République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Ain-Témouchent

Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations différentielles et modélisation

Présenté par :
Melle. GRAOUI Zoulikha

Système d'équations différentielles aléatoires d'ordre fractionnaires

Encadrant :
M. BENAISSA Abdelkader

Soutenu en juin 2019

Devant le jury composé de :

Président :	Mme. BENAFLA Djamila (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Examinatrices :	Mme. BOUKHALFA Fatima (M.A.B)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	M. BENAISSA Abdelkader (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.

Dédicace

Ce travail est dédié à :

Ma trés chère mère et mon chère père.

Mes frères et ma soeur.

Ma famille et mes amies.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon encadreur, monsieur BENAISSA ABDELKADER d'avoir accepter de diriger mon mémoire. Il m'a guidé durant celui-ci et m'a apporté le soutien nécessaire. De part ses qualités pédagogiques, ses précieux conseils, ses stimulants encouragements et sa disponibilité.

Je remercie madame BENNAFLA DJAMILA de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à madame BOUKHALFA FATIMA d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je ne pourrais terminer sans remercier mes parents et ma famille qui m'ont soutenue et encouragée pour terminer ce travail.

Table des matières

Introduction

La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ses origines remontent à la fin du 17^{me} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développés les fondements du alcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ pour désignr la n^{ime} dérivée d'une fonction f.

Le calcul fractionnaire a joué un rôle trés important dans divers domaines tels que la mécanique, l'électricité, la biologie, l'économie et le traitement du signal et des images. Récemment, les équations différentielles fractionnaires et intégrales apparaissent naturellement dans des domaines tels que la viscoélasticité, circuits électriques, l'oscillation non linéaire des tremblements de terre, etc. Comme exemples motivants, nous suggérons [15, 18, 19, 33, 35].Au cours des dernières décennies, les calculs fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo ont fait l'objet d'une attention accrue, voir les monographies [1, 25, 26, 34, 36, 39, 51].

Un autre type de dérivée fractionnaire qui apparaît avec les dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo c'etait la dérivée fractionnaire d' Hadamard introduit en 1892 [20]. La définition de la dérivée d'Hadamard contient la fonction logarithmique d'exposant arbitraire. Les détails et les propriétés de dérivée fractionnaire et de l'intégrale d'Hadamard sont disponibles dans [7, 8, 9, 24, 25, 26].

Les équations intégrales et les équations intégrales aléatoires ont été étudiés systématiquement dans Bharucha-Reid [5] et Ladde et Lakshmikantham [27], respectivement. Ce sont de bons modèles dans diverses branches de la science et de l'ingénierie, car des facteurs aléatoires et des incertitudes ont été pris en compte. Par conséquent, l'étude des équations différentielles fractionnaires avec des paramètres aléatoires semble être naturelle, voir les monographies [47, 48] et les références qui y figurent. De manière trés récente, les équations différentielles fractionnaires à paramètres aléatoires ont été étudiées par Lupulescu et Ntouyas [30], ainsi que par Lupulescu et al [31].

L'analyse fonctionnelle de probabilité est une discipline mathématique importante a cause de ses applications aux modèles probabilistes dans les problèmes appliqués.

Notre principal but dans ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de solution des problèmes pour des équations différentielles aléatoire d'ordre fractionnaire.

Le mémoire est réparti en cinq chapitres et est organisé de la manière suivante :

Le **premier chapitre** contient quelques notions et définitions des fonctions spécifiques utiles tout au long de ce mémoire ainsi que les définitions de quelques opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, de Caputo et de Caputo-Hadamard et leurs propriétés.

Le **deuxième chapitre** contient des généralités sur les multi-fonctions ainsi que le théorème de sélection mesurable.

Le **troisième chapitre** contient des défénitions élémentaires et notions de base relatives au théorème de poin fixe aléatoire tel que, dans les section 1,2,3 et 4 nous présontons respectivement les notions d'espace métrique généralisé, de matrice convergente, d'espace de Banach généralisé et de variable alétoire. Dans la 5 ème section nous rappelons les différents théorèmes de point fixe aléatoire qui seront utiles dans la suite.

Le **quatrième chapitre** nous prouvons l'existence et l'unicité ainsi que la compacité de l'ensemble des solutions d'un système d'équations différentielles fractionnaires aléatoire :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t,\omega) &=& f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\alpha<1, t\in[0,b], \\ {}^cD^{\beta}y(t,\omega) &=& g(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\beta<1, t\in[0,b], \\ x(0,\omega) &=& x_0(\omega), \omega\in\Omega \\ y(0,\omega) &=& y_0(\omega), \omega\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $f, g : [0, b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et $x_0, y_0 : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sont des variables aléatoires. ${}^cD^{\alpha}x$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de $x(t, \omega)$ par rapport à la variable $t, b > 0$.

Dans le **cinquième chapitre** nous donnons un résultat d'existence des solutions et la compacité de l'ensembles des solutions d'un système d'équations différentielles fractionnaires de type Hadamard, où la preuve est basée sur des théorèmes de points fixes aléatoires a valeurs vectorielles, nous considérons alors le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{CH}D^{\alpha}x(t,\omega) &=& f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\alpha<1, t\in[0,b], \\ {}^{CH}D^{\beta}y(t,\omega) &=& g(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\beta<1, t\in[0,b], \\ x(0,\omega) &=& x_0(\omega), \omega\in\Omega \\ y(0,\omega) &=& y_0(\omega), \omega\in\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où $f, g : [0, b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$, $(\Omega, \mathcal{F})$ est un espace mesurable et $x_0, y_0 : \Omega \to \mathbb{R}^m$ sont des variables aléatoires. ${}^{CH}D^{\alpha}x$ est la derivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

1.1 Notation et Définitions

Soit $\Omega = [a,b], (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$. Nous désignons par $L^p[a,b]$ l'ensemble des fonctions mesurables f sur Ω avec $\|f\| < \infty$, où

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, 1 < p < +\infty,$$

et

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Soit $\Omega = [a,b], (-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$. Nous désignons par $AC[a,b]$ l'ensemble des fonctions absolument continues sur Ω, où

$$f(t) \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t f'(\tau)d\tau, f(\tau) \in L(a,b).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $AC^n[a,b]$ l'espace des fonctions $f(t)$ ayan des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n-1$ sur $[a,b]$ tel que $f^{n-1} \in AC[a,b]$:

$$AC^n[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f(t)^{n-1} \in AC[a,b]\},$$

et on a

$$f(t) \in AC^n[a,b] \Leftrightarrow f(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t f^{(n)}(\tau)d\tau.$$

Nous utilisons également une modification pondérée de l'espace $AC^n[a,b]$, dans laquelle la dérivée usuelle $D = \dfrac{d}{dt}$ est remplacée par la dérivée dite δ-dérivée définie par $\delta = tD = t\dfrac{d}{dt}$. Nous désignons par $AC^n_\delta[a,b]$ l'espace des fonctions mesurables sur (a,b) définie par

$$AC^n_\delta[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; \delta^{n-1}g(t) \in AC[a,b]\}.$$

1.2 Fonctions spéciales

Les fonctions spéciales sont définies de manière assez imprécise, puisqu'elles regroupent les fonctions que l'usage (ou la fréquence d'utilisation) a fini par associer à un nom. Parmi ces fonctions, la fonction Gamma et Bêta qui jouent un rôle trés important dans le calcul fractionnaire.

1.2.1 Fonction Gamma

Définition 1.2.1. *La fonction Gamma est généralement définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ *avec* $Re(z) > 0$.

Justification de l'existence de la fonction Gamma

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $\exists!(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$ et

$$\Gamma(x + iy) = \int_0^{+\infty} t^{x-1+iy}e^{-t}dt.$$

Or $t^{x-1+iy} = t^{x-1}t^{iy} = t^{x-1}e^{iy\ln(t)} = t^{x-1}[\cos(y\ln(t)) + i\sin(y\ln(t))]$. Alors

$$\Gamma(x + iy) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}[\cos(y\ln(t)) + i\sin(y\ln(t))]dt.$$

Pour $x > 0$ on pose

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\cos(y\ln(t))dt, \text{ et } I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\sin(y\ln(t))dt.$$

On a

$$|e^{-t}t^{x-1}\cos(y\ln(t))| \leq \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}, \text{ et } |e^{-t}t^{x-1}\sin(y\ln(t))| \leq \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}.$$

• Si $x = 1$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$$

Donc les deux intégrales I_1 et I_2 convergent.
• Si $x > 1$ on considère

$$J_1 = \int_0^{c} e^{-t}t^{x-1}\cos(y\ln(t))dt, \text{ et } J_2 = \int_c^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\cos(y\ln(t))dt \text{ avec } c > 0.$$

Comme $x > 1$ la fonction $t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue. D'où la convergence de J_1.
Puisque $\lim\limits_{t\to\infty} t^{x+1}e^{-t}t^{x-1} = \lim\limits_{t\to\infty} t^{2x}e^{-t}$ on a

$$\forall A, \exists B : \forall t \geq B \quad e^{-t}t^{x-1} \leq \frac{A}{t^{x+1}},$$

ceci implique

$$\int_B^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \leq A\int_B^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}} = \frac{A}{xB^x} < +\infty.$$

Par conséquence I_1 et I_2 convergent.
• Si $0 < x < 1$ prenant $c > 0$

$$\int_0^{c} e^{-t}t^{x-1}dt \leq \int_0^{c} t^{x-1}dt = \frac{1}{x}c^x.$$

D'où la convergence de J_1.
$\lim_{t\to\infty} t^{x+1}e^{-t}t^{x-1} = \lim_{t\to\infty} t^{2x}e^{-t}$ nous avons

$$\forall A > 0, \exists c > 0 : e^{-t}t^{1-x} \leq \frac{A}{t^{x+1}},$$

ceci implique

$$\int_c^{+\infty} e^{-t}t^{1-x}dt \leq \frac{A}{xc^x}.$$

Remarque 1.2.1. *Si la partie réèelle de z est strictement positive alors la fonction $\Gamma(z)$ est bien définie.*

Propriétés de la fonction Gamma

Lemme 1.2.1. *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$ on a*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad et \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$ alors

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \\ &= [\frac{t^z e^{-t}}{z}]_0^{+\infty} + \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} t^{(z-1)+1}e^{-t}dt = \frac{1}{z}\Gamma(z+1).\end{aligned}$$

D'où

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.1}$$

D'aprés (1.1) pour tout $z \in \mathbb{N}^*$ on obtient

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1\Gamma(1) = 2!$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)...2.1 = n!.$$

Théorème 1.2.1. *La fonction Γ est définie et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$, ses dérivées successives sont données par la formule*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln(x))^k t^{x-1}dt, \quad z = x \in [0, +\infty[.$$

Théorème 1.2.2. *(Prolongement de la fonction Gamma) La fonction Γ s'étend (en une fonction holomorphe) à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et pour tout entier négative n : $\lim_{z\to n}(z-n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$ c'est le résidu de $-n$.*

Lemme 1.2.2. *Soit $z \in \mathbb{C}$ avec Re(z)> 0 alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\vdots(z+n)} = \Gamma(z),$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{z\gamma}\prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{z}{k}+1\Big)e^{-\frac{z}{k}},\ z \neq -n \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.2.2. *(Equation d'Abel)*
On considère l'equation intégrale

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = f(t),\ \alpha \in]0,1[,\ x \in [a,b], \tag{1.2}$$

où φ est la fonction inconnue et f est une fonction donnée.
L'equation 1.2 s'appelle équation d'Abel, et elle admet une solution définie par

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

1.2.2 Fonction Bêta

Définition 1.2.3. *La fonction Bêta (ou la fonction de Bessel de seconde espèce) est donnée par :*
Pour tout $(z,\omega) \in \mathbb{C}^2$avec $Re(z) > 0$, on a

$$B(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt.$$

Justification de l'existence de la fonction Bêta

• *Si $Re(z) > 0$ et $Re(\omega) > 1$, alors la fonction $t \longmapsto t^{Re(z)-1}(1-t)^{Re(\omega)-1}$ est continue. Ce qui donne*

$$\Big|\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt\Big| \leq \int_0^1 t^{Re(z)-1}(1-t)^{Re(\omega)-1}dt < \infty. \tag{1.3}$$

• *Si $Re(z) > 0$ et $0 < Re(\omega) < 1$, on considère*

$$I_1(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt, \text{pour } \varepsilon \in]0,1[.$$

En fait

$$\begin{aligned}|I_1(\varepsilon)| &\leq \int_0^{\varepsilon} |(1-t)^{\omega-1}|dt \\ &\leq \Big[-\frac{1}{Re(\omega)}(1-t)^{Re(\omega)-1}\Big]_0^{\varepsilon},\end{aligned}$$

et on obtient

$$|I_1(\varepsilon)| \leq \frac{1}{Re(\omega)}[-(1-\varepsilon)^{Re(\omega)-1}+1],$$

ceci implique

$$|I_1(1)| = \int_0^{\varepsilon} |(1-t)^{\omega-1}|dt \leq \frac{1}{Re(\omega)} < \infty. \tag{1.4}$$

- *Si* $0 < Re(z) < 1$ *et* $Re(\omega) > 1$, *on considère*

$$I_2(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1} t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt, \textit{pour } \varepsilon \in]0,1[.$$

On a

$$\begin{aligned} |I_2(\varepsilon)| &\leq \int_{\varepsilon}^{1} t^{Re(z)-1}(1-t)^{Re(\omega)-1}dt \\ &\leq \frac{1}{Re(z)}[t^{Re(z)}]_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{Re(z)}[1-\varepsilon^{Re(z)}]. \end{aligned}$$

D'où

$$I_2(0) = \Big|\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt| \leq \frac{1}{Re(z)}. \tag{1.5}$$

- *Si* $0 < Re(z) < 1$ *et* $Re(\omega) > 1$, *on considère*

$$J_1 = \int_0^c t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt, \qquad J_2 = \int_c^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt,$$

le cas ou $0 < t \leq c$ *on a* $\dfrac{1}{1-t} \leq \dfrac{1}{1-c}$, *alors* $1 < (1-t)^{Re(\omega)-1} \leq (1-c)^{Re(\omega)-1}$ *et on obtient*

$$|J_1| \leq (1-c)^{Re(\omega)-1}\int_0^1 t^{Re(z)-1}dt = \frac{c^{Re(z)}}{Re(z)(1-c)^{1-Re(\omega)}}. \tag{1.6}$$

De même si $c \leq t < 1$ *on déduit que*

$$|J_1| \leq \frac{1}{Re(\omega)c^{Re(z)-1}}[1-(1-c)^{Re(\omega)}]. \tag{1.7}$$

D'aprés (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) et (1.7) on conclut que la fonction Bêta est bien définie.

Propriétés de la fonction Bêta

Théorème 1.2.3. *Soient* $(p,q) \in \mathbb{C}^2 : Re(p) > 0$ *et* $Re(q) > 0$. *Alors*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Démonstration. Soient $(p,q) \in \mathbb{C}^2 : Re(p) > 0$ et $Re(q) > 0$. On utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}s^{q-1}e^{-s}dtds.$$

On effectue le changement de variable $r = t + s$

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} t^{p-1}\left[\int_0^{+\infty}(r-t)^{q-1}e^{-r}dr\right]dt\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-r}\left[\int_0^{+\infty} t^{p-1}(r-t)^{q-1}dt\right]dr.\end{aligned}$$

On pose $\dfrac{t}{r} = s$ et on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} e^{-r}\int_0^1 r(1-s)^{q-1}r^{q-1}s^{p-1}r^{p-1}dsdr\\ &= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{p+q-1}\int_0^1(1-s)^{q-1}s^{p-1}dsdr = \int_0^{+\infty} r^{p+q-1}e^{-r}B(p,q).\end{aligned}$$

Donc

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Proposition 1.2.1. *Pour tout $p, q \in \mathbb{C}$: $Re(p) > 0$ et $Re(q) > 0$. On a*

1. $B(p,q) = B(q,p)$.
2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$.
3. $B(p,q+1) = \frac{q}{p}B(p+1,q) = \frac{q}{p+q}B(p,q)$.
4. $B(p,q) = \int_0^{+\infty}\dfrac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}dt$.

Proposition 1.2.2. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^+$*

$$\int_a^b (b-u)^{p-1}(u-a)^{q-1}du = (b-a)^{p+q-1}B(p,q).$$

1.3 Intégrales et dérivations fractionnaires

Dans cette section on va présenter les notions de la dérivée et l'intégrale fractionnaire. Il existe beaucoup d'approches différentes qui ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation d'ordre non entiers, par exemple on a : la formule de Riemann-Liouville et de Caputo.
Soit $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ou intégrable et

$$\begin{aligned}I^1_{a+} : [a,b[&\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto I^1_{a+}f(x) = \int_a^x f(t)dt,\end{aligned}$$

pour une primitive seconde on aura :

$$I^2_{a+}f(x) = \int_a^x\left(\int_a^t f(s)ds\right)dt,$$

d'aprés le théorème de Fubini nous ramènons cette intégrale double a une intégrale simple

$$I_{a+}^2 f(x) = \int_a^x f(s)ds \int_a^t dt = \int_a^x \frac{(x-s)}{1!} f(s)ds,$$

par une itération on obtient

$$I_{a+}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

De même manière, on obtient

$$I_{b-}^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)dt.$$

Définition 1.3.1. *Soient $f \in L^1([a,b],\mathbb{R}), \alpha > 0$. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale à gauche (respectivement à droite) suivante*

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad x > a,$$

et

$$I_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt. \ x < b.$$

Lemme 1.3.1. *Soient $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$, alors*

$$QI_{a+}^\alpha = I_{b-}^\alpha Q, \quad et \quad QI_{b-}^\alpha = I_{a+}^\alpha Q,$$

avec $(Qf)(x) = f(a+b-x)$.

Proposition 1.3.1. *Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ pour $\alpha, \beta > 0$ On a*

$$I_{a+}^\alpha . I_{a+}^\beta f = I_{a+}^{\alpha+\beta} f, \ et \ I_{b-}^\alpha . I_{b-}^\beta f = I_{b-}^{\alpha+\beta} f.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f)(x) &= I_{a+}^\alpha (I_{a+}^\beta f)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (I_{a+}^\beta f)(t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s)ds \right) dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s)ds \int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt,
\end{aligned}$$

en y effectuant le changement de variable $t = s + (x-s)r$

$$\begin{aligned}
\int_s^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} dt &= \int_0^1 (x-s)^{\alpha-1} (1-r)^{\alpha-1} (x-s)^{\beta-1} r^{\beta-1} (x-s) dr \\
&= \int_0^1 (x-s)^{\alpha+\beta-1} r^\beta (1-r)^{\alpha-1} dr \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 r^\beta (1-r)^{\alpha-1} dr \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha,\beta) \\
&= (x-s)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$(I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds = (I^{\alpha+\beta}_{a+}f)(x).$$

De même manière on montre que $I^{\alpha}_{b-}I^{\beta}_{b-}f = I^{\alpha+\beta}_{b-}f$.

Proposition 1.3.2. *Soient $\alpha, \beta > 0$ alors*

$$I^{\alpha}_{a+}[(t-a)^{\beta-1}]f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1},$$

et

$$I^{\alpha}_{b-}[(b-t)^{\beta-1}]f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

Lemme 1.3.2. *Soit $f \in L^p([a,b],\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$, alors*

(a) $\exists k > 0$ tel que

$$\|I^{\alpha}_{a+}f\|_{L^p} \leq k\|f\|_{L^p}, \ \text{ et } \ \|I^{\alpha}_{b-}f\|_{L^p} \leq k\|f\|_{L^p},$$

avec $k = \dfrac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \alpha > 0$.

(b) Si $0 < \alpha < 1$ et $1 < p < \dfrac{1}{\alpha}$ alors il existe $\tilde{k} > 0$ tel que

$$\|I^{\alpha}_{a+}f\|_{L^q} \leq \tilde{k}\|f\|_{L^p} \ \text{ et } \ \|I^{\alpha}_{b-}f\|_{L^q} \leq \tilde{k}\|f\|_{L^p}, \quad \forall f \in L^p([a,b],\mathbb{R}),$$

avec $q = \dfrac{p}{1-\alpha p}$.

1.4 Dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4.1. *Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On appelle dérivée d'ordre $\alpha \in]0,1[$ au sens de Riemann-Liouville les fonctions définies par*

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt,$$

et

$$D^{\alpha}_{b-}f(x) = -\frac{d}{dx}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt.$$

On note D_{a+} et D_{b-} respectivement la dérivée à gauche et à droite.

Lemme 1.4.1. *Soit $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$ alors la fonction f admet des dérivées fractionnaires D^{α}_{a+}, D^{α}_{b-} presque par tout sur $[a,b]$ avec $D^{\alpha}_{a+}f$, $D^{\alpha}_{b-}f \in L^r([a,b])$, pour $1 \leq r < \frac{1}{\alpha}$. De plus*

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt\right],$$

et

$$D^{\alpha}_{b-}f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(b)}{(b-x)^{\alpha}} + \int_x^b \frac{f'(t)}{(t-x)^{\alpha}}dt\right].$$

Définition 1.4.2. *Soient α un réel strictement positif, $n \in \mathbb{N}$ tel que $[\alpha] = n+1$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par*

$$(D^{\alpha}_{a_+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \Big(\frac{d}{dx}\Big)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$$

On note $(I^{n-\alpha}_{a_+} f)(x) = \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt.$

Lemme 1.4.2. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $[\alpha] = n+1$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction donnée. Supposons que $D^{\alpha}_{a_+} f = 0$. Alors*

$$f(x) = \sum_{K=0}^{n-1} c_K \frac{\Gamma(K+1)}{\Gamma(K+1+\alpha-n)} (x-a)^{K+\alpha-n},$$

où les c_k sont des constantes quelconques.

Proposition 1.4.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrale. Alors*

$$D^{\alpha}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+} = D^{n}_{a_+} I^{n-\alpha}_{a_+} I^{\alpha}_{a_+} = D^n I^n_{a_+} = Id, \;\; n = [\alpha]+1.$$

Théorème 1.4.1. *Soient $\alpha_1, \alpha_2 > 0, \varphi \in L^1([a,b], \mathbb{R})$ et $f = I_a^{\alpha_1+\alpha_2} \varphi$. Alors*

$$D^{\alpha_1}_{a_+} D^{\alpha_2}_{a_+} f = D^{\alpha_1+\alpha_2}_{a_+} f = D^{\alpha_2+\alpha_1}_{a_+} f.$$

Théorème 1.4.2. *Soit α réel strictement positif. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers une fonction f continue sur $[a,b]$. Alors on a*

$$(I^{\alpha}_{a_+} \lim_{n\to+\infty} f_n)(x) = \lim_{n\to+\infty} (I^{\alpha}_{a_+} f_n)(x).$$

De plus, la suite $(I^{\alpha}_{a_+} f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $I^{\alpha}_{a_+} f$.

1.4.1 Formule de Leibnitz pour l'intégrale d'ordre fractionnaire

Théorème 1.4.3. *Soit $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ et g une fonction analytique sur $[a,b]$, alors pour tout $\alpha > 0$ on a*

$$I^{\alpha}_{a+}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-\alpha}{k} D^k g(x) I^{\alpha+k}_{a+} f(x).$$

Théorème 1.4.4. *Soit α réel strictement positif. Si $(f_n)_n \in \mathbb{N}^*$ est une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers une fonction f continue sur $[a,b]$. Alors on a*

$$(I^{\alpha}_{a+} \lim_{n\to+\infty} f_n)(x) = \lim_{n\to+\infty} (I^{\alpha}_{a+} f_n)(x).$$

De plus, la suite $(I^{\alpha}_{a+} fn)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $I^{\alpha}_{a+} f$.

Proposition 1.4.2. *Soit* $f \in AC^n([a,b],\mathbb{R}), \alpha > 0$. *Alors*

$$\lim_{\alpha \to^+ m} D^\alpha_{a+} f = f^{(m-1)}, \quad et \quad \lim_{\alpha \to^- m} D^\alpha_{a+} f = f^{(m)},$$

et

$$(I^\alpha_{a+} D^\alpha_{a+} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{k-n+\alpha}}{\Gamma(k-n+\alpha+1)} C_k(f),$$

avec $C_k(f) = \lim_{x \to a^+} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^k I^{n-\alpha}_{a+} f \right] (x)$.

Démonstration. Puisque $f \in AC^n([a,b],\mathbb{R})$ alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + I^\alpha_{a+} f^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (D^\alpha_{a+} f)(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n I^{2n-\alpha}_{a+} f^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) \\ &= (I^{n-\alpha}_{a+} f^{(n)})(x) + \sum_{k=0}^{n-\alpha} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a). \end{aligned}$$

comme l'intégrale de Riemann-Liouville est holomorphe en α, elle est donc continue. D'autre part la somme est nulle parceque les termes $\frac{1}{\Gamma(k+1-m)}$ sont nuls. En utilisant le théorème 1.4.4 on obtient

$$\lim_{\alpha \to m} (I^{n-\alpha}_{a+} f^{(n)})(x) = f^{(n)}(x).$$

D'où

$$\lim_{\alpha \to m} (D^\alpha_{a+} f)(x) = f^{(n)}(x).$$

D'aprés la proposition 1.4.1 on obtient

$$D^\alpha_{a+}[I^\alpha D^\alpha_{a+} f - f] = D^\alpha_{a+} I^\alpha_{a+} D^\alpha_{a+} f - D^\alpha_{a+} f = D^\alpha_{a+} f - D^\alpha_{a+} f = 0.$$

et d'aprés le lemme 1.3.1 on a

$$(I^\alpha D^\alpha_{a+} f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k(f) \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} (x-a)^{k+\alpha-n}.$$

En composant les deux membres par $I^{n-\alpha}_{a+}$, on obtient

$$\begin{aligned} (I^n_{a+} D^\alpha_{a+} f)(x) - (I^{n-\alpha}_{a+} f)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k(f) \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)} I^{n-\alpha}_{a+} (x-a)^{k+\alpha-n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k(f) (x-a)^k. \end{aligned}$$

Pour tout $0 \leq k \leq m-1$ on a

$$\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^k (I^n_{a+}D^\alpha_{a+}f)(x) - (I^{n-\alpha}_{a+}f)(x)\right] = k!C_k(f) + \lim_{x\to a}\sum_{j\neq 0}^{n-1}\bar{C}_j(x-a)^k.$$

Alors

$$\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^k (I^n_{a+}D^\alpha_{a+}f)(x) - (I^{n-\alpha}_{a+}f)(x)\right] = k!C_k(f),$$

mais comme

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{d}{dx}\right)^k (I^n_{a+}D^\alpha_{a+}f)(x) = \lim_{x\to a}\left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^{n-1}(D^\alpha_{a+}f)(x) = 0,$$

on a

$$C_k(f) = -\lim_{x\to a}\frac{(I^{n-\alpha}_{a+}f)(x)}{k!}.$$

D'où le résultat

$$(I^\alpha_{a+}D^\alpha_{a+}f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{k-n+\alpha}}{\Gamma(k-n+\alpha+1)}\left(\lim_{x\to a}\frac{(I^{n-\alpha}_{a+}f)(x)}{k!}\right).$$

Théorème 1.4.5. *Soit $\alpha > 1$ tel que $[\alpha - 1] = n$. Si $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ alors*

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^b (b-x)^{-\alpha}f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{k-\alpha+1}}{\Gamma(k-\alpha+2)}f^{(k)}(a) + I^{n-\alpha+1}_{a+}f^{(n)}(b).$$

Lemme 1.4.3. *Soit α un réel strictement positif tel que $\alpha \in \mathbb{N}$ et $[\alpha] = n$. Supposons que $f \in C^n([a,b],\mathbb{R})$, alors*

$$(D^\alpha_a f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1}f(t)dt.$$

1.5 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.5.1. *Soient α un nombre réel positif avec $n = [\alpha]$ et f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\frac{d^k}{dx^k}f(a^+) = f^{(k)}(a^+)$ existe pour $k = 1,\dots,n-1$.*
On appelle dérivée de f au sens de Caputo la fonction définie par

$$({}^cD^\alpha f)(x) = D^\alpha_a[f - T_{n-1}[f,a]](x), \quad \textit{pour } x \in [a,b]$$

où

$$T_{n-1}[f,a](x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a).$$

Remarque 1.5.1. *Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ on a ${}^cD^\alpha f = D^\alpha f$.*

Théorème 1.5.1. *Soit* $f \in AC^n([a;b], \mathbb{R})$, *et* $n = [\alpha]$ *pour* $\alpha \in \mathbb{R}^+$. *Alors*

$$^cD_a^\alpha f(x) = (I_a^{n-\alpha} f^{(n)})(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt.$$

Lemme 1.5.1. *Soient* $\alpha \geq 0$ *avec* $[\alpha] = n$ *et* f *une fonction de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose que les dérivées* $^cD_a^\alpha f$ *et* $D_a^\alpha f$ *existent. Alors*

$$^cD_a^\alpha f(x) = (D_a^\alpha f)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}.$$

Lemme 1.5.2. *On suppose que les conditions du lemme 1.5.1 sont satisfaites, alors*

$$^cD_a^\alpha f = D_a^\alpha f \quad \text{si et seulemnt si} \quad (D^k f)(a) = 0.$$

Théorème 1.5.2. *Soient* $\alpha > 0$ *avec* $[\alpha] = n \in N$ *et* $f \in AC^n([a,b], \mathbb{R})$. *Alors*

$$I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Démonstration. Soit $f \in AC^n([a,b], \mathbb{R})$, donc

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + I_a^\alpha f^{(n)}(x) \tag{1.8}$$

et

$$^cD_a^\alpha f = I_a^{n-\alpha} f^{(n)} \rightarrow \; I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f = I_a^\alpha I_a^{n-\alpha} f^{(n)}.$$

Donc on obtient $I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f = I_a^n f^{(n)}$ Finalement d'aprés (1.8) on a

$$(I_a^\alpha \, {}^cD_a^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

Lemme 1.5.3. *Si* $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ *et* $\alpha > 0$ *alors* $\lim\limits_{n \to a^+} (I_a^\alpha f)(x) = 0$.

Lemme 1.5.4. *Soient* $\alpha, \beta \in [0,1]$ *avec* $\alpha + \beta \leq 1$ *et* $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$, *alors*

$$({}^cD_a^\alpha \, {}^cD_a^\beta) f =^c D_a^{\alpha+\beta} f = ({}^cD_a^\beta \, {}^cD_a^\alpha) f.$$

1.6 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo Hadamard

Définition 1.6.1. *L'intégrale fractionnaire d'Hadamard d'ordre* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *de la fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m, 0 < a < b \leq \infty, c > 0$ *est défini par*

$$J_{c_+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t \left(\ln \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} f(s) \frac{ds}{s},$$

où Γ *est la fonction Euler-Gamma.*

Définition 1.6.2. *La dérivée d'Hadamard d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m, 0 < a < b \leq \infty, c > 0$ est donnée par*

$$^{H}D^{\alpha}_{c_+}f(t) = \delta^n(J^{n-\alpha}_{c_+}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\Big(t\frac{d}{dt}\Big)^n \int_c^t \Big(\ln\frac{t}{s}\Big)^{n-\alpha-1} f(s)\frac{ds}{s},$$

où $\delta := t\dfrac{d}{dt}$, $\delta^0 f(t) = f(t)$ et $n = [\alpha]$ avec $[\alpha]$ le plus petit entier supérieur ou égal à α.

Définition 1.6.3. *Soit $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha]+1, c > 0$, si $f \in AC^n_\delta$, La dérivée fractionnaire de Caputo-Hadamard d'ordre α de f est définie par :*

$$^{CH}D^{\alpha}_{c_+}f(t) = J^{n-\alpha}_{c_+}\delta^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_c^t \Big(\ln\frac{t}{s}\Big)^{n-\alpha-1}\delta^n f(s)\frac{ds}{s},$$

à condition que le côté droit existe.
La dérivée fractionnaire d'Hadamard est l'opérateur inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire d'Hadamard dans l'espace $L^p[a,b], 1 \leq p \leq \infty$, c'est $^{H}D^{\alpha}J^{\alpha}f = f$.
La modification de type Caputo des dérivées fractionnaires d'Hadamard à gauche et à droite sont définies respectivement par

$$^{CH}D^{\alpha}f(t) = {}^{H}D^{\alpha}\Big[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k f(a)}{k!}\Big(\ln\frac{t}{a}\Big)^k\Big],$$

et

$$^{CH}D^{\alpha}f(t) = {}^{H}D^{\alpha}\Big[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k f(b)}{k!}\Big(\ln\frac{b}{t}\Big)^k\Big].$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, alors

$$^{CH}D^{\alpha}f(t) = {}^{H}D^{\alpha}[y(t) - f(a)],$$

et

$$^{CH}D^{\alpha}f(t) = {}^{H}D^{\alpha}[y(t) - f(b)].$$

Lemme 1.6.1. *Soient $\alpha > 0, \beta > 0$, alors pour tout $0 < a < b < \infty$, $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^2(a,b)$*

$$D^{\alpha}J^{\alpha}f = J^{\alpha-\beta}f \text{ et } J^{\alpha}J^{\beta}f = J^{\alpha+\beta}f.$$

Lemme 1.6.2. *Soient $\alpha > 0, n = [\alpha]+1$ et $f \in C[a,b]$, alors*

$$^{CH}D^{\alpha}J^{\alpha}f(t) = f(t) \;\; t \in [a,b].$$

Lemme 1.6.3. *Soient $\alpha > 0, n = [\alpha]+1$ et $f \in AC^n_\delta[a,b]$ ou $f \in C^n([a,b])$, alors*

$$J^{\alpha\,CH}D^{\alpha}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\delta^k f(a)}{k!}\Big(\ln\frac{t}{a}\Big)^k.$$

Chapitre 2

Généralités sur les multi-fonctions

2.1 Notations et définitions

Soit (X, d) un espace métrique ou un espace métrique généralisé et Y un sous-ensenble de X.
On note :

- $\mathcal{P}(X) = \{Y \subset X; Y \neq \emptyset\}$
- $\mathcal{P}_p(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X); Y$ vérifier la propriété "p"$\}$, où p peut être : cl=fermé, b=borné, cp=compact, cv=convexe, etc.
  Alors :
- $\mathcal{P}_{cl}(X) = \{Y \subset X; Y \text{ est fermé}\}$,
- $\mathcal{P}_b(X) = \{Y \subset X; Y \text{ est borné}\}$,
- $\mathcal{P}_{cv}(X) = \{Y \subset X; Y \text{ est convexe}\}$,
- $\mathcal{P}_{cp}(X) = \{Y \subset X; Y \text{ est compact}\}$,
- $\mathcal{P}_{cv,cp}(X) = \mathcal{P}_{cv}(X) \cap \mathcal{P}_{cp}(X)$, etc ...

Définition 2.1.1. *Une multifonction (ou application multivoque) F d'un espace X vers l'espace $\mathcal{P}(Y)$ est une correspondance qui associe à tout élément $x \in X$ un sous-ensemble $F(x)$ de Y. On notera $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ (les notations $F : X \to 2^Y$ et $F : X \multimap Y$ sont aussi utilisées dans la littérature).*

Définition 2.1.2. *On appelle graphe de la multifonction F, l'ensemble*

$$Graph(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(X)\}.$$

F est à graphe fermé si $Graph(F)$ est fermé dans $X \times Y$. On dira que F est fermée.

Définition 2.1.3. *On appelle image de F l'union des images $F(x)$*

$$Im(F) = \bigcup_{x \in X} F(x),$$

et domaine de F l'ensemble

$$Dom(F) = \{x \in X, F(x) \neq \emptyset\}.$$

Définition 2.1.4. *(a) Une multi-fonction $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ est à valeur fermée (resp convexe) si $F(x)$ est fermée (resp convexe) pour tout $x \in X$*

(b) F est dite bornée sur les bornés si l'ensemble

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x),$$

est borné dans Y pour chaque sous-ensenmble $A \in \mathcal{P}_b(X)$, i.e.

$$\sup_{x \in A}\{\sup\{\|y\|_F, y \in F(x)\}\} < \infty.$$

Enfin, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.1. *Soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ une multifonction, et A_1, A_2 deux sous-ensembles de X. Alors*

(a) $F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) \cup F(A_2)$.

(b) $F(A_1 \cap A_2) \subset F(A_1) \cap F(A_2)$.

(c) $Im(F) \setminus F(A) \subset F(X \setminus A)$.

(d) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow F(A_1) \subset F(A_2)$.

2.2 Image réciproque d'une multifonction

Soit E_1, E_2 deux ensembles et $F : E_1 \to \mathcal{P}(E_2)$ une application multivoque.

Définition 2.2.1. *L'inverse F^{-1} de F est l'application multivoque de E_2 dans E_1 définie par la relation*

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in Graph(F).$$

C'est-à-dire

$$F^{-1}(y) = \{x \in E_1 : y \in F(x)\} = \{x \in E_1 : (x, y) \in Graph(F)\}.$$

L'une des différences entre les applications univoques et les applications multivoques est que pour une fonction univoque, l'inverse d'un ensemble est défini de manière unique, par contre, il existe deux manières de définir l'image inverse d'un ensemble par une multifonction.

Définition 2.2.2. *Soit $F : E_1 \to \mathcal{P}(E_2)$ une application multivoque et B un sous-ensenmble de E_2. L'image inverse de B par F notée $F_-^{-1}(B)$, est définie par*

$$F_-^{-1}(B) = \{x \in E_1, F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Le noyau de F notée $F_+^{-1}(B)$ est défini par

$$F_+^{-1}(B) = \{x \in E_1, F(x) \subset B\}.$$

Proposition 2.2.1. *Soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ une multi-fonction et $A \subset X, B \subset Y$ deux sous ensembles de X, Y respectivement. Alors*

(a) $A \subset F_+^{-1}(F(A))$.

(b) $F(F_+^{-1}(B)) \subset B$.

2.3 Union, intersection, composition et produit cartésien de multifonctions

Définition 2.3.1. *Si $F, G : X \to \mathcal{P}(Y)$ sont des multi-applications, alors*

$$(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x), \quad (F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x),$$

et

$$(F \times G)(x) = F(x) \times G(x).$$

Définition 2.3.2. *Si $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ et $G : X \to \mathcal{P}(Z)$ sont des multi-applications, alors la compsition $(G \circ F)(.)$ est définie par*

$$(G \circ F)(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y).$$

2.4 Propriétés principales

Proposition 2.4.1. *Soit $F, G : X \to \mathcal{P}(Y)$ deux multifonctions, et B un sous-ensemble de Y. Alors*

(a) $(F \cup G)_-^{-1}(B) = F_-^{-1}(B) \cup G_-^{-1}(B)$ *et* $(F \cup G)_+^{-1}(B) = F_+^{-1}(B) \cup G_+^{-1}(B)$.

(b) $(F \cap G)_-^{-1}(B) = F_-^{-1}(B) \cap G_-^{-1}(B)$ *et* $F_+^{-1}(B) \cap G_+^{-1}(B) \subseteq (F \cap G)_+^{-1}(B)$.

Proposition 2.4.2. *(a) Soient $F, G : X \to \mathcal{P}(Y)$ deux multifonctions, et $B \subseteq Y$. Alors*

$$(G \circ F)_-^{-1}(B) = F_-^{-1}(G_-^{-1}(B)) \quad \text{et} \quad (G \circ F)_+^{-1}(B) = F_+^{-1}(G_-^{-1}(B)),$$

(b) Soit $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ et $G : Y \to \mathcal{P}(Z)$ deux multifonctions, $B \subseteq Y$ et $C \subseteq Z$. Alors

$$(G \times F)_+^{-1}(B \times C) = F_+^{-1}(B) \cap G_+^{-1}(C) \quad \text{et} \quad (G \times F)_-^{-1}(B \times C) = F_-^{-1}(B) \cap G_-^{-1}(C).$$

2.5 Sélection mesurable

Définition 2.5.1. *On dit que $f : \Omega \to X$ est une sélection mesurable de F si*

$$f(\omega) \in F(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Théorème 2.5.1. *Soient Y un espace métrique séparable et $F : \Omega \to \mathcal{P}_f(Y)$ est mesurable, alors F est une sélection mesurable.*

Théorème 2.5.2. ***(Kuratowski-Rull Nardzewski)***
Soit $F : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ une multi-fonction mesurable à images fermés non vides et supposons X sparable. Alors F admet au moins une sélection mesurable.

Remarque 2.5.1. *Dans le théorème précédent, on peut remplacer l'image de F fermée par F à valeur fermées.*

Lemme 2.5.1. *Soit $(\Omega, \sum)$ un espace mesuré, X un espace polonais et*

$$F : \Omega \to \mathcal{P}_f(X)$$

une fonction multivoque mesurable. Alors les assertions suivantes sonr équivalentes :

(a) *F est mesurable.*

(b) *Il existe une suite de sélection $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mesurable de F telle que*

$$F(\Omega) = \overline{\{f_n(\omega) : n \geq 1\}}.$$

Théorème 2.5.3. *Soit $(\Omega, \sum)$ un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $F : \Omega \to \mathcal{P}_f(X)$ une application multivoque.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) *F est mesurable.*

(b) *Pour chaque $x \in X$, la fonction $\omega \longmapsto h(\omega) = d(x, F(\omega))$ est mesurable.*

(c) *F admet une sélection telle que*

$$F(\Omega) = \overline{\{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Théorème 2.5.4. *Soit $(\Omega, \sum)$ un espace mesurable, X un espace métrique séparable et $F : \Omega \to \mathcal{P}_f(X)$ une application multivoque. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $F^{-1}(D) \in \sum, \ \forall D \in B(X)$.

(2) *F est fortement mesurable.*

(3) *F est mesurable.*

(4) *Pour chaque $x \in X$, la fonction $\omega \longmapsto h(\omega) = d(x, F(\omega))$ est mesurable.*

(5) *F admet des sélections telles que*

$$F(\Omega) = \overline{\{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

(6) $GrF \in \sum \bigotimes B(X)$.
Alors

(a) $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6)$.

(b) *Si X est un espace métrique complet, alors $(3) \Rightarrow (5)$.*

(c) *Si X est $\sigma-$compact, alors $(2) \Rightarrow (3)$.*

(d) *Si $\sum = \widehat{\sum}$ et X est un espace complet, alors les propriétés $(1)-(6)$ sont équivalentes.*

2.6 Sélection continue

Nous allons énoncer un théorème trés important en analyse multivoque, le théorème de sélection de Michael. Mais d'abord nous allons commencer par deux lemmes :

Lemme 2.6.1. *Soit (X, d) un espace métrique, Y un espace de Banach et $F_1 : X \to \mathcal{P}(X)$ s.c.i. et $F_2 : X \to \mathcal{P}(Y)$ à graphe ouvert tel que $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$, pour tout $x \in X$. Alors, l'opérateur multivoque $F_1 \cap F_2$ est s.c.i.*

Lemme 2.6.2. *Soit (X, d) un espace métrique, Y un espace de Banach et $F_1 : X \to \mathcal{P}(X)$ s.c.i. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $f_\varepsilon : X \to Y$ telle que pour tout $x \in X$, on a que $f_\varepsilon(x) \in V(F(x), \varepsilon)$.*

Théorème 2.6.1. ***(Théorème de sélection de Michael)***
Soit (X, d) un espace métrique, Y un espace de Banach et $F : X \to \mathcal{P}_{f,cv}(Y)$. Alors il existe $f : X \to Y$ sélection continue de F.

Chapitre 3

Quelques théorèmes de point fixe aléatoire

3.1 Espace métrique généralisé

Dans cette section, nous introduisons quelques définitions et notations sur les espaces métriques génèralisés au sens de Perov. Ensuite nous donnons quelques notions topologiques telles que la continuité et la compacité. On s'intéresse également à l'étude de quelques propriétés d'une matrice convergente et dans la dernière section nous donnons quelques propriétés d'un espace de Banach généralisé.

Définition 3.1.1. *[46](**Distance**)*
Soit X un ensemble non vide. Une distance sur un ensemble X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $d(u,v) = 0$ *si et seulement si* $u = v$,

(ii) $d(u,v) = d(v,u)$ *pour tout* $u, v \in X$,

(iii) $d(u,v) \leq d(u,\omega) + d(\omega,v)$ *pour tout* $u, v, \omega \in X$.

Définition 3.1.2. ***(Espace métrique)***
Un espace metrique est un couple (X,d) où X est un ensemble et d une distance sur X.

Définition 3.1.3. ***(Espace métrique généralisé)***
On appelle (X,d) un espace métrique généralisé sur X si et seulement si $d_i (i = 1,\ldots,n)$ sont des métriques sur X, avec

$$d(x,y) := \begin{pmatrix} d_1(x,y) \\ \vdots \\ d_n(x,y) \end{pmatrix}.$$

Définition 3.1.4. ***(Boule ouverte et Boule fermée)***
Soit (X,d) un espace métrique généralisé. Soient $x_0 \in X$ et $r = (r_1,\ldots,r_n)$ avec $r_i > 0$. On appelle boule ouverte de centre x_0 et de rayon r la partie suivante de X

$$B(x_0,r) = \{x \in X : d(x_0,x) < r\} = \{x \in X : d_i(x_0,x) < r_i, i = 1,\ldots,n\}.$$

On appelle boule fermée de centre x_0 et de rayon r la partie suivante de X

$$\overline{B(x_0,r)} = \{x \in X : d(x_0,x) \leq r\} = \{x \in X : d_i(x_0,x) \leq r_i, i = 1,\ldots,n\}.$$

Soit (X, d) un espace métrique généralisé qui définit les espaces métriques suivants : $X_i = X, i = 1, \ldots, n$ Considérer $\prod_{i=1}^{n} X_i$ avec $\bar{d}$:

$$\bar{d}((x_i, \ldots, x_n), (y_i, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i).$$

La diagonale de l'espace $\prod_{i=1}^{n} X_i$ défini par :

$$\widetilde{X} = \Big\{(x, \ldots, x) \in \prod_{i=1}^{n} X_i : x \in X, i = 1, \ldots, n\Big\}.$$

Donc c'est un espace métrique avec la distance suivante

$$d_*((x, \ldots, x), (y, \ldots, y)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i), \text{pour chaque } x, y \in X.$$

Il est clair que $\widetilde{X}$ est fermé dans $\prod_{i=1}^{n} X_i$. X et $\widetilde{X}$ sont équivalents.

Ceci est montré dans le résultat suivant.

Lemme 3.1.1. *[46] Soit (X, d) un espace métrique généralisé, alors il existe $h : X \to \widetilde{X}$ application homéomorphisme.*

Démonstration. Considérons l'application $h : X \to \widetilde{X}$ définie par :

$$h(x) = n(x, \cdots, x) \quad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

évidemment h est bijective.

- Prouvons que h est une application continue.
  Soit $x, y \in X$. Ainsi

$$d_*(h(x), h(y)) \leq \sum_{i=1}^{n} d_i(x, y).$$

  Pour $\varepsilon > 0$ nous prenons $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{n}, \cdots, \frac{\varepsilon}{n}\right)$, soit $x_0 \in X$ et $B(x_0, \delta) = \{x \in X : d(x_0, x) < \delta\}$. Alors pour tout $x \in B(x_0, \delta)$ nous avons

$$d_*(h(x_0), h(x)) < \varepsilon.$$

- Ensuite, Considérons l'application $h^{-1} : \widetilde{X} \to X$ définie par

$$h^{-1}(x, \cdots, x) = x, \qquad (x, \cdots, x) \in \widetilde{X}.$$

  Montrons que h^{-1} est continue.
  Soit $(x, \cdots, x), (y, \cdots, y) \in \widetilde{X}$ alors

$$d(h^{-1}(x, \cdots, x), h^{-1}(y, \cdots, y)) = d(x, y).$$

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) > 0$ nous prenons $\delta = \dfrac{1}{n} \min\limits_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i$ et $(x_0, \cdots, x_0) \in \widetilde{X}$. L'ensemble

$$B((x_0, \cdots, x_0), \delta) = \left\{ (x, \cdots, x) \in \widetilde{X} : d_*((x_0, \cdots, x_0), (x, \cdots, x)) < \delta \right\}.$$

Pour $(x, \cdots, x) \in B((x_0, \cdots, x_0), \delta)$ nous avons

$$d_*((x_0, \cdots, x_0), (x, \cdots, x)) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i(x_0, x) < \frac{1}{n} \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i.$$

Alors

$$d_i(x_0, x) < \frac{\min\limits_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i}{n}, \ i = 1, \cdots, n \Rightarrow d(x_0, x) < \varepsilon.$$

D'où h^{-1} est continue.

3.1.1 Topologie d'un espace métrique généralisé

Les notions d'une suite convergente, suite de cauchy, complétude, partie ouverte et fermée sont similaires à ceux des espaces métriques usuels. Dans ce qui suit nous présentons quelques propriétés topologiques telles que la compacité et la continuité.

Définition 3.1.5. *Soit (X, d) un espace métrique généralisé, on appelle la topologie métrique la topologie engendrée par les boules ouverts $\mathbf{B(x, r)}$ pour $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}^n_+$ avec*

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},$$

(la plus petite des topologies contenant les boules ouvertes).

Définition 3.1.6. *Soit (X, d) un espace métrique généralisé. On appelle ouvert toute partie A de X telle que tout point de A est centre d'une boule ouverte contenue dans A. Les ouverts ainsi définis sont ceux d'une topologie sur X, dite topologie associée à la distance d. Les boules ouvertes sont des ouverts et les ouverts sont exactement les réunions de boules ouvertes. L'espace topologique ainsi défini est encore noté (X, d).*

Propriété 3.1.1. *Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^n_+$, si $r_1 < r_2$ alors $B(x_0, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_2)$.*

Définition 3.1.7. *Une partie A d'un espace métrique généralisé (X, d) est dite bornée si les distances des points de A á un point fixe $a \in X$ sont majorées par un nombre fini ce qui équivaut á ce que le diamètre $\delta(A)$ de A, défini par $\delta(A) = \sup\limits_{(x,y) \in A^2} d(x, y)$, est fini.*

Une application f d'un ensemble A dans un espace métrique généralisé (X, d) est dite bornée si $f(A)$ est bornée.

Remarque 3.1.1. *La définition 3.1.7 est indépendante du choix de A.*

Propriété 3.1.2. *Soit $x \in E$ et $A \in \mathcal{P}(E)$, alors :*

$$A \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ telle que } B(x, r) \subset A.$$

Propriété 3.1.3. *La topologie d'un espace métrique généralisé est séparée.*

Propriété 3.1.4. *Une suite de points d'un espace métrique généralisé séparé a au plus une limite.*

Propriété 3.1.5. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points d'un espace métrique généralisé* (X, d) *converge vers un point a si et seulement si la suite* $(d(a, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers zéro dans* $\mathbb{R}_+^n$.

Définition 3.1.8. *Soit* $(X, \|.\|)$*un espace métrique généralisé, alors la suite* $(x_n)_n$ *s'appelle*

a) Suite de Cauchy si et seulement si $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ p, q \in \mathbb{N},\quad p, q \geq n\ \Rightarrow ||x_p - x_q|| < \varepsilon$.

b) Suite convergente si et seulement si $\exists\ x \in X\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ p \in \mathbb{N},\quad p \geq n\ \Rightarrow ||x_p - x|| < \varepsilon$.

Définition 3.1.9. *On dit qu'un espace métrique généralisé* (X, d) *est complet si toute suite de cauchy d'éléments de* X *est convergente.*

Propriété 3.1.6. *Dans un espace métrique généralisé*

- *toute suite convergente est de Cauchy.*
- *toute suite de Cauchy est bornée.*

Définition 3.1.10. *Soit* f *une application d'un espace métrique généralisé* X *dans un espace métrique généralisé* $\widetilde{X}$ *On dit que* f *est un homéomorphisme si* f *est une bijection et si* f *et* f^{-1} *sont continues.* X *et* $\widetilde{X}$ *sont alors dits homéomorphes.*

3.1.2 Compacité

Définition 3.1.11. *Un espace topologique* X *est dit compact s'il est séparé et s'il vérifie la propriété suivante (dite de Borel-Lebesgue) : De tout recouvrement ouvert de* X *on peut extraire un recouvrement fini.*

Remarque 3.1.2. $\mathbb{R}$ *n'est pas un compact.*

Théorème 3.1.1. *Un espace métrique généralisé* (X, d) *est compact si et seulement s'il vérifie la propriété suivante (dite de Bolzano-Weierstrass) : De toute suite de points de* X *on peut extraire une sous-suite convergente.*

Corollaire 3.1.1. *Un espace métrique généralisé compact est complet.*

Théorème 3.1.2. ***(Heine)*** *Toute application continue d'un espace métrique généralisé compact dans un espace métrique généralisé est uniformément continue.*

Propriété 3.1.7. *Le produit de deux espaces métriques généralisés compacts est un espace compact.*

Définition 3.1.12. *Soit* (X, d) *un espace métrique généralisé. Une partie* A *de* X *est dite compacte, si de toute suite d'éléments de* A *on peut extraire une sous-suite convergente dans* $A\cdot$

Propriété 3.1.8. *Soit* (X, d) *un espace métrique généralisé.*

- *Toute partie compacte de X est fermée et bornée.*
- *Si X est compact, toute partie fermée de X est compacte.*

Définition 3.1.13. *Soit un espace métrique généralisé (X, d). On dit que la famille $\{x_i; i = 1, \cdots, p\}$ d'éléments de X est un ε-r éseau de X si $X = \bigcup_{i=1}^{p} \overline{B}(x_i, \varepsilon)$ où $\overline{B}(x, \varepsilon)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon ε.*

Définition 3.1.14. *On dit que (X, d) est précompact si $\forall \varepsilon > 0$ il existe un ε-réseau de X.*

Théorème 3.1.3. *Un espace métrique généralisé (X, d) précompact et complet est compact.*

Démonstration. On a déjá vu qu'un espace compact métrique est complet (d'aprés corollaire (3.1.1). Il est aussi précompact. C'est donc la réciproque qui pose problème. Supposons donc X précompact et complet. Pour montrer sa compacité, nous allons utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass (Théorème 3.1.1). Considérons donc une suite (x_n) de X. Nous allons en chercher une sous-suite convergeante. Il existe, par définition, pour i entier ≥ 1, $y_{i,1}, y_{i,2}, \cdots, y_{i,N_i}$ telles que les boules centrées sur les $y_{i,j}$ et de rayon $\frac{1}{2^j}$ recouvrent X. Construisons par récurrence sur i $1 \leq j_i \leq N_i$ telle qu'une infinité de points x_n soit dans l'intersection des boule de rayon $\frac{1}{2^l}$ centrée sur x_{l,j_l} pour $l \geq i\cdot$ On choisit alors $a_i \in \mathbb{N}$, construit aussi par récurrence, telle que la suite des a_i soit croissante, et x_{a_i} soit dans l'intersection des boules de rayon $\frac{1}{2^l}$ centrée sur x_{l,j_l} pour $l \geq i$. Ceci définit une suite extraite de la suite des x_n, dont on montre facilement qu'elle est de Cauchy. Elle converge donc, par complétude de X. Donc, X est compact.

3.1.3 Continuité

Définition 3.1.15. *Soit $f : X \to \widetilde{X}$ une application entre deux espaces métriques généralisés (X, d) et $(\widetilde{X}, \tilde{d})$. L'application f est continue en $a \in X$ si :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n_+, \exists \eta \in \mathbb{R}^n_+, \forall x \in X; < d(x, a) < \eta \Rightarrow \tilde{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

$\star$ *L'application f est continue si et seulement si elle est continue en tout point $a \in X$.*

Propriété 3.1.9. *Soit (X, d_1) et $(\widetilde{X}, d_2)$ deux espaces métriques généralisés et f une application de X dans $\widetilde{X}$.*
Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en un point a de X est que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\widetilde{X}$ tendant vers a, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

Définition 3.1.16. *Soit (X, d_1) et $(\widetilde{X}, d_2)$ deux espaces métriques généralisés et une application f de X dans $\widetilde{X}$. f est dite uniformément continue si :*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^n_+, \exists \eta \in \mathbb{R}^n_+, \forall (x, y) \in X^2; d_1(x, y) < \eta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Propriété 3.1.10. *Une application uniformément continue est continue.*

Propriété 3.1.11. *Soient (X, d) , $(Y, \tilde{d})$ deux espaces métriques généralisés et $f : X \to Y$ une application uniformément continue. Alors l'image par f de toute suite de cauchy d'élément de X est une suite de cauchy d'élément de Y.*

Définition 3.1.17. *Soit (X, d_1) et $(\widetilde{X}, d_2)$ deux espaces métriques généralisés et une application f de X dans $\widetilde{X}$. f est dite lipschitzienne de rapport k si :*

$$\forall (x, y) \in X^2, \quad d_2(f(x), f(y)) < k d_1(x, y).$$

Propriété 3.1.12. *Une application lipschitzienne est uniformément continue.*

3.2 Matrice convergente

Dans cette section, on s'interesse à l'étude de quelques propriétées d'une matrice convergente.

Définition 3.2.1. *Une matrice carrée de nombres réels est dite convergente vers zéro si et seulement si son rayon spectral $\rho(M)$ est strictement inférieur à 1. Autrement dit, toutes les valeurs propres de M sont dans le disque unitaire ouvert i.e. $|\lambda| < 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $det(M - \lambda I) = 0$, où I est la matrice unitaire de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

Définition 3.2.2. *[41] Soit (X, d) un espace métrique généralisé. L'application $T : X \to X$ est une contraction sur X s'il existe une matrice $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ tel que :*

$$M^k \longrightarrow 0 \;\; \textit{lorsque} \;\; k \longrightarrow \infty \tag{3.1}$$

et

$$d(T(x), T(y)) \leq M d(x, y) \tag{3.2}$$

pour tout $x, y \in X$. Une matrice M qui satisfaite (3.1) est dite convergente vers zéro.

Un résultat classique en analyse matricielle est le théorème suivant.

Théorème 3.2.1. *[42] Soit $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) M est une matrice convergente vers zéro.
b) La matrice $(I - M)$ est inversible et $(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \ldots + M^k + \ldots$.
c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$ alors $\det(M - \lambda I) = 0$.
d) $(I - M)^{-1}|I - M| \leq I$.

Démonstration. Montrons que $(d) \Longrightarrow (a)$:
Supposons (d), alors on a :

$$S_k(I - M) = I - M^{k+1}$$

ce qui est vrai pour $S_k = I + M + M^2 + \ldots + M^k$.
Puisque M et $(I - M)^{-1}$ ont des élements positives, on en déduit que :

$$\begin{aligned} S_k &= (I - M^{k+1})(I - M)^{-1} \\ &= (I - M)^{-1} - M^{k+1}(I - M)^{-1} \\ &\leq (I - M)^{-1}. \end{aligned}$$

De plus, $(S_k)_{k\geq 1}$ est une suite bornée. Puisqu'elle est croissante (sur des élements) par définition, on en déduit qu'elle est convergente. En conséquence $M^k \longrightarrow 0$ lorsque $k \longrightarrow \infty$.

Définition 3.2.3. *Soit (X, d) un espace métrique généralisé. L'opérateur $N : X \to X$ est dit contractant s'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ qui converge vers zéro telle que*

$$d(N(x), N(y)) \leq Md(x, y) \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in X.$$

Pour $n = 1$, nous retrouvons le résultat classique de la contraction de Banach.

Théorème 3.2.2. *[39] Soit (X, d) un espace métrique généralisé complet et $N : X \to X$ un opérateur de contraction avec la matrice de Lipschitz M. Alors N a un point fixe unique x_* et pour chaque $x_0 \in X$ nous avons*

$$d(N^k(x_0), x_*) \leq M^k(I - M)^{-1}d(x_0, N(x_0)) \; \textit{pour tout} \; k \in \mathbb{N}.$$

Définition 3.2.4. *On appelle que la matrice non singulière $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ a la propriété de valeur absolue si*

$$A^{-1}|A| \leq I,$$

où

$$|A| = (|a_{ij}|)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+).$$

Quelques exemples de matrice convergente

Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ verifiant la propriété $(I - A)^{-1}|I - A| \leq I$,

1) $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $\max(a, b) < 1$.

2) $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $a + b < 1, c < 1$.

3) $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $|a - b| < 1, a > 1, b > 1$.

Définition 3.2.5. *Soit $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ un ordre de conservation (ou positif) si $p_1 \geq p_0, q_1 \geq q_0$ implique*

$$Q\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} \leq Q\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}.$$

dans le sense des composants.

Lemme 3.2.1. *Soit*

$$Q = \begin{pmatrix} a & -d \\ -c & d \end{pmatrix},$$

où $a, b, c, d \geq 0$ et $\det Q > 0$. Alors Q^{-1} est un ordre de conservation.

3.3 Espace de Banach généralisé

Dans cette partie, nous étudierons quelques propriétés d'espace de Banach généralisé.

Définition 3.3.1. *Un espace métrique qui est complet s'appelle espace de Banach noté $(X, \| \|)$.*

Définition 3.3.2. *Un espace métrique généralisé dans lequel chaque suite est convergente s'appelle espace de Banach généralisé.*

Définition 3.3.3. *Soit* $(X, \|.\|)$*un espace de Banach généralisé, alors le sous-ensemble* Y *de* X *s'appelle*

a) Compact si et seulement si pour toute suite d'éléments de Y *admet une sous-suite convergente dans* Y*.*

b) Fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ *d'eléments de* Y *qui converge vers un élément* $x \in X$*, alors* $x \in Y$*.*

Définition 3.3.4. *Un espace de Banach généralisé est complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

3.4 Variable aléatoire

Dans cette section, nous introduisons des notations, des définitions et des théorèmes sur les variables aléatoires qui sont utilisées tout au long de ce mémoire.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Nous équipons l'espace métrique X soit une $\sigma-$algèbre $\mathcal{B}(X)$ des sous-ensembles de Borel de X pour que $(E, \mathcal{B}(X))$ devienne un espace mesurable.

Définition 3.4.1. *Une application* $x : \Omega \to X$ *est appelée une variable aléatoire si*

$$x^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : x(\omega)B\} \subset \mathcal{A}$$

pout tout ensemble de Borel $B \subset \mathcal{B}(X)$*.*

Définition 3.4.2. *Étant donné deux espaces métriques* X *et* Y*, une application* $A : \Omega \times X \to Y$ *est appelé un opérateur aléatoire si* $\omega \to A(\omega, x)$ *est mesurable pour tout* $x \in X$*. Nous désignons également un opérateur aléatoire* A *sur* X *par*

$$A(x)(\omega) = A(\omega, x),\ \omega \in \Omega, x \in X.$$

Définition 3.4.3. *Un point fixe aléatoire de* f *est une fonction mesurable* $y : \Omega \to X$ *telle que*

$$y(w) = f(\omega, y(\omega)) \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

De façon équivalente est une sélection pour la multi-application $FixF_\omega : \Omega \to \mathcal{P}(X)$ *définit par*

$$FixF_\omega(x) = \{x \in X : x = f(\omega, x)\}.$$

Théorème 3.4.1. *Soient* (Ω, Σ) *un espace mesurable,* Y *un espace métrique séparable et* $F : \Omega \to \mathcal{P}_f(Y)$ *une multi-application qui est mesurable. Alors* F *est graph-mesurable.*

Théorème 3.4.2. *Si* $G : \Omega \to \mathcal{P}_{cp}(Y)$ *est une multi-application telle que le graphe* $\mathcal{G}r(G)$ *de* G *est mesurable, alors* G *est une selection mesurable.*

Théorème 3.4.3. *Soient* (Ω, Σ)*,* Y *un espace métrique généralisé séparable et* $F : \Omega \to \mathcal{P}_f(Y)$ *est mesurable, alors* F *est une selection mesurable.*

Théorème 3.4.4. *Soient* (Ω, Σ), Y *un espace métrique généralisé séparable. Si* $G : \Omega \to \mathcal{P}_{cp}$ *est une multi-application telle que le graphe* $\mathcal{G}r(G)$ *de* G *est mesurable, alors* G *est une selection mesurable.*

Démonstration. Soit $G_* : \Omega \to \mathcal{P}_{cp}(X)$ définie par :

$$G_*(\omega) = (h \circ G)(\omega), \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{G}r(G_*) &= \{(\omega, y) \in \Omega \times X : y \in G_*(\omega)\} \\ &= \{(\omega, y) \in \Omega \times X : y \in (h \circ G)(\omega)\} \\ &= \{(\omega, y) \in \Omega \times X : h^{-1}(y) \in G(\omega)\} \\ &= \{(\omega, z) \in \Omega \times h^{-1}(X) : z \in G(\omega)\}. \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{G}r(G_*)$ est mesurable. D'aprés le théorème 3.5.3 il existe un unique fonction mesurable $x : \Omega \to X$ telle que

$$x(\omega) \in (h \circ G_*)(\omega), \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

Alors $h^{-1} \circ x$ est une selection mesurable de la multi-application G.

Définition 3.4.4. *Un opérateur aléatoire* $f : \Omega \times X \to X$ *est dit continue en* $x_0 \in X$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ *implique* $\lim\limits_{n\to\infty} \|f(\omega, x_n) - f(\omega, x_0)\| = 0$.

Définition 3.4.5. *Soient* X *et* Y *deux espaces métriques, et* $A : \Omega \times X \to Y$ *une variable aléatoire.*

1) Un opérateur aléatoire A *est continu sur* X *si* $A(\omega, .)$ *est continu pour chaque* $\omega \in \Omega$.

2) A *est compact si pour tout sous-ensemble* $C \subset X$ *borné,* $A(\omega, C)$ *est un sous-ensemble relativement compact de* Y *pour chaque* $\omega \in \Omega$.

Soient X, Y *sont deux espaces métriques localement compacts et* $f : \Omega \times X \to Y$. *On note par* $C(X, Y)$ *l'espace des fonctions continues de* X *dans* Y.

Lemme 3.4.1. f *est une fonction de Carathédory si et seulement si* $\omega \to f(\omega)(\cdot) = f(\omega, \cdot)$ *est une fonction mesurable de* $\Omega \to C(X, Y)$.

Nous disons que $x(., .)$ est Lebesgue intégrable sur $[1, b]$ si $x : [1, b] \to \mathbb{R}^m$ est Lebesgue intégrable sur $[1, b]$ pour p.p $\omega \in \Omega$.
Soit $\alpha > 0$. Si $x : [0, b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ est le chemin de l'échantillon Lebesgue intégrable sur $[0, b]$ alors nous pouvons considérer l'intégrale fractionnaire

$$I^\alpha x(t, \omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} x(s, \omega) ds,$$

et si $x : [1, b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$

$$J^\alpha x(t, \omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (\ln \frac{t}{s})^{\alpha - 1} x(s, \omega) ds,$$

qui sera appelée l'intégrale fractionnelle de chemin d'échantillon de x, où Γ est la Fonction gamma d' Euler.

Remarque 3.4.1. *Si* $x(\cdot,\omega) : [0,b] \to \mathbb{R}^m$ *(resp* $x(\cdot,\omega) : [1,b] \to \mathbb{R}^m$*) est Lebesgue intégrable sur* $[0,b]$ *(resp* $[1,b]$*) pour chaque* $\omega \in \Omega$*, alors* $t \mapsto I^\alpha x(t,\omega)$ *(resp* $t \mapsto J^\alpha x(t,\omega)$*) est aussi Lebesgue intégrable sur* $[0,b]$ *(resp* $[1,b]$*) pour chaque* $\omega \in \Omega$*.*

Définition 3.4.6. *On dit qu'une fonction* $x : [0,b] \to \mathbb{R}^m$ *est une fonction de Carathéodory si* $t \mapsto x(t,\omega)$ *est continue pour p.p.* $\omega \in \Omega$ *et* $\omega \mapsto x(t,\omega)$ *est mesurable pour chaque* $t \in [1,b]$*, nous rappelons qu'une fonction Carathéodory est une fonction mesurable.*

Proposition 3.4.1. *Si* $x : [0,b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *est une fonction de Carathéodory, alors la fonction* $(t,\omega) \mapsto I^\alpha x(t,\omega)$ *est aussi une fonction de Carathéodory.*

Proposition 3.4.2. *Si* $x : [1,b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *est une fonction de Carathéodory, alors la fonction* $(t,\omega) \mapsto J^\alpha x(t,\omega)$ *est aussi une fonction de Carathéodory.*

Proposition 3.4.3. *Si* $x : [0,b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *admet une dérivée en* $t \in [0,b]$ *est absolument continu sur* $[0,b]$ *(c'est-à-dire que* $t \mapsto x(t,\omega)$ *est absolument continu sur* $[0,b]$ *pour p.p.* $\omega \in \Omega$*), alors la dérivée* $x'(t,\omega)$ *existe pour* $\lambda - p.p.t \in [0,b]$*.*

Proposition 3.4.4. *Si* $x : [1,b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *admet une dérivée en* $t \in [1,b]$ *comme une application absolument continu sur* $[1,b]$ *(c'est-à-dire que* $t \mapsto x(t,\omega)$ *est absolument continu sur* $[1,b]$ *pour p.p.* $\omega \in \Omega$*), alors la dérivée* $x'(t,\omega)$ *existe pour* $\lambda - p.p.t \in [1,b]$*.*

Définition 3.4.7. *Soient* $x : [0,b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *est une application absolument continu sur* $[0,b]$ *et* $\alpha \in (0,1]$*. Alors, pour* $\lambda - p.p.t \in [0,b]$ *et pour* $p.p.\omega \in \Omega$*, nous définissons la dérivée fractionnaire de Caputo de* x *par*

$$D^\alpha x(t,\omega) = I^{1-\alpha} x(t,\omega) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} x'(s,\omega) ds. \tag{3.3}$$

Proposition 3.4.5. *Si* $x : [0,b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *est une fonction de Carathédory alors*

$$D^\alpha I^\alpha x(t,\omega) = x(t,\omega) \tag{3.4}$$

pour tout $t \in [0,b]$ *et p.p.* $\omega \in \Omega$*.*

Proposition 3.4.6. *Si* $x : [0,b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *est une application absolument continu sur* $[0,b]$ *alors*

$$I^\alpha D^\alpha x(t,\omega) = x(t,\omega) - x(0,\omega) \tag{3.5}$$

pour tout $t \in [0,b]$ *et p.p.* $\omega \in \Omega$*.*

Proposition 3.4.7. *Si* $x : [1,b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ *est une application absolument continu sur* $[1,b]$ *alors*

$$J^\alpha D^\alpha x(t,\omega) = x(t,\omega) - x(0,\omega) \tag{3.6}$$

pour tout $t \in [1,b]$ *et p.p.* $\omega \in \Omega$*.*

À la fin de cette section, nous présentons $E_{\alpha,\beta}$ est la fonction spéciale Mittag-Leffler généralisée définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Upsilon \frac{\lambda^{\alpha-\beta} e^\lambda}{\lambda^\alpha - z} d\lambda.$$

3.5 Théorie du point fixe aléatoire

Dans cette section, nous donnons les versions aléatoires des théorèmes des points fixes de Pervo, Schauder et Krasnosel'skki dans un espace métrique généralisé.

Théorème 3.5.1. *[46] Soient* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est un espace mesurable,* X *un espace de Banach généralisé séparable réel et* $F : \Omega \times X \to X$ *un opérateur aléatoire continue, et soit* $M(\omega) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}^+)$ *est une matrice de variables aléatoires telles que pour tout matrice* $\omega \in \Omega$*,* $M(\omega)$ *converge vers 0 p.p et*

$$d(F(\omega, x_1), F(\omega, x_2)) \leq M(\omega) d(x_1, x_2) \text{ pour tout } x_1, x_2 \in X, \omega \in \Omega.$$

Alors il existe une variable aléatoire $x : \Omega \to X$ *qui est le point fixe aléatoire unique de* F*.*

Théorème 3.5.2. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace de probabilité,* X *un espace métrique généralisé séparable réel et* $T : \Omega \times X \to X$ *un opérateur aléatoire continue, et soit* $M(\omega) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}^+$ *une variable aléatoire matricielle réelle non négative telle que* $\rho(M(\omega)) < 1$ *p.p et*

$$\|T(\omega, x_1) - T(\omega, x_2|\| \leq M(\omega)\|x_1 - x_2\| \text{ pour tout } x_1, x_2 \in X, \omega \in \Omega.$$

Alors il existe une variable aléatoire $y : \Omega \to X$ *qui est le point unique de* T*.*

Démonstration.
Soit $E = \{\omega \in \Omega : d(F(\omega, x_1), F(\omega, x_2)) \leq M(\omega)d(x_1, x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in X\}$, avec $\mu(E) = 1$. nous avons pour chaque $\omega \in E$ fixe, il existe des un unique $x(\omega) \in X$ tel que $F(\omega, x(\omega)) = x(\omega)$. Soit $y : \Omega \to X$ toute fonction mesurable arbitraire, nous définissons $(x_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}, x_0(\omega) = y(\omega)$ par

$$x_n(\omega) = F(\omega, F^{n-1}(\omega, y(\omega)), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

on a

$$d(x_n(\omega), x_{n+k}(\omega)) \leq (M^k(\omega) + ...M^{n+k}(\omega))d(x_0(\omega), x_1(\omega)).$$

donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Alors il existe une variable aléatoire $y_* : \Omega \to X$ telle que

$$d(x_n(\omega), y_*(\omega)) \to 0 \ \text{ quand } n \to \infty.$$

Donc

$$d(y_*(\omega), F(\omega, y_*(\omega)) \leq d(y_*(\omega), x_n(\omega)) + M(\omega)d(x_n(\omega), y_*(\omega)) \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Alors

$$y_*(\omega) = F(\omega, y_*(\omega)) \text{ pour chaque } \omega \in E,$$

ainsi

$$y_*(\omega) = x(\omega), \ \omega \in E.$$

Théorème 3.5.3. *[46]* ***(Théorème de Pervo)***
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace de probabilité,* X *un espace de Banach généralisé séparable réel et* $F : \Omega \times X \to X$ *un opérateur aléatoire continue, et soit* $M(\omega) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}^+)$ *est une matrice des variables aléatoires telles que* $M(\omega)$ *converge vers 0 p.p et*

$$d(F(\omega, x_1), F(\omega, x_2)) \leq M(\omega) d(x_1, x_2) \text{ pour tout } x_1, x_2 \in X, \omega \in \Omega.$$

Alors il existe une variable aléatoire $x : \Omega \to X$ *qui est le point fixe aléatoire unique de* F*.*

Théorème 3.5.4. *Soit $T : \Omega \times X \to X$ est un opérateur aléatoire presque sûrement continu.*
Supposons qu'il existe $M(\omega) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}_+)$ une matrice a des variables aléatoires telle que

$$\mu(\{\omega : \|T(\omega, x_1) - T(\omega, x_2)\| \leq M(\omega)\|x - y\|\}) = 1.$$

Puis pour tout réel $\lambda \neq 0$ tel que $\rho(M(\omega)) < |\lambda|$ et

$$\mu\{\omega \in \Omega : \rho(M(\omega)) < |\lambda|\} = 1.$$

Il existe un opérateur aléatoire S c'est l'inverse de l'opérateur aléatoire $(T(\omega, .) - \lambda I)$, I_X désigner l'opérateur d'identité.

Théorème 3.5.5. ***(Théorème de Schauder)***
Soient X un espace de Banach généralisé séparable, C un sous-ensemble convexe fermé séparable de X et $F : \Omega \times C \to C$ un opérateur aléatoire continu. Supposons que pour tout $\omega \in \Omega$, $F(\omega, C)$ est compact. Alors il existe un point fixe aléatoire $x : \Omega \to C$ de F.

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega$. On considère l'opérateur $F(\omega, .) : C \to C$ définit par

$$F_\omega(x) = F(\omega, x),\ x \in X.$$

On définie $\widetilde{F}_* : \Omega \to \mathcal{P}(\widetilde{X})$ par

$$\widetilde{F}_*(\omega) = \{(x, x, \dots, x) \in X : (x, \dots, x) = h \circ F(\omega, h^{-1}(x))\}$$

avec $h : X \to \widetilde{X}$ définie par

$$h(x) = (x, \dots, x),\ x \in X.$$

et

$$\widetilde{X} = \{(x, \dots, x) \in \prod_{i=1}^{n} X_i : x \in X, i = 1, ..., n\}.$$

Est un espace de Banach avec la norme suivante

$$||x|| = \sum_{i=1}^{n} ||x||_i, \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Comme h est une l'homéomorphisme

$$\widetilde{F}_*(\omega) \in \mathcal{P}_f(\widetilde{X}) \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

Puisque pour chaque $\omega \in \Omega$, $F(\omega, C)$ est compact, alors

$$\widetilde{F}_*(\omega) \in \mathcal{P}_f(\widetilde{C}) \text{ pour tout } \omega \in \Omega,$$

avec

$$\widetilde{C} = \{(x, ..., x) : x \in C\}.$$

Soit K un sous-ensemble fermés non vides de C, alors

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{F}_*^{-1}(K) & = & \{\omega \in \Omega : \widetilde{F}_*(\omega) \cap K \neq \emptyset\} \\ & = & \cup_{x\in K}\{\omega \in \Omega : (x,...,x) = h \circ F(\omega, h^{-1}(x))\} \\ & = & \cup_{x\in C}\{\omega \in \Omega : h^{-1}(x,...,x) = F(\omega, h^{-1}(x))\} \\ & = & \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{x_i \in h^{-1}(K_m)} \{\omega \in \Omega : ||h^{-1}(x_i,...,x_i) - F(\omega, h^{-1}(x_i,...,x_i))|| < \epsilon_m\}\end{array}$$

avec

$$\epsilon_m := \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ \vdots \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} \text{ et } K_n = \{(x,...,x) \in \widetilde{C} : d((x,...,x), K) < \frac{1}{m}\}.$$

Alors

$$\widetilde{F}_*^{-1}(K) = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{x_i \in h^{-1}(K_m)} F^{-1}(B(x_i, \epsilon_m), x_i) \in \mathcal{F}.$$

Ensuite, à partir du théorème 3.5.3, il existe une fonction mesurable $x : \Omega \to C$ telle que

$$x(\omega) = F(\omega, x(\omega)), \;\; \omega \in \Omega.$$

Par le résultat ci-dessus, nous présentons l'alternative non linéaire aléatoire suivante.

Théorème 3.5.6. *[46] (Théorème de Leray-Schauder)*
Soit X un espace de Banach généralisé séparable et $F : \Omega \times X \to X$ un opérateur aléatoire complètement continu. Alors, ou bien
(i) L'équation aléatoire $F(\omega, x) = x$ a une solution aléatoire i.e. il y a une fonction mesurable $x : \Omega \to X$ telle que $F(\omega, x(\omega)) = x(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, ou bien
(ii) L'ensemble $\mathcal{M} = \{x : \Omega \to X$ mesurable, $\lambda(\omega)F(\omega, x) = x\}$ est non bornné pour des $x : \Omega \to X$ mesurable avec $0 < \lambda(\omega) < 1$ sur Ω.

Enfin, nous prouvons le théorème du point fixe de Krasnosel'ski aléatoire

Théorème 3.5.7. *(Théorème de Krasnosel'skki)*
Soit $C \subset X$ un sous-ensemble convexe compact et non vide d'un espace métrique généralisé séparable X. supposons que T et B sont deux opérateurs aléatoires $\Omega \times C \longrightarrow X$ tels que :
$(\mathcal{A}_1)$ T est un opérateur aléatoire continu,compact.
$(\mathcal{A}_2)$ B est un opérateur aléatoire continu et $M(\omega)$ un opérateur de contraction
$(\mathcal{A}_3)$ $(I - M)^{-1}|I - M| \leq I$.
$(\mathcal{A}_4)$ $B(\omega, C) + T(\omega, C) \subset C$, $\omega \in \Omega$.
Alors $B + T$ a au moins un point fixe aléatoire.

Démonstration. Soient $\omega \in \Omega, y \in C$ et $F_y : C \to C$ définit par

$$F_{\omega,y}(x) = B(\omega, x) + T(\omega, y).$$

D'aprés le théorème 3.5.3 il existe un point fixe unique de $F_{\omega,y}(\cdot)$ et $(I - B(\omega, \cdot))^{-1}$ existe. Nous définissons l'opérateur $N_\omega : C \to C$ par $N_\omega(y) = (I - B(\omega, \cdot))^{-1}T(\omega, y)$. Il est facile de voir par le théorème du point fixe de Schauder que N_ω a au moins un point fixe. On définit une application $S : \Omega \to \mathcal{P}(C)$ par

$$S(\omega) = \{y \in C : y = B(\omega, y) + T(\omega, y)\}.$$

Soit K un sous ensemble fermé de C avec

$$\begin{aligned} S^{-}(K) &= \{\omega \in \Omega : S(\omega) \cap K \neq \emptyset\} \\ &= \{\omega \in \Omega : y = B(\omega, y) + T(\omega, y),\ y \in K\}. \end{aligned}$$

puisque X est un espace métrique généralisé séparable il existe $\{y_i : i \in \mathbb{N}\} \subset K$ tel que

$$\overline{\{y_i : i \in \mathbb{N}\}} = K.$$

Par conséquent

$$S^{-}(K) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \|y_i - B(\omega, y_i) - T(\omega, y_i)\| < \epsilon_n\},$$

où

$$\epsilon_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}, \qquad (x, y) \in X \times X.$$

Donc $S^{-1}(K)$ est mesurable. Puisque $B(\omega, \cdot) + T(\omega, \cdot)$ est une application continu, alors pour tout $\omega \in \Omega, S(\omega) \in \mathcal{P}_{cl}(C)$. Il existe $y : \Omega \to C$ une sélection mesurable de S qui est un point fixe aléatoire de $B + T$. Le corollaire suivant est une conséquense du théorème (3.5.7).

Corollaire 3.5.1. *Soit X un espace métrique généralisé séparable. supposons que T et B sont deux opérateurs aléatoires $\Omega \times X \to X$ tels que :*
$(\overline{\mathcal{A}}_1)$ T est un opérateur aléatoire continu et compact.
$(\overline{\mathcal{A}}_2)$ B est un opérateur aléatoire continu et $M(\omega)$ un opérateur de contraction
$(\overline{\mathcal{A}}_3)$ $(I - M)^{-1}|I - M| \leq I$.
Si

$$\mathcal{M} = \{x : \Omega \to X \text{ est mesurable} ;\ \lambda(\omega)T(\omega, x) + \lambda(\omega)B(\frac{x}{\lambda(\omega)}, \omega) = x(\omega)\}$$

est borné pour tout $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable avec $0 < \lambda(\omega) < 1$ sur Ω. Alors l'équation aléatoire

$$x = T(\omega, x) + B(\omega, x),\ x \in X$$

a au moins une solution.

Chapitre 4

Systèmes d'équations différentielles fractionnaires aléatoires

On considère le système d'equation différentielles fractionnaires aléatoires :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t,\omega) &=& f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\alpha<1, t\in[0,b], \\ {}^cD^{\beta}y(t,\omega) &=& g(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\beta<1, t\in[0,b], \\ x(0,\omega) &=& x_0(\omega), \omega\in\Omega, \\ y(0,\omega) &=& y_0(\omega), \omega\in\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $f, g : [0,b]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\Omega\to\mathbb{R}^m$, $(\Omega,\mathcal{A})$ est un espace mesurable et $x_0, y_0 : \Omega\to\mathbb{R}^m$ sont des variables aléatoires. ${}^cD^{\alpha}x$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de $x(t,\omega)$ par rapport à la variable t, avec $b>0$.

4.1 Existence et Unicité

Définition 4.1.1. *Une fonction $f : [0,b]\times\mathbb{R}^m\times\Omega\to\mathbb{R}^m$ est dite opérateur aléatoire de Carathéodory si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) l'application $(t,\omega)\to f(t,x,\omega)$ est conjointement mesurable pour tout $x\in\mathbb{R}^m$,

(ii) l'application $x\to f(t,x,\omega)$ est continue pour tout $t\in[0,b]$ et $\omega\in\Omega$.

Définition 4.1.2. *La fonction de Carathéodory $f : [0,b]\times\mathbb{R}^m\times\Omega\to\mathbb{R}^m$ est dite L^1-Carathéodory aléatoire si pour chaque nombre réel $r>0$ il existe une fonction mesurable et bornée $h_r\in L^1([0,b],\mathbb{R}_+)$ tel que*

$$\|f(t,x,\omega)\|\le h_r(t,\omega),\ \ p.p.\ t\in[0,b]$$

pour tout $\omega\in\Omega$ et $x\in\mathbb{R}$ avec $\|x\|\le r$.

Lemme 4.1.1. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}x(t,\omega) &=& f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\alpha<1 \\ x(0,\omega) &=& x_0(\omega), \omega\in\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

où $(t,\omega)\mapsto f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)$ une fonction mesurable et $t\longmapsto f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)$ est Lebesgue intégrable sur $[0,b]$ pour p.p $\omega\in\Omega$, alors la fonction $x : [0,b]\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ est une solution du problème (4.2) si et seulement si

$$x(t,\omega) = x_0(\omega)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)ds,$$

pour tout $t \in [0,b]$*et pour p.p* $\omega \in \Omega, 0 < \alpha < 1$.

Démonstration. Nous avons

$$^cD^\alpha x(t,\omega) = f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega).$$

Nous appliquons l'opérateur (I^α) [1] aux deux membre précedent,

$$I^{\alpha c}D^\alpha x(t,\omega) = I^\alpha f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega).$$

D'aprés la proposition 3.4.6, nous obtenons

$$I^{\alpha c}D^\alpha x(t,\omega) = x(t,\omega) - x(0,\omega).$$

Donc

$$x(t,\omega) - x(0,\omega) = I^\alpha f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega).$$

Et par la définition de I^α, nous avons :

$$x(t,\omega) - x(0,\omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x(s,\omega)ds.$$

Par conséquent

$$x(t,\omega) = x(0,\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x(s,\omega)ds.$$

Alors

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha}f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)ds.$$

De même, nous obtenons

$$y(t,\omega) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}g(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)ds.$$

Nous rappelons le lemme de Gronwall pour les noyaux singuliers.

Lemme 4.1.2. *[21] Soient* $v : [0,b] \to [0,\infty)$ *est une fonction réelle et* $w(.)$ *est une fonction non négatif localement intégrable sur* $[0,b]$. *Supposons qu'il existe des constantes* $a > 0$ *et* $0 < \gamma < 1$ *telles que*

$$v(t) \leq w(t) + a\int_0^t \frac{v(s)}{(t-s)^\gamma}ds,$$

alors, il existe une constante $K = K(\beta)$ *telle que*

$$v(t) \leq w(t) + Ka\int_0^t \frac{w(s)}{(t-s)^\gamma}ds, \text{ pour tout } t \in [0,b].$$

[1] est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'odre α.

Théorème 4.1.1. *Soient X un espace topologique compact et Y un espace métrique. Soit A une partie bornée de $C(X,Y)$ telle que*

i) A est équicontinue,

ii) pour tout x dans X, l'ensemble $A(x) = \{f(x) : f \in A\}$ est relativement compacte dans Y.
Alors A est relativement compacte dans $C(X,Y)$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Notre premier résultat principal est l'existence et l'unicité de la solution aléatoire du problème (4.1).

Théorème 4.1.2. *Soient $f, g : [0,b]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\Omega \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions de Carathédory. Supposons que la condition suivante est vérifiée*
$(\mathcal{H}_1)$: Il existe $p_1, p_2, p_3, p_4 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ sont des variables aléatoires telles que

$$\|f(t,x,y,\omega) - f(t,\widetilde{x},\widetilde{y},\omega)\| \leq p_1(\omega)\|x-\widetilde{x}\| + p_2(\omega)\|y-\widetilde{y}\|, \forall x, y, \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^m,$$

et

$$\|g(t,x,y,\omega) - g(t,\widetilde{x},\widetilde{y},\omega)\| \leq p_3(\omega)\|x-\widetilde{x}\| + p_4(\omega)\|y-\widetilde{y}\|, \forall x, y, \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^m.$$

Si pour chaque $\omega \in \Omega$, $\widetilde{M}(\omega)$ converge vers 0, où

$$\widetilde{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \dfrac{b^\alpha p_1(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)} & \dfrac{b^\alpha p_2(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \dfrac{b^\beta p_3(\omega)}{\Gamma(\beta+1)} & \dfrac{b^\beta p_4(\omega)}{\Gamma(\beta+1)} \end{pmatrix}.$$

Alors le problème (4.1) admet une solution aléatoire unique.

Démonstration. Considérons pour tout $\omega \in \Omega$ l'opérateur
$N : C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m) \to C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m)$,

$$(x(t,\omega), y(t,\omega)) \mapsto (N_1(t, x(t,\omega), y(t,\omega)), N_2(t, x(t,\omega), y(t,\omega))), \text{ où}$$

$$N_1(x(t,\omega), y(t,\omega)) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega)ds,$$

et

$$N_2(x(t,\omega), y(t,\omega)) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega)ds.$$

D'abord nous prouvons que N est un opérateur aléatoire sur $C([0,b],\mathbb{R}^m)\times C([0,b],\mathbb{R}^m)$. Puisque f et g sont des fonctions de Carathédory, alors $f \to (t,x,y,\omega)$ et $g \to (t,x,y,\omega)$ sont des applications mesurables et d'aprés la proposition 3.4.1 nous avons conclu que les applications

$$\omega \to N_1(x(t,\omega), y(t,\omega)), \quad \omega \to N_2(x(t,\omega), y(t,\omega)).$$

sont mesurables. En conséquence, N est un opérateur aléatoire de $C([0,b],\mathbb{R}^m)\times C([0,b],\mathbb{R}^m)$ dans $C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

En suite nous prouvons que N satisfait toutes les conditions du théorème 3.5.3 sur $C([0,b],\mathbb{R}^m)\times C([0,b],\mathbb{R}^m)$.
Soient $(x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\in C([0,b],\mathbb{R}^m)\times C([0,b],\mathbb{R}^m)$, alors

$$\begin{aligned}\|N_1(x(t,\omega),y(t,\omega))-N_1(\widetilde{x}(t,\omega),\widetilde{y}(t,\omega))\| &= \Big\|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\\ &\quad -f(t,\widetilde{x}(s,\omega),\widetilde{y}(s,\omega),\omega))ds\|\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\\ &\quad -f(t,\widetilde{x}(s,\omega),\widetilde{y}(s,\omega),\omega)\|ds\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p_1(\omega)\|\ x(s,\omega)-\widetilde{x}(s,\omega)\|ds\\ &\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}p_2(\omega)\|\ y(s,\omega)-\widetilde{y}(s,\omega)ds\|\\ &\le \frac{p_1(\omega)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|\ x(.,\omega)-\widetilde{x}(.,\omega)\|_\infty\\ &\quad +\frac{p_2(\omega)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|\ y(.,\omega)-\widetilde{y}(.,\omega)\|_\infty.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|N_1(x(.,\omega),y(.,\omega))-N_1(.,\widetilde{x}(.,\omega),\widetilde{y}(.,\omega))\|_\infty &\le \|x-\widetilde{x}\|_\infty p_1(\omega)\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\\ &\quad +\|y-\widetilde{y}\|_\infty p_2(\omega)\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

De même, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|N_2(x(.,\omega),y(.,\omega))-N_2(\widetilde{x}(.,\omega),\widetilde{y}(.,\omega))\|_\infty &\le \|x-\widetilde{x}\|_\infty p_3(\omega)\frac{b^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\\ &\quad +\|y-\widetilde{y}\|_\infty p_4(\omega)\tfrac{b^\beta}{\Gamma(\beta+1)}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$d(N(x(.,\omega),y(.,\omega)),N(\widetilde{x}(.,\omega),\widetilde{y}(.,\omega)))\le \widetilde{M}(\omega)d((x(.,\omega),y(.,\omega)),(\widetilde{x}(.,\omega),\widetilde{y}(.,\omega))),$$

où

$$d(x,y)=\begin{pmatrix}\|x(.,\omega)-y(.,\omega)\|_\infty\\ \|x(.,\omega)-y(.,\omega)\|_\infty\end{pmatrix}.$$

et

$$\widetilde{M}(\omega)=\begin{pmatrix}\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}p_1(\omega) & \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}p_2(\omega)\\ \frac{b^\beta}{\Gamma(\beta+1)}p_3(\omega) & \frac{b^\beta}{\Gamma(\beta+1)}p_4(\omega)\end{pmatrix}.$$

Puisque pour chaque $\omega\in\Omega$, $\widetilde{M}(\omega)\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}_+)$ converge vers 0, alors du théorème 3.5.1 le problème (4.1) admet une solution aléatoire unique.

Ensuite, nous présentons un résultat d'existence sans conditions de Lipschitz. Nous considérons les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_2)$ Pour chaque $\omega \in \Omega$, les deux fonctions $f(.,.,.,\omega)$ et $g(.,.,.,\omega)$ sont continues et $\omega \to f(.,.,.,\omega)$, $\omega \to g(.,.,.,\omega)$ sont mesurables.
$(\mathcal{H}_3)$ Il existe $\gamma_1, \gamma_2 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions mesurabes et bornées telles que

$$\| f(t,x,y,\omega) \| \leq \gamma_1(\omega)(\|x\| + \|y\|), \| g(t,x,y,\omega) \| \leq \gamma_2(\omega)(\|x\| + \|y\|),$$

pour tout $t \in [0,b], \omega \in \Omega$ et $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Maintenant, nous prouvons le résultat d'existence du problème (4.1) en utilisant le théorème de point fixe aléatoire de Leary-Schauder dans l'espace de Banach généralisé.

Théorème 4.1.3. *Supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_2)$ et $(\mathcal{H}_3)$ sont vérifiées. Alors le problème (4.1) admet une solution aléatoire unique défini sur $[0,b]$. De plus l'ensemble des solutions*

$$S(x_0,y_0) = \{(x,y) : \Omega \to C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m) : (x(.,\omega), y(.,\omega)) \text{ solution du (4.1)}\}$$

est compact.

Démonstration. Soit pour tout $\omega \in \Omega$, $N : C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m) \to C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m)$. un opérateur aléatoire (nous avons déjà défini dans le théorème 4.1.2).

Afin d'appliquer le théorème 3.5.6 nous prouvons d'abord que N est complètement continu. La preuve sera donnée dans plusieurs étapes :

- **Etape 1 :** Montrons pour tout $\omega \in \Omega$, $N(.,.) = (N_1(.,.), N_2(.,.))$ est continu.
  Soit (x_n, y_n) une suite telle que $(x_n, y_n) \to (x,y) \in C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m)$ quand $n \to \infty$. Alors

$$\begin{aligned} \|N_1(x_n(.,\omega), y_n(.,\omega)) - N_1(x(.,\omega), y(.,\omega))\|_\infty &\leq \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(., x_n(.,\omega), y_n(.,\omega), \omega) \\ &\quad - f(., x(.,\omega), y(.,\omega), \omega)\|_\infty. \end{aligned}$$

  Comme f est une fonction continue, alors

$$\|N_1(x_n(.,\omega), y_n(.,\omega)) - N_1(x(.,\omega), y(.,\omega))\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

  De même

$$\begin{aligned} \|N_2(x_n(.,\omega), y_n(.,\omega)) - N_2(x(.,\omega), y(.,\omega))\|_\infty &\leq \frac{b^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \|g(., x_n(.,\omega), y_n(.,\omega)) \\ &\quad - g(., x(.,\omega), y(.,\omega))\|_\infty. \end{aligned}$$

  Donc

$$\|N_2(x_n(.,\omega), y_n(.,\omega)) - N_2(x(.,\omega), y(.,\omega))\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

  Alors N est continu.

- **Etape 2 :** Montrons que l'image de tout ensemble borné pour N est un ensemble borné dans $C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m)$.
  En effet : il suffit de montrer que pour tout $q > 0$, il existe une constante positive

ℓ, telle que pour tout $(x,y) \in B_q = \{(x,y) \in C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m) : \|x\|_\infty \leq q, \|y\|_\infty \leq q\}$, nous avons :

$$\|N(x,y,\omega)\|_\infty \leq \ell = (\ell_1,\ell_2),$$

pour tout $t \in [0.b], \omega \in \Omega$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\|N_1(x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)\| &= \|x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)ds\| \\ &\leq \|x_0(\omega)\| + \frac{\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^b \|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|ds.\end{aligned}$$

Par $(\mathcal{H}_3)$, nous obtenons

$$\|N_1(x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)\| \leq \|x_0(\omega)\| + \frac{2b^\alpha q}{\alpha+1}\gamma_1(\omega) := \ell_1.$$

De même, nous avons

$$\|N_2(x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)\| \leq \|y_0(w)\| + \frac{2b^\beta q}{\beta+1}\gamma_2(\omega) := \ell_2.$$

- **Etape 3 :** Montrons que l'image de tout ensemble borné pour N est un ensemble equicontinu dans $C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m)$.
  Considérons pour cela l'ensemble borné B_q dans l'etape 2 et montrons que $N(B_q)$ equicontinu
  Soient $r_1, r_2 \in J, r_1 < r_2$, et $(x,y) \in B_q$, alors

$$\begin{aligned}\|N_1(x(r_2,\omega),y(r_2,\omega)) - N_1(x(r_1,\omega),y(r_1,\omega))\| \quad \leq \quad & \frac{2q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{r_1}^{r_2}(r_2-s)^{\alpha-1}ds\right. \\ & \left. + \int_0^{r_1}(r_1-s)^{\alpha-1} - (r_2-s)^{\alpha-1}ds\right].\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|N_1(x(r_2,\omega),y(r_2,\omega)) - N_1(x(r_1,\omega),y(r_1,\omega))\| \leq \frac{4q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)}(r_2-r_1)^\alpha \to 0.$$

et

$$\|N_2(x(r_2,\omega),y(r_2,\omega)) - N_2(x(r_1,\omega),y(r_1,\omega))\| \leq \frac{4q\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta+1)}(r_2-r_1)^\beta \to 0.$$

Quand $|r_2 - r_1| \to 0$,le membre droit de deux inégalités précédentes tendent vers 0, d'où la continuité de N.
D'aprés les étapes 1 à 3 et le théorème d' Azela-Ascoli : $N(B_q)$ est relativement compact pour tout borné B_q, c'est-à-dire N est complètement continu.
Par conséquent
$N : C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m) \times \Omega \to C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m)$. est continu et complètement continu.

- **Etape 4 :** Maintenant, il reste à montrer que

$$\mathcal{A}(\omega) = \{(x(.,\omega), y(.,\omega)) \in C([0,b],\mathbb{R}^m) \times C([0,b],\mathbb{R}^m) :$$
$$(x(.,\omega), y(.,\omega)) = \lambda(\omega)N(x(.,\omega), y(.,\omega),\omega),\, \lambda(\omega) \in (0,1)\} \text{ est borné.}$$

Soit $(x,y) \in \mathcal{A}$. Donc $x = \lambda(w)N_1(x,y)$ et $y = \lambda(\omega)N_2(x,y)$ pour tout $0 < \lambda < 1$. Alors pour chaque $t \in [0,1]$, nous avons

$$x(t,\omega) = \lambda(\omega)\left[x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s,\omega), y(s,\omega),\omega)ds\right]$$

$$\begin{aligned}\|x(t,\omega)\| &\leq \|\lambda(\omega)\|\|x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s,\omega), y(s,\omega),\omega)ds\| \\ &\leq \|x_0(w)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s, x(s,\omega), y(s,\omega),\omega)\|ds.\end{aligned}$$

D'aprés $(\mathcal{H}_3)$

$$\|x(t,\omega)\| \leq \|x_0(\omega)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \gamma_1(\omega)(t-s)^{\alpha-1}(\|x(s,\omega)\| + \|y(s,\omega)\|)ds.$$

Par conséquent

$$\|x(t,\omega)\| \leq \|x_0(\omega)\| + \frac{\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}(\|x(s,\omega)\| + \|y(s,\omega)\|)ds.$$

et

$$\|y(t,\omega)\| \leq \|y_0(\omega)\| + \frac{\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}(\|x(s,\omega)\| + \|y(s,\omega)\|)ds.$$

Donc

$$\|x(t,\omega)\| + \|y(t,\omega)\| \leq c + \left[\frac{\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta)}\right]\int_0^t (t-s)^{\min(\alpha,\beta)-1}(\|x(s,\omega)\| + \|y(s,\omega)\|)ds,$$

or

$$c = \|x_0(\omega)\| + \|y_0(\omega)\|$$

par lemme 4.1.2 de Gronwall, il existe $K(\min(\alpha,\beta)) > 0$ tel que

$$\|x(t,\omega)\| + \|y(t,\omega)\| \leq c + c\left(\frac{\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta)}\right)\int_0^t (t-s)^{\min(\alpha,\beta)-1}ds, \text{ pour tout } t \in [0.b].$$

Alors

$$\|x(t,\omega)\|_\infty + \|y(t,\omega)\|_\infty \leq c + cb^{\min(\alpha,\beta)-1}\left(\frac{\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta)}\right) := K_*.$$

Ce qui implique

$$\|x\|_\infty \leq K_* \quad \text{et} \quad \|y\|_\infty \leq K_*.$$

Cela montrer que $\mathcal{A}$ est borné.
Comme une conséquence du théorème 3.5.6, on déduit que N admet un point fixe aléatoire $\omega \to (x(.,\omega), y(.,\omega))$ qui est une solution du problème (4.1).

- **Etape 5 :** Compacité de l'ensemble des solutions
  Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S(x_0, y_0)$ est une suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $\omega \in \Omega$ fixé, nous obtenons

$$x_n(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x_n(s,\omega), y_n(s,\omega), \omega) ds, t \in [0,b],$$

et

$$y_n(t,\omega) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s, x_n(s,\omega), y_n(s,\omega), \omega) ds, t \in [0,b].$$

Comme dans l'étapes 2 et 3, nous pouvons prouver que la sous suite $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers certain $(x(.,\omega), y(.,\omega)) \in C([0,b], \mathbb{R}^m) \times C([0,b], \mathbb{R}^m)$, tel que

$$\omega \to x(t,\omega), \quad \omega \to y(t,\omega)$$

sont des fonctions mesurables.
Puisque $f(.,.,.,\omega)$ et $g(.,.,.,\omega)$ sont des fonctions continues, donc

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) ds, t \in [0,b],$$

et

$$y(t,\omega) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} g(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) ds, t \in [0,b].$$

Alors $S(x_0, y_0)$ est compact.

Chapitre 5

Équations différentielles avec la dérivée fractionnaire d'Hadamard

Nous considérons le système d'equations différentielles fractionnaires de type Caputo-Hadamard

$$\begin{cases} {}^{CH}D^{\alpha}x(t,\omega) &=& f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\alpha<1, t\in[0,b], \\ {}^{CH}D^{\beta}y(t,\omega) &=& g(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\beta<1, t\in[0,b], \\ x(0,\omega) &=& x_0(\omega), \omega\in\Omega, \\ y(0,\omega) &=& y_0(\omega), \omega\in\Omega \end{cases} \tag{5.1}$$

où $f,g:[0,b]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\Omega\to\mathbb{R}^m$, $(\Omega,\mathcal{F})$ est un espace mesurable et $x_0,y_0:\Omega\to\mathbb{R}^m$ sont des variables aléatoires. ${}^{CH}D^{\alpha}x$ est la derivée fractionnaire au sens de Caputo-Hadamard modifié.

5.1 Existence et unicité

Dans cette section, nous prouvons les résultats d'existence et la compacité de l'ensemble des solutions. Notons d'abord que si $x,y:\Omega\to C([1,b],\mathbb{R}^m)$ sont des fonctions satisfaisant le système (5.1), alors

$$\begin{cases} x(t,\omega) &=& x_0(\omega)+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\frac{ds}{s}, \quad t\in[1,b], \\ y(t,\omega) &=& y_0(\omega)+\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-1}g(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\frac{ds}{s}, \quad t\in[1,b]. \end{cases}$$

Lemme 5.1.1. *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{CH}D^{\alpha}x(t,\omega) &=& f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega), 0<\alpha<1 \\ x(0,\omega) &=& x_0(\omega), \omega\in\Omega \end{cases} \tag{5.2}$$

Si $(t,\omega)\mapsto f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)$ est mesurable et $t\longmapsto f(t,x(t,\omega),y(t,\omega),\omega)$ est Lebesgue intégrable sur $[1,b]$ pour p.p $\omega\in\Omega$, alors la fonction $x:[1,b]\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^m$ est une solution du problème (5.2) si et seulement si

$$x(t,\omega)=x_0(\omega)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\frac{ds}{s},$$

pour tout $t\in[1,b]$ et pour p.p $\omega\in\Omega, 0<\alpha<1$.

Démonstration. Nous avons

$$^{CH}D^{\alpha}x(t,\omega) = f(t, x(t,\omega), y(t,\omega), \omega).$$

Nous appliquons l'opérateur (J^{α}) [1] aux deux membre précédent,

$$J^{\alpha CH}D^{\alpha}x(t,\omega) = J^{\alpha}f(t, x(t,\omega), y(s,\omega), \omega).$$

De la proposition 3.4.7, nous obtenons

$$J^{\alpha CH}D^{\alpha}x(t,\omega) = x(t,\omega) - x(0,\omega).$$

Alors

$$x(t,\omega) - x(0,\omega) = J^{\alpha}f(t, x(t,\omega), y(t,\omega), \omega),$$

de la définition de J^{α}, nous avons

$$x(t,\omega) - x(0,\omega) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega)\frac{ds}{s}.$$

Par conséquent

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega)\frac{ds}{s}.$$

Nous rappelons le lemme de Gronwall pour les noyaux singuliers.

Lemme 5.1.2. *[29] Soient $v, a, \bar{a} : [1,b] \to [0,\infty)$ sont des fonctions continues. Si pour tout $t \in [1,b]$,*

$$v(t) \leq a(t) + \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{v(s)}{s}ds,$$

alors, il existe une constante $K = K(\beta)$ telle que

$$v(t) \leq a(t) + \bar{a}(t) \int_1^t \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\bar{a}(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(k\alpha)} \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} a(s)\right] \frac{ds}{s},$$

pour tout $t \in [1,b]$.

Notre premier résultat principal est l'existence et l'unicité de la solution aléatoire du problème (5.1).

Théorème 5.1.1. *Soient $f, g : [1,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ sont des fonctions de Carathédory.*
Supposons que la condition suivante

(H_1) *Il existe $p_1, p_2, p_3, p_4 : \Omega \to \mathbb{R}_+$ sont des variables aléatoires telles que*

$$\|f(t,x,y,\omega) - f(t,\widetilde{x},\widetilde{y},\omega)\| \leq p_1(\omega)\|x - \widetilde{x}\| + p_2(\omega)\|y - \widetilde{y}\|, \forall x, y, \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^m,$$

et

$$\|g(t,x,y,\omega) - g(t,\widetilde{x},\widetilde{y},\omega)\| \leq p_3(\omega)\|x - \widetilde{x}\| + p_4(\omega)\|y - \widetilde{y}\|, \forall x, y, \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathbb{R}^m,$$

[1] est l'intégrale fractionnaire d'Hadamard d'odre α.

est vérifiée.
Si pour chaque $\omega \in \Omega$, $\widetilde{M}(\omega)$ converge vers 0, où

$$\widetilde{M}(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{(\ln b)^{\alpha} p_1(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)} & \frac{(\ln b)^{\alpha} p_2(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \frac{(\ln b)^{\beta} p_3(\omega)}{\Gamma(\beta+1)} & \frac{(\ln b)^{\beta} p_4(\omega)}{\Gamma(\beta+1)} \end{pmatrix}.$$

Alors le problème (5.1) admet une solution aléatoire unique.

Démonstration. Considérons pour tout $\omega \in \Omega$ l'opérateur
$N : C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m) \times \to C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$, défini par

$$(x(t,\omega), y(t,\omega)) \mapsto (N_1(x(t,\omega), y(t,\omega)), N_2(x(t,\omega), y(t,\omega))), \text{ où}$$

$$N_1(x(t,\omega), y(t,\omega)) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) \frac{ds}{s},$$

et

$$N_2(x(t,\omega), y(t,\omega)) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} g(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) \frac{ds}{s}.$$

D'abord nous prouvons que N est un opérateur aléatoire sur $C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$. Puisque f et g sont des fonctions de Carathédory, alors $\omega \to f(t,x,y,\omega)$ et $\omega \to g(t,x,y,\omega)$ sont des applications mesurables et d'aprés la proposition 3.4.2 nous concluons que les applications

$$\omega \to N_1(x(t,\omega), y(t,\omega)), \omega \to N_2(x(t,\omega), y(t,\omega)),$$

sont mesurables. Par conséquence, N est un opérateur aléatoire de $C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$ dans $C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$.

Ensuite nous prouvons que N satisfait toutes les conditions du théorème 3.5.3 sur $C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$.

Soient $(x(.,\omega), y(.,\omega)), (\widetilde{x}(.,\omega), \widetilde{y}(.,\omega)) \in C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$, alors

$$\begin{aligned} \|N_1(x(t,\omega), y(t,\omega)) - N_1(\widetilde{x}(t,\omega), \widetilde{y}(t,\omega))\| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) \right. \\ &\quad \left. - f(s, \widetilde{x}(s,\omega), \widetilde{y}(s,\omega), \omega)) \frac{ds}{s} \right\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \| f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) \\ &\quad - f(t, \widetilde{x}(s,\omega), \widetilde{y}(s,\omega), \omega) \| \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} p_1(\omega) \| \, x(s,\omega) - \widetilde{x}(s,\omega) \| \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}p_2(\omega)\|\, y(s,\omega)-\widetilde{y}(s,\omega)\|\frac{ds}{s}\\
&\leq \frac{p_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\|\, x(.,\omega)-\widetilde{x}(.,\omega)\|\\
&\quad+\frac{p_2(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\|\, y(.,\omega)-\widetilde{y}(.,\omega)\|\\
&=\frac{p_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\ln t}(\ln t-s)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\|\, x(.,\omega)-\widetilde{x}(.,\omega)\|\\
&\quad+\frac{p_2(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\ln t}(\ln t-s)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\|\, y(.,\omega)-\widetilde{y}(.,\omega)\|\\
&\leq\frac{p_1(\omega)(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|\, x(.,\omega)-\widetilde{x}(.,\omega)\|_\infty\\
&\quad+\frac{p_2(\omega)(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|\, y(.,\omega)-\widetilde{y}(.,\omega)\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\|N_1(x(t,\omega),y(t\omega))-N_1(\widetilde{x}(t,\omega),\widetilde{y}(t,\omega))\| \;\leq\;& p_1(\omega)\tfrac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|\, x(.,\omega)-\widetilde{x}(.,\omega)\|_\infty\\
&+p_2(\omega)\frac{(\ln t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|\, y(.,\omega)-\widetilde{y}(.,\omega)\|_\infty.
\end{aligned}
$$

De même, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\|N_2(x(t,\omega),y(t,\omega))-N_2(\widetilde{x}(t,\omega),\widetilde{y}(t,\omega))\| \;\leq\;& p_3(\omega)\frac{(\ln t)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\, x(.,\omega)-\widetilde{x}(.,\omega)\|_\infty\\
&+p_4(\omega)\frac{(\ln t)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\|\, y(.,\omega)-\widetilde{y}(.,\omega)\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
d(N(x(.,\omega),y(.,\omega)),N(\widetilde{x}(.,\omega),\widetilde{y}(.,\omega)))\leq\widetilde{M}(\omega)d((x(.,\omega),y(.,\omega)),(\widetilde{x}(.,\omega),\widetilde{y}(.,\omega))),
$$

où

$$
d(x(.,\omega),y(.,\omega))=\begin{pmatrix}\|x(.,\omega)-y(.,\omega)\|_\infty\\ \|x(.,\omega)-y(.,\omega)\|_\infty\end{pmatrix}.
$$

Puisque pour chaque $\omega\in\Omega$, $\widetilde{M}(\omega)\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}_+)$ converge vers 0, alors du théorème 3.5.1 le problème (5.1) admet une solution aléatoire unique.

Ensuite, nous présentons le résultat d'existence sans conditions de Lipschitz. Nous considérons les hypothèses suivantes :

(H_2) Pour chaque $\omega\in\Omega$, les deux fonctions $f(.,.,.,\omega)$ et $g(.,.,.,\omega)$ sont continues et $\omega\to f(.,.,.,\omega)$, $\omega\to g(.,.,.,\omega)$ sont mesurables.

(H_3) Il existe $\gamma_1,\gamma_2:\Omega\to\mathbb{R}_+$ deux fonctions mesurabes et bornées telles que

$$
\|f(t,x,y,\omega)\;\|\leq\gamma_1(\omega)(\|x\|+\|y\|),\|g(t,x,y,\omega)\;\|\leq\gamma_2(\omega)(\|x\|+\|y\|),
$$

pour tout $t\in[1,b],\omega\in\Omega$ et $x,y\in\mathbb{R}^m$.

Maintenant, nous prouvons le résultat d'existence du problème (5.1) en utilisant le théorème de point fixe aléatoire de Leary-Schauder dans l'espace de Banach généralisé.

Théorème 5.1.2. *Supposons que les hypothèses* (H_1) *et* (H_2) *sont vérifiées. Alors le problème (5.1) admet une solution aléatoire unique définie sur* $[1, b]$*, de plus l'ensemble des solutions*

$$S(x_0, y_0) = \{(x, y) : \Omega \to C([1, b], \mathbb{R}^m) \times C([1, b], \mathbb{R}^m) : (x(., \omega), y(., \omega)), \omega \in \Omega \text{ solution du } (5.1)\}$$

est compact (i.e. pour toute suite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S(x_0, y_0)$ *il existe une sous-suite de* $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converger vers un élément* $(x, y) \in S(x_0, y_0)$*).*

Démonstration.
Soit $N : C([1, b], \mathbb{R}^m) \times C([1, b], \mathbb{R}^m) \to C([1, b], \mathbb{R}^m) \times C([1, b], \mathbb{R}^m)$ l'opérateur aléatoire défini dans la démonstration du théorème 5.1.1.

Afin d'appliquer le théorème 3.5.6 nous prouvons d'abord que N est complètement continu. La preuve sera donnée dans plusieurs étapes.

- **Etape 1 :** Montrons pour tout $\omega \in \Omega$, $N(., .) = (N_1(., .), N_2(., .))$ est continu.
  Soit (x_n, y_n) une suite telle que $(x_n, y_n) \to (x, y) \in (C([1, b], \mathbb{R}^m) \times C([1, b], \mathbb{R}^m))$ quand $n \to \infty$. Alors

$$\begin{aligned}\|N_1(x_n(., \omega), y_n(., \omega)) - N_1(x(., \omega), y(., \omega))\|_\infty \leq\; & \frac{(\ln b)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \|f(., x_n(., \omega), y_n(., \omega), \omega) \\ & - f(., x(., \omega), y(., \omega), \omega)\|_\infty\end{aligned}$$

  Comme f est une fonction continue, alors

$$\|N_1(x_n(., \omega), y_n(., \omega)) - N_1(x(., \omega), y(., \omega))\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

  De même

$$\begin{aligned}\|N_2(x_n(., \omega), y_n(., \omega)) - N_2(x(., \omega), y(., \omega))\|_\infty \leq\; & \frac{(\ln b)^\beta}{\Gamma(\beta + 1)} \|g(., x_n(., \omega), y_n(., \omega), \omega) \\ & - g(., x(., \omega), y(., \omega), \omega)\|_\infty.\end{aligned}$$

  Donc

$$\|N_2(x_n(., \omega), y_n(., \omega)) - N_1(x(., \omega), y(., \omega))\|_\infty \to 0, \text{ quand } n \to \infty.$$

  Alors N est continu.

- **Etape 2 :** Motrons que l'image de tout ensemble borné par N est un ensemble borné dans $C([1, b], \mathbb{R}^m) \times C([1, b], \mathbb{R}^m)$.
  En effet, il suffit de montrer que pour tout $q > 0$, il existe une constante positive ℓ tel que pour tout $(x, y) \in B_q = \{(x, y) \in C([1, b], \mathbb{R}^m) \times C([1, b], \mathbb{R}^m) : \|x\|_\infty \leq q, \|y\|_\infty \leq q\}$, nous avons

$$\|N(x, y, \omega)\|_\infty \leq \ell = (\ell_1, \ell_2),$$

pour tout $t \in [1.b], \omega \in \Omega$ on a

$$\begin{aligned}\|N_1(x(t,\omega),y(t,\omega))\| &= \left\| x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\frac{ds}{s}\right\| \\ &\leq \|x_0(\omega)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

Par (H_2), nous obtenons

$$\|N_1(x(t,\omega),y(t,\omega))\| \leq \|x_0(\omega)\| + \frac{2(\ln b)^\alpha q}{\Gamma(\alpha+1)}\gamma_1(\omega) := \ell_1.$$

De même, nous avons

$$\|N_2(x(t,\omega),y(t,\omega))\| \leq \|y_0(\omega)\| + \frac{2(\ln b)^\beta q}{\Gamma(\beta+1)}\gamma_2(\omega) := \ell_2.$$

- **Etape 3 :** Motrons que l'image de tout ensemble borné par N est un ensemble equicontinu dans $C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$.
  Considérons pour cela l'ensemble borné B_q de l'etape 2 et on montrons que $N(B_q)$ est equicontinu.
  Soient $r_1, r_2 \in J, r_1 < r_2$, et $(x,y) \in B_q$, nous avons donc

$$\begin{aligned}\|N_1(x(r_2,\omega),y(r_2,\omega),\omega) - N_1(x(r_1,\omega),y(r_1,\omega),\omega)\| \;\leq\; & \frac{2q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{r_1}^{r_2}\left(\ln\frac{r_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\right. \\ & \left. + \int_0^{r_1}\left(\ln\frac{r_1}{s}\right)^{\alpha-1} - \left(\ln\frac{r_2}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\right].\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\|N_1(x(r_2,\omega),y(r_2,\omega),\omega) - N_1(x(r_1,\omega),y(r_1,\omega),\omega)\| \;\leq\; & \frac{2q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)}(\ln r_2 - \ln r_1)^\alpha \\ & + \frac{2q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(\ln r_2)^\alpha - (\ln r_1)^\alpha\right] \to 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|N_2(x(r_2,\omega),y(r_2,\omega),\omega) - N_2(x(r_1,\omega),y(r_1,\omega),\omega)\| \;\leq\; & \frac{2q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\beta+1)}(\ln r_2 - \ln r_1)^\beta \\ & + \frac{2q\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\beta+1)}\left[(\ln r_2)^\beta - (\ln r_1)^\beta\right] \to 0.\end{aligned}$$

Quand $|r_2 - r_1| \to 0$, d'où la continuité de N.
En conséquence des étapes 1 à 3 et avec le théorème d'Azela-Ascoli nous concluons que N transforme B_q en un ensemble précompact dans $C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m)$.

- **Etape 4 :** Maintenant, il reste à montrer que

$$\mathcal{A}(\omega) = \{(x(.,\omega), y(.,\omega)) \in C([1,b],\mathbb{R}^m) \times C([1,b],\mathbb{R}^m) :$$
$$(x(.,\omega), y(.,\omega)) = \lambda(\omega)N(x(.,\omega), y(.,\omega),\omega), \lambda(\omega) \in (0,1)\} \text{ est borné.}$$

Soit $(x,y) \in \mathcal{A}$, alors $x = \lambda(\omega)N_1(x,y)$ et $y = \lambda(\omega)N_2(x,y)$ pour $0 < \lambda < 1$. Donc pour chaque $t \in [1,b]$, nous avons

$$\begin{aligned}\|x(t,\omega)\| &= \|\lambda(\omega)\|\|x_0(w) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\frac{ds}{s}\| \\ &\leq \|x_0(w)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|\frac{ds}{s},\end{aligned}$$

d'aprés (H_3)

$$\|x(t,\omega)\| \leq \|x_0(\omega)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \gamma_1(\omega)\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (\|x(s,\omega)\| + \|y(s,\omega)\|)\frac{ds}{s}.$$

Par conséquent

$$\|x(t,\omega)\| \leq \|x_0(\omega)\| + \frac{\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (\|x(s,\omega)\| + \|y(s,\omega)\|)\frac{ds}{s},$$

et

$$\|y(t,\omega)\| \leq \|y_0(\omega)\| + \frac{\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} (\|x(s,\omega)\| + \|y(s,\omega)\|)\frac{ds}{s}.$$

Alors

$$\|x(t,\omega)\| + \|y(t,\omega)\| \leq c + c\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\gamma-1} (\|x(s,\omega)\| + \|y(s,\omega)\|)\frac{ds}{s},$$

avec

$$c = \|x_0(\omega)\| + \|y_0(\omega)\| + \frac{\gamma_1(\omega)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\gamma_2(\omega)}{\Gamma(\beta)}, \quad \gamma = \min(\alpha,\beta).$$

Par le lemme 5.1.2 de Gronwall,

$$\begin{aligned}\|x(t,\omega)\| + \|y(t,\omega)\| &\leq c + c\int_1^t \left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(c\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)}\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{k\gamma-1}\right]\frac{ds}{s} \\ &\leq c + c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(c\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma+1)}(\ln t)^{k\gamma} \\ &\leq c\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(c\Gamma(\gamma)(\ln t)^{\gamma})^k}{\Gamma(k\gamma+1)}\right] \\ &= cE_{\gamma}(c\Gamma(\gamma)(\ln b)^{\gamma}).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|x(.,\omega)\| + \|y(.,\omega)\| \leq cE_{\gamma}(c\Gamma(\gamma)(\ln b)^{\gamma}) := K_*.$$

Ce qui implique

$$\|x\|_\infty \leq K_* \quad et \quad \|y\|_\infty \leq K_*.$$

Cela montrer que $\mathcal{A}$ est borné.

Par conséquence du théorème 3.5.6, on déduit que N admet un point fixe aléatoire $\omega \to (x(.,\omega), y(.,\omega))$ qui est une solution du problème (5.1).

- **Etape 5 :** Compacité de l'ensemble des solutions.
  Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S(x_0, y_0)$ une suite pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $\omega \in \Omega$ fixé, nous obtenons

$$x_n(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x_n(s,\omega), y_n(s,\omega), \omega)ds,$$

  et

$$y_n(t,\omega) = y_0(w) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} g(s, x_n(s,\omega), y_n(s,\omega), \omega)ds.$$

  Comme dans l'étapes 3 et 4, nous pouvons prouver que la sous suite $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers certain $(x(.,\omega), y(.,\omega)) \in C([1,b],\mathbb{R}^m)\times C([1,b],\mathbb{R}^m)$, tel que

$$\omega \to x(t,\omega), \omega \to y(t,\omega)$$

  sont des fonctions mesurables.
  Puisque $f(.,.,.,\omega)$ et $g(.,.,.,\omega)$ sont des fonctions continues, alors

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x_n(s,\omega), y_n(s,\omega), \omega)\frac{ds}{s},$$

  et

$$y(t,\omega) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} g(s, x_n(s,\omega), y_n(s,\omega), \omega)\frac{ds}{s}.$$

  Donc $S(x_0, y_0)$ est compact.

5.2 M^2-solution

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité complet avec une filtration $(\mathcal{F} = \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles (i.e continue à droite et $\mathcal{F}_0$ contenant tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls). Pour un processus stochastique $x : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^m$ nous écrirons $x_t(\omega) = x(t,\omega)$. Nous disons que $x(.,.)$ est conjointement mesurable si l'application $(t,\omega) \to x(t,\omega)$ est mesurable sous la forme d'une application $B([1,b]\bigotimes\mathcal{F}) \to \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$. Pour $\omega \in \Omega$, le chemin $t \to x(t,\omega)$ est appelé continue à gauche si pour chaque $t \in [1,b]$

$$x_s(\omega) \to x_t(\omega) \quad s \uparrow t.$$

Un processus $x(t,\omega)$ est stochastiquement continu en un point $s \in [a,b]$ si pour chaque $\epsilon > 0$

$$\lim_{t\to s}\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \|x(t,\omega) - x(s,\omega)\| > \epsilon\} = 0.$$

Théorème 5.2.1. *Si x est un processus stochastique avec a des trajectoires continue à droite, alors $x(\cdot,\cdot)$ est mesurable.*

Définition 5.2.1. *Soient x et y sont des processus stochastiques, on dit que x est une modification de y si pour tout $t \in [1, b]$*

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : x_t(\omega) = y_t(\omega)\} = 1.$$

Théorème 5.2.2. *[38]* ***(Théorème de continuité de Kolmogorov)***
Supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (x_t)_{t\geq 0})$, un processus stochastique. Si $\overline{\alpha}, \bar{\beta}, \sigma > 0$ tel que

$$E\|x_t - x_s\|^\alpha \leq \sigma|t-s|^{1+\beta}, t, s \in \mathbb{R}_+,$$

alors le processus stochastique a une modification continue.

Théorème 5.2.3. *Si x un processus stochastique (ou aléatoire) $\mathbb{R}$, alors x est mesurable.*

Notation :

- On note par $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{R}^m), p > 0$, l'espace lineaire d'un variable aléatoire (classe d'equivalence) $x : \Omega \to \mathbb{R}^m$ tel que

$$\mathbb{E}\|x\|^p < \infty.$$

- $M^p(1, b)$ l'espace de (classe d'equivalence de) processus progressivement mesurable $x : [1, b] \times \Omega \to \mathbb{R}^m$ tel que

$$\int_1^b \|x_t\|^2 dt < \infty, \mathbb{P}, \text{ p.s } \omega \in \Omega, \text{ si } p = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left(\int_1^b \|x_t\|^2 dt\right)^{\frac{p}{2}} < \infty, \text{ si } p > 0.$$

- Notez que la propriété de mesurabilité progressive est indépendante du choix d'un élément dans une classe d'équivalence x, et pour tout $p \geq 0$

$$M^p(1, b) \subset L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, L^p(1, b, \mathbb{R}^m)),$$

un sous-espace linéaire fermé. Donc, pour chaque $p \in [1, \infty)$ l'espace $M^2(1, b)$ est un espace de Banach munit de la norme

$$\|x\|_{M^p} = \left(\mathbb{E}\Big(\int_1^b \|x_t\|^2 dt\Big)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus $M^2(1, b)$ est un espace de Hilbert.

Définition 5.2.2. *Le couple x, y s'appelle M^2-solution du problème (5.2) si*

$$x(t,\omega) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega)\frac{ds}{s}, \mathbb{P}, \ p.s\ \omega \in \Omega, t \in [1, b],$$

et

$$y(t,\omega) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} g(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega)\frac{ds}{s}, \mathbb{P}, \ p.s\ \omega \in \Omega, t \in [1, b].$$

5.3 Existence et unicité de M^2-solutions

Dans cette section, nous étudions l'existence, l'unicité, la continuité des modifications et la continuité stochastique de la M^2-solution. Introduisons maintenant les hypothèses suivantes qui constitueront des outils de base dans le traitement des M^2-solutions.

(H_4) Soient $f, g : [1,b]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\times\Omega \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions tels que $\omega \to f(.,.,.,\omega), g(.,.,.,\omega)$ sont mesurables et $t \to f(t,.,.,.), g(t,.,.,.)$ sont continues et

$$\|f(.,0,0,.)\|_{M^2} < \infty, \quad \|g(.,0,0,.)\|_{M^2} < \infty.$$

(H_5) Il existe des nombres réels positives c_1, c_2, c_3, c_4 tel que

$$\|f(t,x,y,\omega) - f(t,\widetilde{x},\widetilde{y},\omega)\| \leq c_1\|x-\widetilde{x}\| + c_2\|y-\widetilde{y}\|, \quad \forall x,y,\widetilde{x},\widetilde{y} \in \mathbb{R}^m, \ \omega \in \Omega,$$

et

$$\|g(t,x,y,\omega) - g(t,\widetilde{x},\widetilde{y},\omega)\| \leq c_3\|x-\widetilde{x}\| + c_4\|y-\widetilde{y}\|, \quad \forall x,y,\widetilde{x},\widetilde{y} \in \mathbb{R}^m, \ \omega \in \Omega.$$

Dans la suite nous supposons $\alpha, \beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ et $\mathbb{E}\|x_0\|^2 < \infty, \ \mathbb{E}\|y_0\|^2 < \infty$.

Théorème 5.3.1. *Supposons que les conditions (H_4) et (H_5) sont vérifiées et la matrice suivante $\widetilde{M_*} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}_+)$ défini par*

$$\widetilde{M_*}(\omega) = \begin{pmatrix} \dfrac{(\ln b)^\alpha\sqrt{2}bc_1}{\sqrt{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)} & \dfrac{(\ln b)^\alpha\sqrt{2}bc_2}{\sqrt{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \\ \dfrac{(\ln b)^\beta\sqrt{2}bc_3}{\sqrt{2\beta-1}\Gamma(\beta)} & \dfrac{(\ln b)^\beta\sqrt{2}bc_4}{\sqrt{2\beta-1}\Gamma(\beta)} \end{pmatrix}.$$

converge vers zéro. Alors le problème (5.1) admet une solution unique dans $M^2(1,b)$.

Démonstration. Considérons pour tout $\omega \in \Omega$ l'opérateur $N : M^2(1,b)\times M^2(1,b) \to M^2(1,b)\times M^2(1,b)$, défini par

$$(x(t,\omega), y(t,\omega)) \mapsto (N_1(x(t,\omega),y(t,\omega)), N_2(x(t,\omega),y(t,\omega))), \text{ où}$$

$$N_1(x(t,\omega),y(t,\omega)) = x_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\frac{ds}{s},$$

et

$$N_2(x(t,\omega),y(t,\omega)) = y_0(\omega) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} g(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\frac{ds}{s}.$$

D'abord nous prouvons que N est un opérateur aléatoire dans $M^2(1,b)\times M^2(1,b)$. Puisque f et g sont des fonctions de Carathédory, alors $f \to (t,x,y,\omega)$ et $g \to (t,x,y,\omega)$ sont des applications mesurables et d'aprés la proposition 3.4.1 nous concluons que les applications

$$\omega \to N_1(x(t,\omega),y(t,\omega)), \quad \omega \to N_2(x(t,\omega),y(t,\omega)),$$

sont mesurables, également

$$\begin{aligned}\int_1^b \|N_1(x(t,\omega),y(t,\omega))\|^2 dt &= \int_1^b \left[\left\|x_0(\omega)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s,w),y(s,w),w)\frac{ds}{s}\right\|^2\right] dt\\
&\leq \frac{2}{\Gamma^2(\alpha)}\int_1^b \left\|\int_0^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\frac{ds}{s}\right\|^2 dt\\
&\quad +2\int_1^b \|x_0(\omega)\|^2 dt\\
&\leq 2(b-1)\|x_0(\omega)\|^2+\frac{b(\ln b)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}\int_1^b \|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|^2 ds\\
&\leq 2(b-1)\|x_0(\omega)\|^2+\frac{2b(\ln b)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}\int_1^b \|f(s,0,0,\omega)\|^2 ds\\
&\quad +\frac{2b(\ln b)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}\int_1^b [c_1^2\|x(s,\omega)\|^2+c_2^2\|y(s,\omega)\|^2]ds.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_1^b \|N_1(x(s,\omega),y(s,\omega))\|^2 ds &\leq 2(b-1)\|x_0(\omega)\|^2+\frac{2b(\ln b)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}\int_1^b \|f(s,0,0,\omega)\|^2 ds\\
&\quad +\frac{2b(\ln b)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}\int_1^b [c_1^2\|x(s,\omega)\|^2+c_2^2\|y(s,\omega)\|^2]ds<\infty.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_1^b \|N_1(x(s,\omega),y(s,\omega))\|^2 ds &\leq 2(b-1)\mathbb{E}\|x_0(\omega)\|^2+\frac{2b(\ln b)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}\mathbb{E}\int_1^b \|f(s,0,0,\omega)\|^2 ds\\
&\quad +\frac{2b(\ln b)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}\mathbb{E}\int_1^b [c_1^2\|x(s,\omega)\|^2+c_2^2\|y(s,\omega)\|^2]ds<\infty.\end{aligned}$$

De même, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_1^b \|N_2(x(s,\omega),y(s,\omega))\|^2 ds &\leq 2(b-1)\|y_0(\omega)\|^2+\frac{2b(\ln b)^{2\beta}}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}\int_1^b \|g(s,0,0,\omega)\|^2 ds\\
&\quad +\frac{2b(\ln b)^{2\beta}}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}\int_1^b [c_3^2\|x(s,\omega)\|^2+c_4^2\|y(s,\omega)\|^2]ds<\infty,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_1^b \|N_2(x(s,\omega),y(s,\omega))\|^2 ds &\leq 2(b-1)\|\mathbb{E}y_0(\omega)\|^2+\frac{2b(\ln b)^{2\beta}}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\int_1^b \|g(s,0,0,\omega)\|^2 ds\\
&\quad +\frac{2b(\ln b)^{2\beta}}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)}\mathbb{E}\int_1^b [c_3^2\|x(s,\omega)\|^2+c_4^2\|y(s,\omega)\|^2]ds<\infty.\end{aligned}$$

Alors N est un opérateur aléatoire de $M^2(1,b)\times M^2(1,b)$ dans $M^2(1,b)\times M^2(1,b)$.

En suite nous prouvons que N satisfait toutes les conditions du théorème 3.2.2 dans $M^2(1,b)\times M^2(1,b)$. Soient $(x(.,\omega),y(.,\omega)),(\widetilde{x}(.,\omega),\widetilde{y}(.,\omega))\in M^2(1,b)\times M^2(1,b)$, donc

$$\left\|N_1(x(t,\omega),y(t,\omega))-N_1(\widetilde{x}(t,\omega),\widetilde{y}(t,\omega))\right\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \Big[f(s, x(s,\omega), y(s,\omega), \omega) - f(s, \tilde{x}(s,\omega), \tilde{y}(s,\omega), \omega) \Big] \frac{ds}{s} \Big\|^2 \\
&\leq \frac{2c_1^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{2\alpha-2} \frac{ds}{s^2} \int_1^t \|x(s,\omega) - \widetilde{x}(s,\omega)\|^2 ds \\
&+ \frac{2c_2^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{2\alpha-2} \frac{ds}{s^2} \int_1^t \|y(s,\omega) - \widetilde{y}(s,\omega)\|^2 ds \\
&= \frac{2c_1^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^{\ln t} \Big(\ln t - s\Big)^{2\alpha-2} \frac{ds}{e^s} \int_1^t \|x(s,\omega) - \widetilde{x}(s,\omega)\|^2 ds \\
&+ \frac{2c_2^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^{\ln t} \Big(\ln t - s\Big)^{2\alpha-2} \frac{ds}{e^s} \int_1^t \|y(s,\omega) - \widetilde{y}(s,\omega)\|^2 ds \\
&\leq \frac{2c_1^2(\ln t)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t \|x(s,\omega) - \tilde{x}(s,\omega)\|^2 ds + \frac{2c_2^2(\ln t)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^t \|y(s,\omega) - \widetilde{y}(s,\omega)\|^2 ds,
\end{aligned}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
\int_1^b \|N_1(x(s,\omega), y(s,\omega)) - N_1(\widetilde{x}(s,\omega), \widetilde{y}(s,\omega))\|^2 ds \leq\ & \frac{2bc_1^2(\ln t)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^b \|x(s,\omega) - \widetilde{x}(s,\omega)\|^2 ds \\
& + \frac{2bc_2^2(\ln t)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_1^b \|y(s,\omega) - \widetilde{y}(s,\omega)\|^2 ds.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\int_1^b \|N_1(x(s,\omega), y(s,\omega)) - N_1(\widetilde{x}(s,\omega), \widetilde{y}(s,\omega))\|^2 ds \Big) \\
&\quad \leq \frac{2bc_1^2(\ln t)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \mathbb{E}\Big(\int_1^b \|x(s,\omega) - \widetilde{x}(s,\omega)\|^2 ds \Big) \\
&\quad + \frac{2bc_2^2(\ln t)^{2\alpha}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \mathbb{E}\Big(\int_1^b \|y(s,\omega) - \widetilde{y}(s,\omega)\|^2 ds \Big).
\end{aligned}
$$

De même, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\int_1^b \|N_2(x(s,\omega), y(s,\omega)) - N_2(\widetilde{x}(s,\omega), \widetilde{y}(s,\omega))\|^2 ds \Big) \\
&\quad \leq \frac{2bc_3^2(\ln t)^{2\beta}}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)} \mathbb{E}\Big(\int_1^b \|x(s,\omega) - \widetilde{x}(s,\omega)\|^2 ds \Big) \\
&\quad + \frac{2bc_4^2(\ln t)^{2\beta}}{(2\beta-1)\Gamma^2(\beta)} \mathbb{E}\Big(\int_1^b \|y(s,\omega) - \tilde{y}(s,\omega)\|^2 ds \Big).
\end{aligned}
$$

alors

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbb{E} \left(\int_1^b \|N_1(x(s,\omega), y(s,\omega)) - N_1(\widetilde{x}(s,\omega), \widetilde{y}(s,\omega))\|^2 \, ds \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq \frac{\sqrt{2} bc_1 (\ln b)^\alpha}{\sqrt{(2\alpha-1)\Gamma(\alpha)}} \left(\mathbb{E} \left(\int_1^b \|x(s,\omega) - \widetilde{x}(s,\omega)\|^2 ds \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2} bc_2 (\ln b)^\alpha}{\sqrt{(2\alpha-1)\Gamma(\alpha)}} \left(\mathbb{E} \left(\int_1^b \|y(s,\omega) - \widetilde{y}(s,\omega)\|^2 ds \right) \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

et

$$\left(\mathbb{E}\left(\int_1^b \|N_2(x(s,\omega),y(s,\omega))-N_2(\widetilde{x}(s,\omega),\widetilde{y}(s,\omega))\|^2\,ds\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{\sqrt{2}bc_3(\ln b)^\beta}{\sqrt{(2\beta-1)\Gamma(\beta)}}\left(\mathbb{E}\left(\int_1^b \|x(s,\omega)-\widetilde{x}(s,\omega)\|^2 ds\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{\sqrt{2}bc_4(\ln b)^\beta}{\sqrt{(2\beta-1)\Gamma(\beta)}}\left(\mathbb{E}\left(\int_1^b \|y(s,\omega)-\widetilde{y}(s,\omega)\|^2 ds\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent

$$d(N(x,y),N(\widetilde{x},\widetilde{y}))\leq \widetilde{M_*}d((x,y),(\widetilde{x},\widetilde{y}))$$

où

$$d(x,y)=\begin{pmatrix}\|x-y\|_{M^2}\\ \|x-y\|_{M^2}\end{pmatrix}.$$

Puisque $\widetilde{M_*}\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ converge vers zero, alors d'aprés le théorème 3.2.2 il existe une unique M^2-solution du problème (5.1).

Théorème 5.3.2. *Supposons que H_4 et H_5 sont verifiées, alors pour tout $x,y\in M^2(1,b)$*

$$z_t(\omega)=x_0(\omega)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\frac{ds}{s},\ \frac{1}{2}<\alpha<1,$$

et

$$\bar{z}_t(\omega)=y_0(\omega)+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\beta-1} g(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\frac{ds}{s},\ \frac{1}{2}<\beta<1$$

ont une modification continue. De plus $t\to z_t,\bar{z}_t$ sont stochastiquement continues.

Démonstration.
Tout d'abord nous prouvons que z_t et $\bar{z}_t$ ont une modification continue. Soient $x,y\in M^2(1,b)$ et $t,r\in[1,b], r<t$. Par les énigalités de Jensen et Hölder, nous obtenons

$$\sqrt{\|z_t(\omega)-z_r(\omega)\|}\leq\sqrt{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^r\left[\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}-\left(\ln\frac{r}{s}\right)^{\alpha-1}\right]\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|\frac{ds}{s}}$$
$$+\sqrt{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_r^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|\frac{ds}{s}}$$
$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^r\sqrt{\frac{\left[\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}-\left(\ln\frac{r}{s}\right)^{\alpha-1}\right]}{s}}\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)|\|ds$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_r^t\sqrt{\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|}{s}}ds$$
$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^r\left[\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}-\left(\ln\frac{r}{s}\right)^{\alpha-1}\right]\frac{ds}{s}\int_1^r\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|ds$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_r^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\int_r^t\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|ds\\
\leq\;& \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}|(\ln t-\ln r)^\alpha|\int_1^b\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}|(\ln t)^\alpha-(\ln r)^\alpha|\int_1^b\|f(s,x(s,\omega),y(s,\omega),\omega)\|ds\\
\leq\;& \frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}|(\ln t-\ln r)^\alpha|\int_1^b\Big[c_1\|x(s,\omega)\|+c_2\|y(s,\omega)\|\Big]ds\\
&+\frac{2}{\Gamma(\alpha+1)}|(\ln t-\ln r)^\alpha|\int_1^b\|f(s,0,0,\omega)\|ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}|(\ln t)^\alpha-(\ln r)^\alpha|\int_1^b\Big[c_1\|x(s,\omega)\|+c_2\|y(s,\omega)\|\Big]ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}|(\ln t)^\alpha-(\ln r)^\alpha|\int_1^b\|f(s,0,0,\omega)\|ds
\end{aligned}
$$

Par l'ingalité de Hölder, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\|z_t(\omega)-z_r(\omega)\|}\;\leq\;& \frac{2b}{\Gamma(\alpha+1)}|(\ln t-\ln r)^\alpha|\int_1^b\Big[c_1^2\|x(s,\omega)\|^2+c_2^2\|y(s,\omega)\|^2\Big]ds\\
&+\frac{2b}{\Gamma(\alpha+1)}|(\ln t-\ln r)^\alpha|\int_1^b\|f(s,0,0,\omega)\|^2ds\\
&+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}|(\ln t)^\alpha-(\ln r)^\alpha|\int_1^b\Big[c_1^2\|x(s,\omega)\|^2+c_2^2\|y(s,\omega)\|^2\Big]ds\\
&+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}|(\ln t)^\alpha-(\ln r)^\alpha|\int_1^b\|f(s,0,0,\omega)\|^2ds,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\|\bar z_t(\omega)-\bar z_r(\omega)\|}\;\leq\;& \frac{2b}{\Gamma(\beta+1)}|(\ln t-\ln r)^\beta|\int_1^b\Big[c_3^2\|x(s,\omega)\|^2+c_4^2\|y(s,\omega)\|^2\Big]ds\\
&+\frac{2b}{\Gamma(\beta+1)}|(\ln t-\ln r)^\beta|\int_1^b\|g(s,0,0,\omega)\|^2ds\\
&+\frac{b}{\Gamma(\beta+1)}|(\ln t)^\beta-(\ln r)^\beta|\int_1^b\Big[c_3^2\|x(s,\omega)\|^2+c_4^2\|y(s,\omega)\|^2\Big]ds\\
&+\frac{b}{\Gamma(\beta+1)}|(\ln t)^\beta-(\ln r)^\beta|\int_1^b\|g(s,0,0,\omega)\|^2ds.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\sqrt{\|z_t(\omega)-z_r(\omega)\|}\;\leq\;& \frac{2b}{\Gamma(\alpha+1)}\Big|(\ln t-\ln r)^\alpha\Big|\Big[c_1^2\|x\|_{M^2}^2+c_2^2\|y\|_{M^2}^2\Big]\\
&+\frac{2b}{\Gamma(\alpha+1)}\Big|(\ln t-\ln r)^\alpha\Big|\|f(.,0,0,.)\|_{M^2}^2\\
&+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\Big|(\ln t)^\alpha-(\ln r)^\alpha\Big|\Big[c_1^2\|x\|_{M^2}^2+c_2^2\|y\|_{M^2}^2\Big]\\
&+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}\Big|(\ln t)^\alpha-(\ln r)^\alpha\Big|\|f(.,0,0,.)\|_{M^2}^2,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\sqrt{\|\bar{z}_t(\omega)-\bar{z}_r(\omega)\|} &\leq \frac{2b}{\Gamma(\beta+1)}\Big|(\ln t-\ln r)^{\beta}\Big|\Big[c_3^2\|x\|^2_{M^2}+c_4^2\|y\|^2_{M^2}\Big]\\
&+\frac{2b}{\Gamma(\beta+1)}\Big|(\ln t-\ln r)^{\beta}\Big|\|g(.,0,0,.)\|^2_{M^2}\\
&+\frac{b}{\Gamma(\beta+1)}\Big|(\ln t)^{\beta}-(\ln r)^{\beta}\Big|\Big[c_3^2\|x\|^2_{M^2}+c_4^2\|y\|^2_{M^2}\Big]\\
&+\frac{b}{\Gamma(\beta+1)}\Big|(\ln t)^{\beta}-(\ln r)^{\beta}\Big|\|g(.,0,0,.)\|^2_{M^2}.
\end{aligned}
$$

Comme $r<t$ cela implique que

$$
\begin{aligned}
|(\ln t)^{\alpha}-(\ln r)^{\alpha}| &= (\ln t)^{\alpha}-(\ln r)^{\alpha}\\
&= \Big(\frac{\ln t-\ln r}{2}+\frac{\ln t+\ln r}{2}\Big)^{\alpha}-(\ln r)^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait que $(\ln t)^{\alpha}$ une fonction convexe sur $(0,\ln b]$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
(\ln t)^{\alpha}-(\ln r)^{\alpha} &\leq \frac{1}{2}(\ln t-\ln r)^{\alpha}+\frac{1}{2}(\ln t+\ln r)^{\alpha}-(\ln r)^{\alpha}\\
&= \frac{1}{2}(\ln t-\ln r)^{\alpha}+\frac{2^{\alpha}}{2}\Big(\frac{\ln t}{2}+\frac{\ln r}{2}\Big)^{\alpha}-(\ln r)^{\alpha}\\
&\leq \frac{(\ln t-\ln r)^{\alpha}}{2}+\frac{(\ln t)^{\alpha}}{2^{2-\alpha}}+\frac{(\ln r)^{\alpha}}{2^{2-\alpha}}-(\ln r)^{\alpha}\\
&\leq \frac{(\ln t-\ln r)^{\alpha}}{2}+\frac{(\ln t)^{\alpha}}{2}-\frac{(\ln r)^{\alpha}}{2}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$(\ln t)^{\alpha}-(\ln r)^{\alpha}\leq(\ln t-\ln r)^{\alpha}.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis sur $\ln t-\ln r, r, t\in[1,b]$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\sqrt{\|z_t(\omega)-z_r(\omega)\|} &\leq \frac{2b}{\Gamma(\alpha+1)}|t-r|^{\alpha}\Big[c_1^2\|x\|^2_{M^2}+c_2^2\|y\|^2_{M^2}\Big]\\
&+\frac{2b}{\Gamma(\alpha+1)}|t-r|^{\alpha}\|f(.,0,0,.)\|^2_{M^2}\\
&+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}|t-r|^{\alpha}\Big[c_1^2\|x\|^2_{M^2}+c_2^2\|y\|^2_{M^2}\Big]\\
&+\frac{b}{\Gamma(\alpha+1)}|t-r|^{\alpha}\|f(.,0,0,.)\|^2_{M^2},
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\sqrt{\|\bar{z}_t(\omega)-\bar{z}_r(\omega)\|} &\leq \frac{2b}{\Gamma(\beta+1)}|t-r|^{\beta}\Big[c_3^2\|x\|^2_{M^2}+c_4^2\|y\|^2_{M^2}\Big]\\
&+\frac{2b}{\Gamma(\beta+1)}|t-r|^{\beta}\|g(.,0,0,.)\|^2_{M^2}\\
&+\frac{b}{\Gamma(\beta+1)}|t-r|^{\beta}\Big[c_3^2\|x\|^2_{M^2}+c_4^2\|y\|^2_{M^2}\Big]\\
&+\frac{b}{\Gamma(\beta+1)}|t-r|^{\beta}\|g(.,0,0,.)\|^2_{M^2}.
\end{aligned}
$$

Il existe donc $C,\bar{C}>0$ tel que

$$\mathbb{E}\sqrt{\|z_t(\omega)-z_r(\omega)\|}\leq C|t-r|^{\alpha+1} \tag{5.3}$$

et

$$\mathbb{E}\sqrt{\|\bar{z}_t(\omega)-\bar{z}_r(\omega)\|} \leq C|t-r|^{\beta+1} \tag{5.4}$$

Donc, à partir du théorème de Kolmogorov 5.2.2 x_t et $\bar{x}_t$ ont une modification continue.

Nous montrons maintenant que z et $\bar{z}$ sont stochastiquement continus. En effet, soit $t, s \in [1, b]$ et $\epsilon > 0$, alors

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \|z_t(\omega)-z_r(\omega)\| > \epsilon\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \sqrt{\|z_t(\omega)-z_r(\omega)\|} > \sqrt{\epsilon}\}).$$

En utilisant l'inégalité de Markov, on obtient que

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \|z_t(\omega)-z_r(\omega)\|) > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathbb{E}\Big(\sqrt{\|z_t(\omega)-z_r(\omega)\|}\Big),$$

et

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \|\bar{z}_t(\omega)-\bar{z}_r(\omega)\|) > \epsilon\} \leq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathbb{E}\Big(\sqrt{\|\bar{z}_t(\omega)-\bar{z}_r(\omega)\|}\Big).$$

Par conséquent, (5.3) et (5.4) implique que

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \|z_t(\omega)-z_r(\omega)\| > \epsilon\} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}}|t-r|^{\alpha+1} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow r,$$

et

$$\mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \|\bar{z}_t(\omega)-\bar{z}_r(\omega)\| > \epsilon\} \leq \frac{C}{\sqrt{\epsilon}}|t-r|^{\beta+1} \longrightarrow 0 \text{ quand } t \longrightarrow r.$$

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra and G.M. N'Guérékata, *Topics in Fractional Differential Equations*, Springer, New York, 2012.

[2] G. Allaire and S.M. Kaber, *Numerical Linear Algebra*; ser. Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 2008.

[3] A. Benaissa and M. Benchohra, Functional differential equations with state-dependent delay and random effects. *Rom. J. Math. Comput. Sci.* **5** (2015), 84–94.

[4] A. Benaissa, M. Benchohra and J.R. Graef, Functional differential equations with delay and random effects. *Stoch. Anal. Appl.* **33** (2015), 1083–1091.

[5] A.T. Bharucha-Reid, *Random Integral Equations*, New York, Academic Press, 1972.

[6] T. Blouhi, J.J. Nieto and A. Ouahab, Existence and uniqueness results for systems of impulsive stochastic differential equations, *Ukranians Mathematicas Journal*, to appear.

[7] P.L. Butzer, A.A. Kilbas and J.J. Trujillo, Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property, *J. Math. Anal. Appl.* **269** (2002), 387–400.

[8] P.L. Butzer, A.A. Kilbas and J.J. Trujillo, Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals, *J.bMath. Anal. Appl.* **269** (2002), 1–27.

[9] P.L. Butzer, A.A. Kilbas and J.J. Trujillo, Mellin transform analysis and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals, *J. Math. Anal. Appl.* **270** (2002), 1–15.

[10] B.C. Dhage, On global existence and attractivity results for nonlinear random integral equations, *Panamer. Math. J.* **19** (2009), 97–111.

[11] B.C. Dhage, On n-th order nonlinear ordinary random differential equations, *Nonlinear Oscil.* **13** (2011) no.4, 535–549.

[12] B.C. Dhage, S.V. Badgire and S.K. Ntouyas, Periodic boundary value problems of second order random differential equations, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* **21** (2009), 1-14.

[13] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, Braunschweig, Germany, 2004.

[14] K. Diethelm and N.J. Ford, Analysis of fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **265** (2002), 229–248.

[15] K. Diethelm and A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in *Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering*

and Molecular Properties (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds.), pp. 217–224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[16] R. Edsinger, *Random Ordinary Differential Equations*, Ph.D. Thesis, Univ. of California (Berkeley), 1968.

[17] Y.Y. Gambo, F. Jarad, D. Baleanu and T. Abdeljawad, On Caputo modification of the Hadamard fractional derivatives, *Adv. Difference Equ.* **2014**, (2014), 12 pp.

[18] L. Gaul, P. Klein and S. Kempfle, Damping description involving fractional operators, *Mech. Systems Signal Processing* **5** (1991), 81–88.

[19] W.G. Glockle and T.F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics, *Biophys. J.* **68** (1995), 46–53.

[20] J. Hadamard, Essai sur l'étude des fonctions donnees par leur development de Taylor, *J. Mat. Pure Appl. Ser.* **8** (1892), 101–186.

[21] D. Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Partial differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1989.

[22] F. Jarad, T. Abdeljawad and D. Baleanu, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, *Adv. Difference Equ.*, **2012**, (2012), 8 pp.

[23] Hong Lu and Shujuan Lii, Random Attractor For Fractional Ginzbdrg-Landau Equation With Multtplicative Noise.

[24] A.A. Kilbas, Hadamard-type fractional calculus, *J. Korean Math. Soc.* **38** (2001), 1191–1204.

[25] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, **204**, Elsevier Science B. V. Amsterdam, 2006.

[26] A.A. Kilbas and J.J. Trujillo, Hadamard-type integrals as G-transforms, *Integral Transforms and Special Functions* **14** (2003), 413–427.

[27] G.S. Ladde and V. Lakshmikantham, *Random Differential Inequalities*, Academic Press, New York, 1980.

[28] V. Lupulescu, S.K. Ntouyas, Random fractional differential equations, *Int. Electron. J. Pure Appl. Math.* **4** (2012), 119-136.

[29] S.Y. Lin, Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations, *J. Inequal. Appl.* **2013** (2013), 9 pages.

[30] V. Lupulescu and S.K. Ntouyas, Random fractional differential equations, *Int. Electron. J. Pure Appl. Math.* **4** (2012), 119–136.

[31] V. Lupulescu, D. O'Regan and G. Rahman, Existence results for random fractional differential equations, *Opuscula Math.* **34** (2014), 813–825.

[32] F. Mainardi, P. Paradisi and R. Gorenflo, *Probability Distrubitions Generated By Fractional Diffusion Equations.*

[33] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanis, in *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds.), pp. 291–348, Springer-Verlag, Wien, 1997.

[34] A.B. Malinowska and D.F.M. Torres, *Introduction to the Fractional Calculus of Variations.* Imperial College Press, London, 2012.

[35] F. Metzler, W. Schick, H.G. Kilian and T.F. Nonnenmacher, Relaxation in filled polymers : A fractional calculus approach, *J. Chem. Phys.* **103** (1995), 7180–7186.

[36] K.S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, 1993.

[37] N.S. Papageorgiou, Random fixed point theorems for measurable multifunctions in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **97** (1986), 507–514.

[38] E. Pardoux and A. Rascanu, *Stochastic Differential Equations, Backward SDEs, Partial Differential Equations*, Stochastic Modelling and Applied Probability, 69. Springer, Cham, 2014.

[39] A.I. Perov, On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, *Pribliz. Met. Reshen. Differ. Uravn.* **2** (1964), 115–134 (in Russian).

[40] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[41] R. Precup, Methods in nonlinear integral equations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2002), 232 pp.

[42] R. Precup, The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems, *Math. Comput. Modelling* **49** (2009), 703-708.

[43] V. Prohorov, Convergence of Random Processes and Limit Theorems in Probability Theory, *Theor. Probability Appl.* **1** (1956), 157–214.

[44] I. A. Rus, *Principles and Applications of the Fixed Point Theory.* Dacia : Cluj-napoca, 1979.

[45] G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[46] M.L. Sinacer, J. J Nieto and A. Ouahab, Random fixed point theorem in generalized Banach space and applications, *Random Oper. Stoch. Equ.* **24** (2016), 93–112.

[47] T.T. Soong, *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press, New York, 1973.

[48] J.L Strand, *Random Ordinary Differential Equations*, Reidel, Boston, 1985.

[49] C.P. Tsokos and W.J. Padgett, *Random Integral Equations with Applications in Life Sciences and Engineering*, Academic Press, New York, 1974.

[50] R.S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, 2nd revised and expanded, ser. Springer series in Computational Mathematics. Berlin : Springer, 2000.

[51] H. Vu, N.N. Phung and N. Phuong, On fractional randomdifferential equations with delay, *Opuscula Math.* 36 (2016), 541–556.

[52] Y. Zhou, *Basic theory of fractional differential equations* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2014.