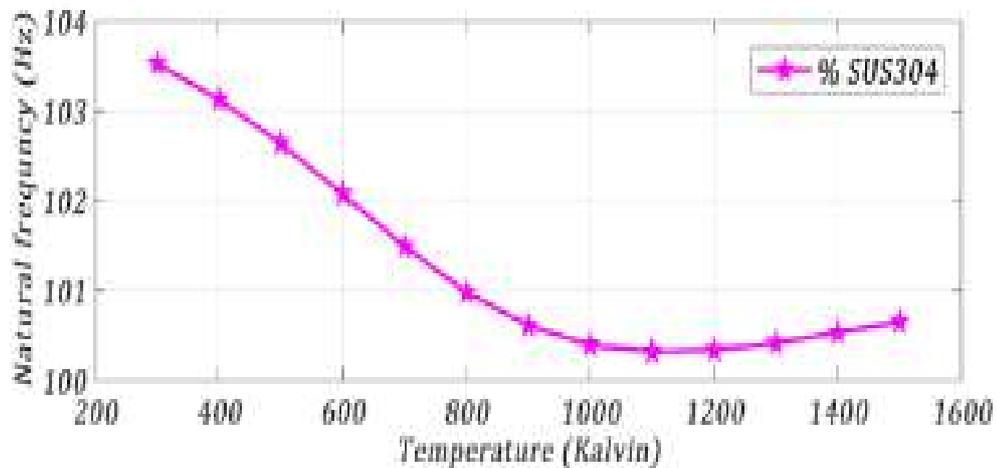
			6e9			
K(W /mK) conduction	SUS304	0	15.3789 5	-0.001264	0.20923e-5	-0.0722 e-10
	$Al_2O_3$	-1123.6	-14.087	0.00044	0	0
a(1/K) dilation	SUS304	0	12.33e-6	0.0008	0	0
	$Al_2O_3$	0	6.827e-5	0.00018	0	0
V :Coe poison	SUS304	0	0.32623 351	-2.001822e-4	3.797358-7	0
	$Al_2O_3$	0	0	0	0	0

On constate sur ce tableau que la conduction de la céramique  $Al_2O_3$  est supérieur a celle de SUS304

1)-Influence de la temperature sur les 1ere fréquences vibratoires du rotor :

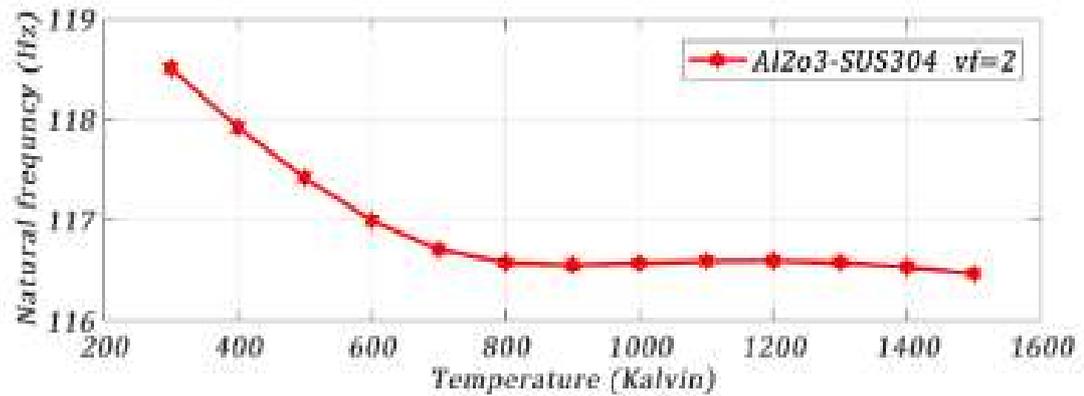
Pour cette etude la temperature externe varie de  $200^\circ$  .....a..... $1600^\circ$

## 2 Evolution des fréquences vibratoires du mode 1 du Rotor avec la température



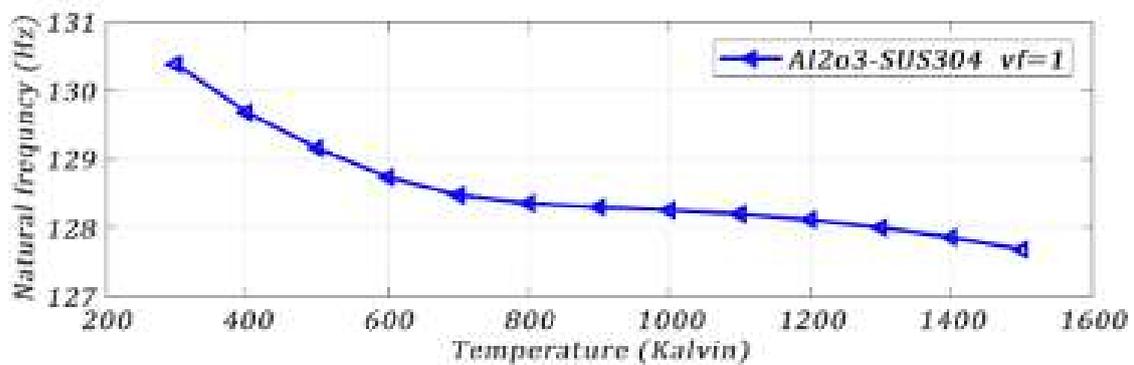
**Figure III1 : fréquences vibratoires d'un rotor fait 100% métal-**

Les fréquences vibratoires du rotor varient approximativement de 104Hz vers 100,5Hz.



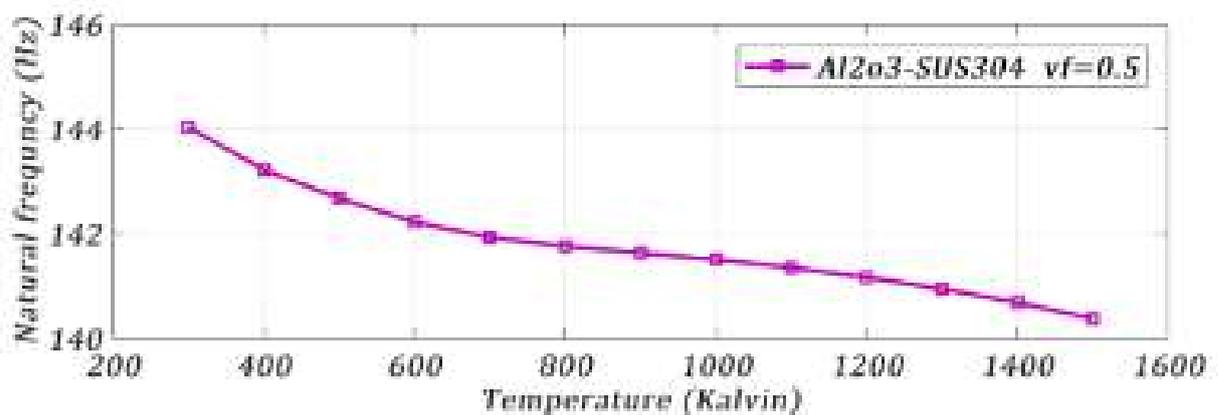
**Figure III.2 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec k=2**

Les fréquences vibratoires du rotor varient approximativement de 118,5Hz vers 116.5 Hz.



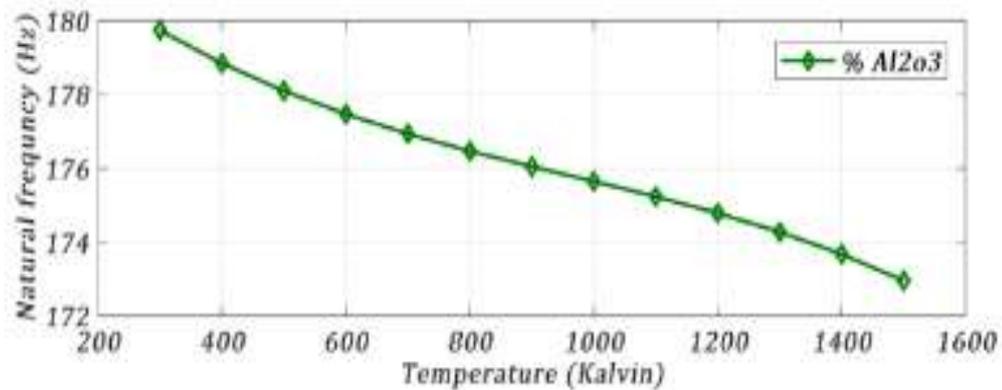
**Figure III.3 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec k=1**

Les fréquences vibratoires du rotor varient approximativement de 130,5Hz vers 128 Hz.



**Figure III.4 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec k=0.5**

Les fréquences vibratoires du rotor varie approximativement de 144Hz vers 140 Hz.



**FigureIII5 : fréquences vibratoires d'un rotor 100% en céramique AL2O3**

Les fréquences vibratoires du rotor varient approximativement de 180Hz vers 173 Hz.

### Conclusion 1.

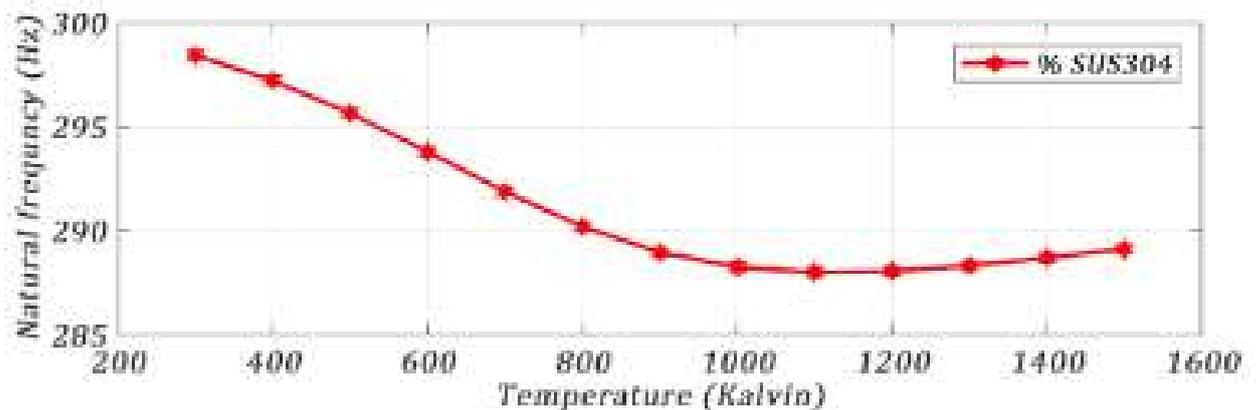
**Tableau III.2 : frequences vibratoires du Mode 1**

Melange	Frequences Hz T° =300°K	Frequences Hz T° =1600°K	Variationdes freq
100% SUS304	104	100.5	4.5
K=2	118.5	116.5	2
K=1	130	128	2
K=0.5	144	140	4
100% AL2O3	180	173	7

On constate que les requences vibratoires du rotor sont tres grandes pour le melange constitué purement avec de la ceramique AL2O3 est sont comprisent approximativement entre 180 Hz quand la temprature ambiante est de 300°K et de 123 Hz quanla temperature atteint les 1600°K. Parcontre les frequences sont tres basses pour un melange constitué 100% en acier inoxydable. Pour le melange graduel, on constate que plus l'indice de volume raction augment

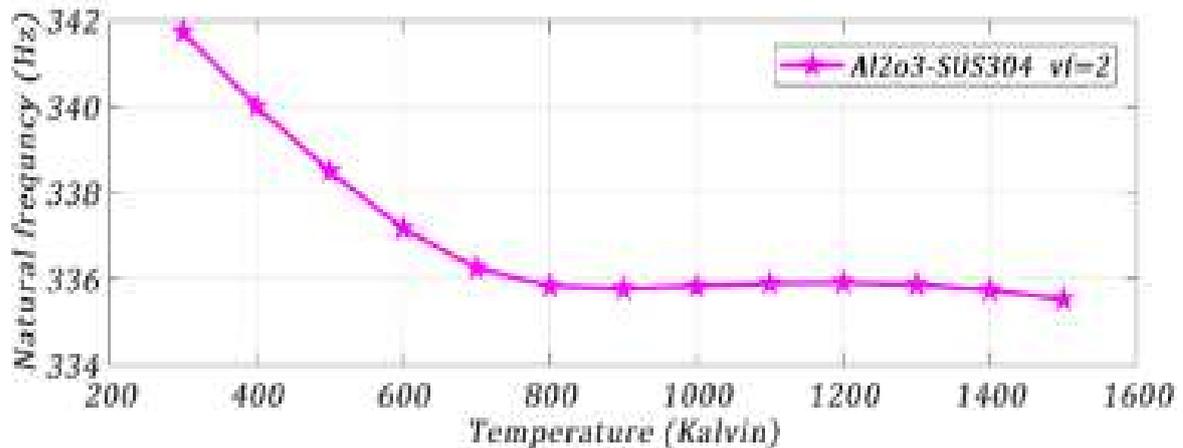
et plus on s'approche de la couche du metal et les requences diminuent et plus l'indice de volume fraction diminue et plus on s'approche de la couche de ceramique et les frequences sont gardes et le rotor se comporte tres bien avec une grande rigidité.

### 3 .Evolution des fréquences vibratoires du mode 2 du Rotor avec la température



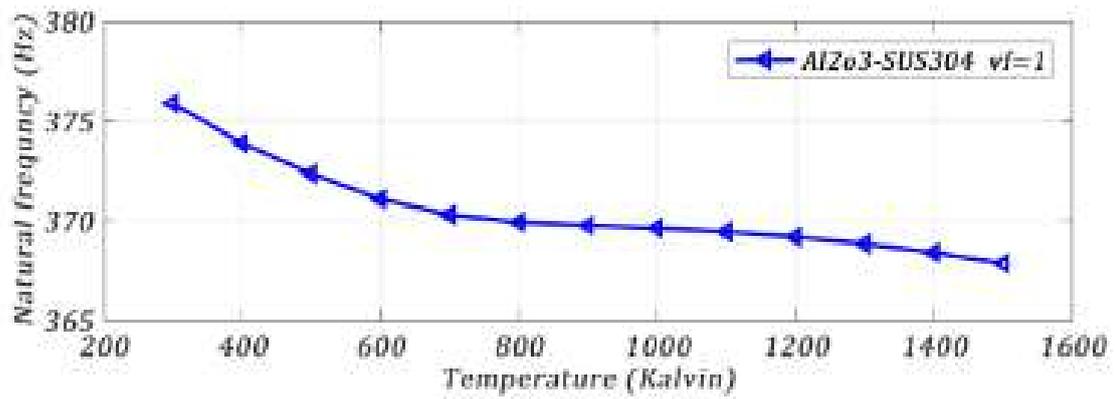
**Figure III 6 : fréquences vibratoires d'un rotor 100% métal-**

Les fréquences vibratoires du rotor varient approximativement de 298Hz vers 285,5Hz



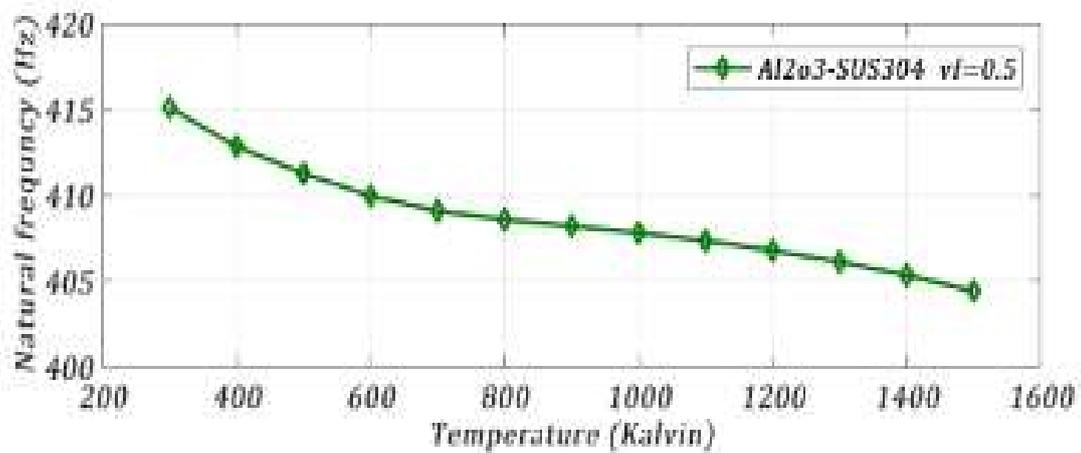
**Figure III 6 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec k=2**

Les fréquences vibratoires du rotor varient approximativement de 341,8Hz vers 335,5Hz



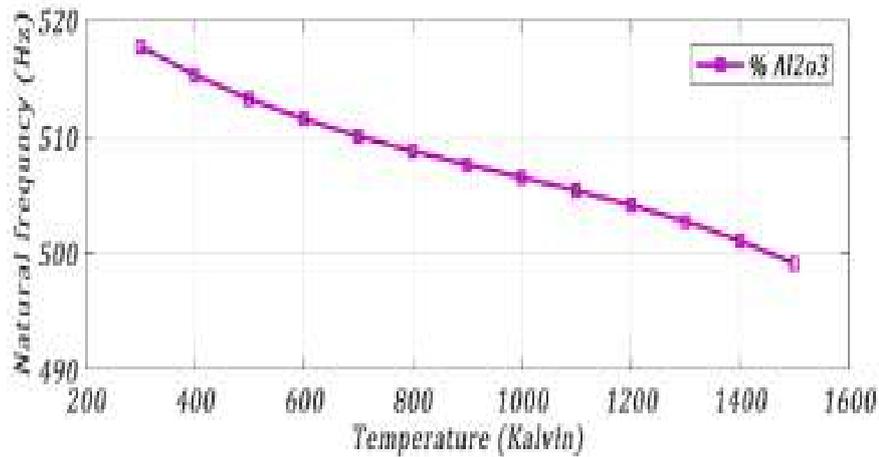
**FigureIII7 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec  $k=1$**

Les fréquences vibratoires du rotor varient approximativement de 376Hz vers 367 Hz



**FigureIII8 : fréquences vibratoires d'un rotor FGM avec  $k=0.5$**

Les fréquences vibratoires du rotor varient approximativement de 415Hz vers 404 Hz



**Figure III9 :fréquences vibratoires d'un rotor 100% AL2O3**

Les fréquences vibratoires du rotor varient approximativement de 518Hz vers 499 Hz

## Conclusion 2.

**Tableau III.03 : Frequences vibratoires du Mode 2.**

Melange	Frequences Hz $T^{\circ} = 300^{\circ}\text{K}$	Frequences Hz $T^{\circ} = 1600^{\circ}\text{K}$	Variation des freq
100% SUS304	298	285	13
K=2	342	336	6
K=1	376	367	9
K=0.5	415	404	11
100% AL2O3	518	404	114

On constate que les requences vibratoires du rotor sont tres grandes par rapport aux frequences du mode 1 pour le melange fait 100% en metales frequences varient de 298 a 285 Hz. Et pour le melange fait 100% en AL2O3 les requences

varient de 518 Hz à 404 Hz et les requenvibratoires des couches FGM sont compris entre ces deux dernières fréquences.

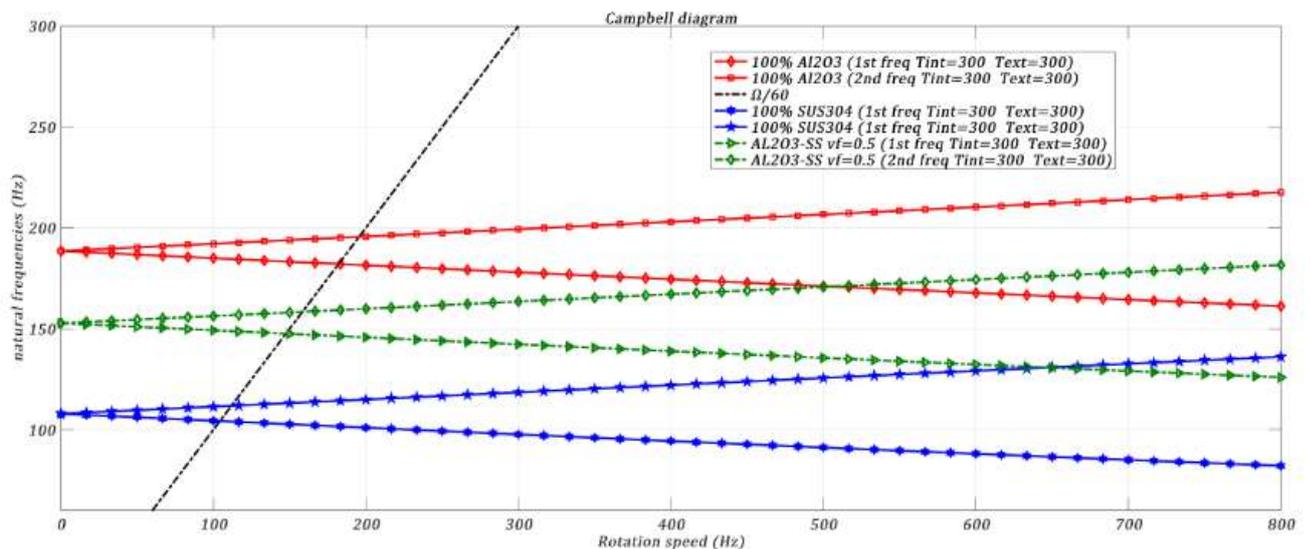
## 4 Diagramme de Campbell

Les Diagrammes de Campbell se sont des diagrammes constitués par deux branches, l'une directe et l'autre indirecte ou rétrogradée (inverse). Ces branches définissent le comportement dynamique d'un Rotor, et peuvent-nous renseigner de l'évolution de la précession directe, de la précession indirecte ainsi que de l'état de fonctionnement du rotor en l'état stationnaire ou en plein régime.

### 4.1 Dynamique du Rotor avec mélange graduel AL2O3-SS.

Le système tournant étudié est constitué par un mélange graduel du matériau AL2O3 et SUS304 acier inoxydable.

La protection externe en céramique est assurée par la couche externe faite 100% en AL2O3, une céramique dont la conductivité est inférieure à celle du métal SUS 304 (voir tableau des propriétés).



**Figure III 11 :** Mode 1 fréquences vibratoires du mélange graduel AL2O3-SUS304  
 $vf=0.5T(int)=300^{\circ}K=T(ext)$

Sur ce graphe est représenté le mode 1 vibratoire pour une température ambiante  $T=300^{\circ}K$  à l'extérieur comme à l'intérieur et pour divers type de volumes fractions.

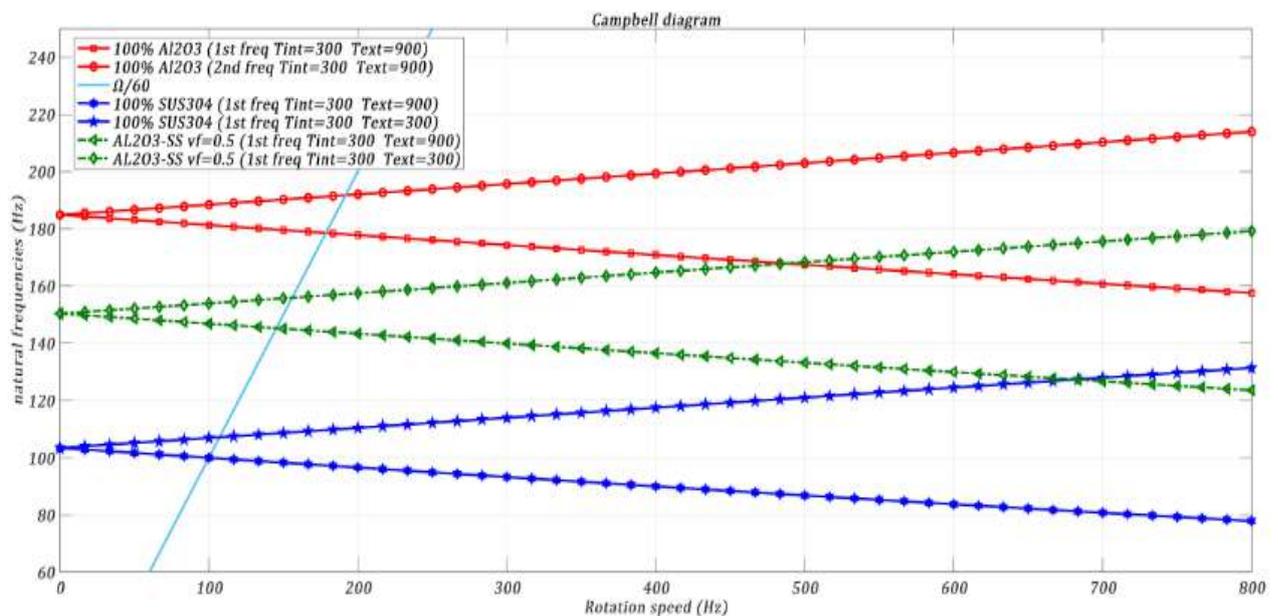
1 - mélange graduel 100% céramique AL2O3, les fréquences sont approximativement égales

a 200 Hz.

2 - mélange graduel 100% métal SUS304, les fréquences sont approximativement égales a 150 Hz.

3 - mélange graduel FGM  $\nu_f=0.5$ , les fréquences sont approximativement égales a 100 Hz.

-On peu dire pour ce mode vibratoire que le rotor en céramique pur possède une rigidité meilleure que les autres mélange.



**Figure III 12 Mode 1 fréquences vibratoires du mélange graduel AL2O3-SUS304  $\nu_f=0.5$   
T(int)300°K et T(ext)=900°K**

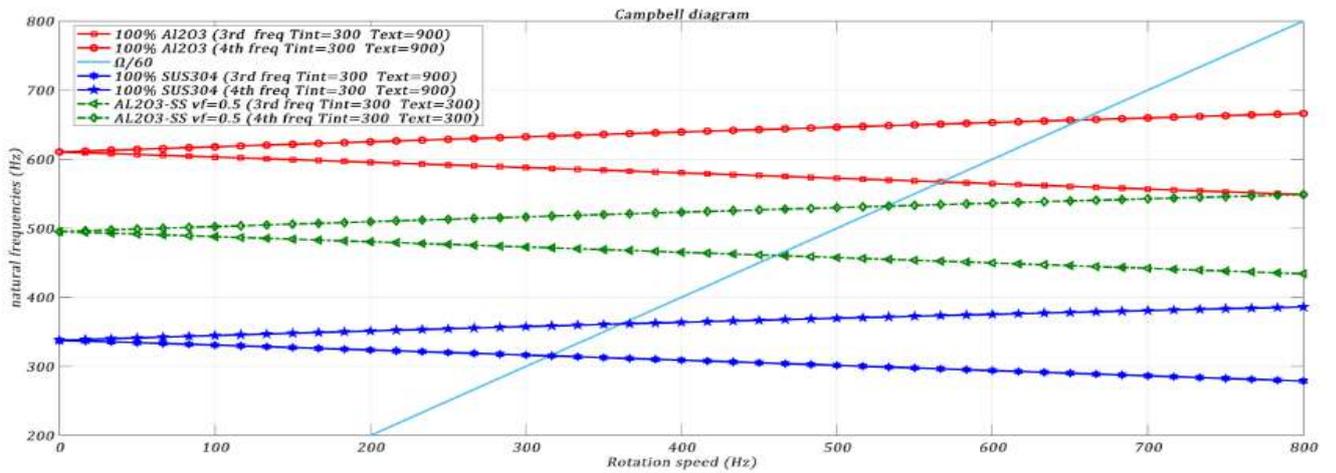
Sur ce graphe est représenté le mode 1 vibratoire pour une température ambiante  $T=300^\circ\text{K}$  a l'extérieur comme à l'intérieur et pour divers type de volumes fractions.

1 - mélange graduel 100% céramique AL2O3, les fréquences sont approximativement égales a 200 Hz.

2 - mélange graduel 100% métal SUS304, les fréquences sont approximativement égales a 140 Hz

3 - mélange graduel FGM  $\nu_f=0.5$ , les fréquences sont approximativement égales a 100 Hz.

-On peu dire pour ce mode vibratoire que le rotor en céramique pur possède une rigidité meilleur que les autres mélange.



**Figure III 13 Mode 1 fréquences vibratoires du mélange graduel AL2O3-SUS304  
vf=0.5T(int)300°K et T(ext)=900°K**

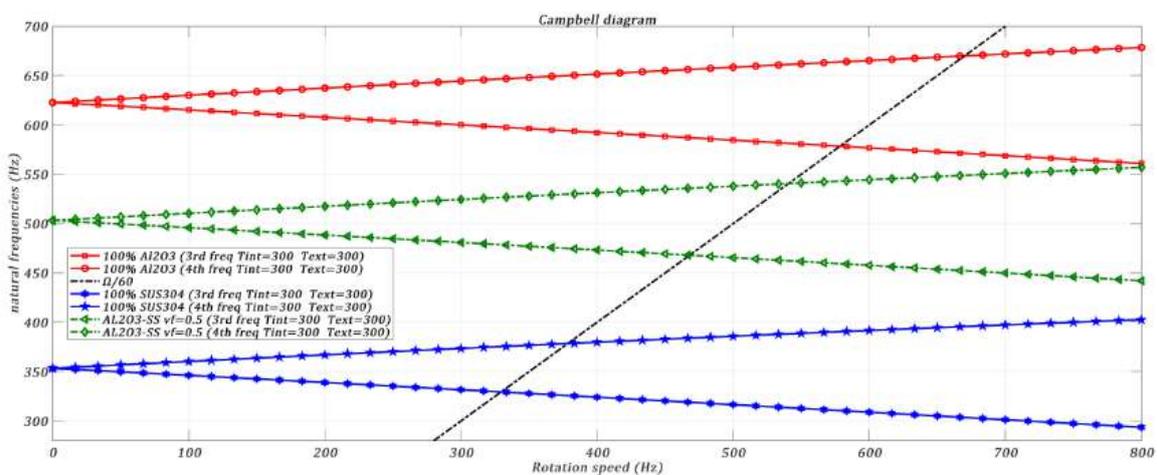
Sur ce graphe est représenté le mode 1 vibratoire pour une température ambiante  $T=300^{\circ}\text{K}$  à l'extérieur comme à l'intérieur et pour divers type de volumes fractions.

1 - mélange graduel 100% céramique AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, les fréquences sont approximativement égales a 700 Hz.

2 - mélange graduel 100% métal SUS304, les fréquences sont approximativement égales a 400 Hz

3 - mélange graduel FGM vf=0.5, les fréquences sont approximativement égales a 200 hz.

-On peu dire pour ce mode vibratoire que le rotor en céramique pur possède une rigidité meilleure que les autres mélange.



**Figure III 14 Mode 2 fréquences vibratoires du mélange graduel AL2O3-SUS304vf=0.5T(int)=300°K=T(ext)**

Sur ce graphe est représenté le mode 1 vibratoire pour une température ambiante  $T=300^{\circ}\text{K}$  à l'extérieur comme à l'intérieur et pour divers type de volumes fractions.

1 - mélange graduel 100% céramique  $\text{AL}_2\text{O}_3$ , les fréquences sont approximativement égales à 650 Hz.

2 - mélange graduel 100% métal SUS304, les fréquences sont approximativement égales à 370 Hz

3 - mélange graduel FGM  $v_f=0.5$ , les fréquences sont approximativement égales à 300 hz.

-On peut dire pour ce mode vibratoire que le rotor en céramique pure possède une rigidité meilleure que les autres mélanges.

# Conclusion Générale

### **Conclusion Générale :**

L'objectif du travail effectué dans ce mémoire est l'étude du comportement vibratoire des systèmes tournants arbre creux en matériaux FGM constitué par les mélanges graduels métaux et céramiques SUS304 et Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, la céramique est utilisée comme une barrière thermique sur la couche extérieure de l'épaisseur radiale du rotor. Ce rotor travaille dans un environnement de température très variable.

L'arbre de ce système tournant est du type d'Euler Bernoulli. Une étude théorique et cinématique du modèle est faite pour l'établissement des énergies cinétiques et des énergies de déformation du système tournant. Pour la modélisation mathématique de cette structure tournante une Analyse numérique basée sur la méthode des éléments finis version P est appliquée pour tous les divers types d'énergies du rotor nécessaires à la détermination de l'équation différentielle définissant le mouvement de ce rotor en passant par les équations de Lagrange. Les résultats obtenus dans ce mémoire montrent clairement les variations des fréquences vibratoires qui sont présentées par une étude du mélange graduel AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SUS304 et son comportement aux hautes variations de la température et qui sont données par deux modes de vibrations, et une deuxième étude concernant le comportement dynamique du rotor est donnée par divers types de diagramme de Campbell définissant le comportement vibratoire du rotor pour divers types d'indices de volumes fraction ou divers types de mélanges graduels métal-céramique. Les fréquences vibratoires obtenues pour les deux études précédemment cités ont été discutées et interprétées, ces dernières fréquences peuvent nous renseigner de l'état de l'arbre tournant, des vitesses critiques et de l'influence du phénomène de la rigidification centrifuge qui joue un rôle primordial et participe sur la rigidification de l'arbre du rotor. Les résultats obtenus pour cette étude peuvent ouvrir des perspectives complémentaires pour l'étude d'un rotor constitué par d'autres mélanges graduels métal-céramique.

## References bibliographies

[1]: **D Gayen, D Chakraborty, R Tiwari** (2017) Whirl frequencies and critical speeds of a rotor- bearing system with a cracked functionally graded shaft - Finite element analysis European Journal of Mechanics-A/Solids Vol 61, 47-58

[2] :**Debabrata Gayen Rajiv Tiwari D. Chakraborty** (2019) Finite element based stability analysis of a rotor-bearing system having a functionally graded shaft with transverse breathing cracks International Journal of Mechanical Sciencesvol, 403-414.

[3]: **Bouzidi, L. A. Hadjoui, and A. Fellah.** 2020. Dynamic analysis of functionally graded rotor-blade system using the classical version of the finite element method. MechanicsBased Design of Structures and Machines Doi: 10.1080/15397734.2019.1706558.

[4]: **Assem.H, Hadjoui. A,&Saimi. A** 2020 Numerical analysis on the dynamics behavior of FGM rotor in thermal environment using b-p finite element method Mechanics Based Design of Structures and Machines, DOI:10.1080/15397734.2020 1824791

[5]: **Columbia Accident Investigation Board** (2003), Report Volume 1, National Aeronautics and Space Administration and the Government Printing Office, Washington D.C.

[6] **M. Koizumi**, Recent Progress of Functionally graded materials in Japan. Ceram. Eng. Sci. Proc; 13 (7-8): 333-347, 1992.

[7]- **V.M. Ferreira, F. Azough, R. Freer, J.L. Baptista**, The effect of Cr and La on MgTiO<sub>3</sub> and MgTiO<sub>3</sub>-CaTiO<sub>3</sub> microwave dielectric ceramics », J. Mater Res 12 (1997) 3293-3299.

[8]: **A, C. IMANE.** (2019): Analyse par la méthode des éléments finis du comportement vibratoire d'une barre en matériaux FGM AL203- SUS304: Département science de la matière, université d'Ain temouchent

[9]:**E.R. Kipkoeh, F. Azough, R. Freer, C. Leach, S.P. Thompson, C. C. Tang**, Structural study of Ca<sub>0.7</sub>Nd<sub>0.3</sub>Ti<sub>0.7</sub>A<sub>10,303</sub> dielectric ceramics using synchrotron Xray diffraction » J. Eur. Ceram Soc 23 (2003) 2677-2682.

[10]:**B. KIEBACK, A. NEUBRAND, H. Riedel** -Processing techniques for functionally graded materials». Materials Science and Engineering A362 (2003) 81-105

### Site web

- (1): <https://solutions-in-plastics.info/fr/info-produits/ceramiques-techniques/domaine-dutilisation-des-ceramiques/tab-4143>
- (2): <https://ceramique-technique.com/secteurs/medical-implotologie>
- (3): [https://123dok.net/article/domaines-d-application-des-matériaux-fgm.yr2335\\_vz](https://123dok.net/article/domaines-d-application-des-matériaux-fgm.yr2335_vz)
- (4): <https://fr.wikipedia.org/wiki/Rotor>
- (5): [https://fr.wikipedia.org/wiki/Turbine\\_à\\_vapeur](https://fr.wikipedia.org/wiki/Turbine_à_vapeur)
- (6): [https://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre\\_\(mécanique\)#:~:text=Un arbre est un organe l'origine de son nom.](https://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_(mécanique)#:~:text=Un arbre est un organe l'origine de son nom.)
- (7): <https://www.vroomly.com/blog/arbre-de-transmission-role-fonctionnement-et-prix/>
- (8): [https://fr.wikipedia.org/wiki/Palier\\_\(mécanique\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Palier_(mécanique))
- (9): [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Principe\\_palier\\_hydrodynamique.svg?uselang=](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Principe_palier_hydrodynamique.svg?uselang=)
- (10): <https://us.misumi-ec.com/blog/computer-aided-design-pt-4-the-world-of-fea/>
- (11): <https://alohablog.wordpress.com/2013/02/13/finite-element-analysis/>
- (12): [https://help.solidworks.com/2018/french/SolidWorks/cworks/c\\_Solid Mesh.htm](https://help.solidworks.com/2018/french/SolidWorks/cworks/c_Solid Mesh.htm)