République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique
Option : Equations différentielles et modélisation Présenté par :

Melle. Ibtissem Hammoumi

Stabilité et théorie de Lyapunov

Encadrant :

Mr. Ahmed Hammoudi
Professeur à C.U.B.B.A.T.

Soutenu en 2018

Devant le jury composé de :

Président :	M. Boumedien Boukhari (M.A.A)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	M. Abderrahmane Beniani (M.C.A)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	M. Ahmed Hammoudi (Professeur)	C.U.B.B.A.T.

Dédicace

C'est avec une grande émotion et un immense plaisir que je dédie ce modeste travail :
A la mémoire de mon père et ma très chère mère
A mes très chères frères et sœurs :
Abderrahime,Sidi mohamed Réda,Rahima,Nacéra,Fouziya et Rafika
A tout les membres de ma famille,petits et grands,cousins et cousines.
A tout mes amis sans exception.
A tout mes enseignants qui m'ont apportés du soutient et qui m'ont beaucoup aidés durant ces années d'études et spécialement :
M^{me}*.Saiah,* M^{me}*.Bendimred,* M^{me}*.Bentayeb,* M^{me}*.Mekami,* M^{me}*.Mammar,* M^{me}*.Mekhalfi*
M^{r}*.Hammoudi,* M^{r}*.Khiar,* M^{r}*.Boukhari,* M^{r}*.Benaissa,* M^{r}*.Beniani,* M^{r}*.Bentout...etc*
A tout ceux qui m'aiment et que j'aime.

Remerciement

Avant tout je remercie notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, la patience, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études, ce qui ma donné le pouvoir de réaliser ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à Monsieur le professeur Ahmed.Hammoudi ,qui m'a encadré, tout au long de ce mémoire. Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail. Je vous remercie pour vos orientations et votre enthousiasme envers mon travail. Les judicieux conseils et rigueur que vous m'avez prodigué tout au long de ce travail. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec vous.

J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Monsieur Boumedien.Boukhari, pour tous les efforts déployés pour notre formation pendant les deux années écoulées et même durant les années de licence précédant . Je vous remercie très chaleureusement de m'avoir continuellement encouragé, pour votre soutien scientifique et humain, pour votre gentillesse et votre hospitalité. aussi je vous remercie vivement d'avoir accepté de présider le jury qui examinera ce mémoire.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur Abderrahmane.Beniani, pour sa contribution à ma formation et en acceptant de juger et évaluer mon travail. Je tiens à vous remercie pour tout, car vous m'avez appris beaucoup plus que les mathématiques durant cette année.

J'exprime également ma gratitude à monsieur le chef de département Madame Djamila.Bouhalouan,qui a été toujours disponible pour nous, et nous a vraiment aidé dans tous les domaines.

Je tiens à remercier chaleureusement ma très chère famille sans exception pour leurs encouragement et leurs soutient et l'aide qu'ils m'ont apportés tout au long de ce travail peu importe la façon.

Je tiens à saluer les membres de ma promotions, qui de près ou de loin m'ont soutenue moralement durant ce mémoire.

Enfin, je ne saurai oublier de remercier tous mes enseignants du département de Mathématiques, qui m'ont accompagnés et aidés à m'améliorer durant mon cursus de formation.

Résumer

Ce mémoire de Master a pour but d'étudier la stabilité ou l'instabilité de la solution d'une équation différentielle ou un système différentielle en définissant des résultats fondamentaux et de visualiser le type de stabilité associé à cette équation ou système.

En plus, ce document à l'intérêt d'introduire la théorie de Lyapunov qui consiste à utilisée des fonctions auxiliaires permettant de suivre le comportement des trajectoires de l'équation ou le système différentielle afin de garantir la stabilité de certaines solutions.Et, c'est ce qu'on appelle" la stabilité au sens de Lyapunov".

Finalement,on termine ce recueil de déductions par une procédure formelle de construction de la fonction de Lyapunov suivi par quatre étapes comme étant une parmi les méthodes de recherches de cette dernière.

Ce mémoire n'a pas la prétention d'apporter de nouveaux résultats,mais il présente en détails quelques observations obtenus par des différents auteurs,dans des travaux présentés en bibliographie.

Table des matières

Notations

$\mathbb{C}$: *désigne l'ensemble des nombres complexes Re z et Im z la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe z.*

$\mathbb{R}$: *Ensemble des nombres réels (corps des réels).*

I : *Un intervalle de* $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}_+$: *Ensemble des nombres réels positives.*

$\mathbb{R}^n$: *Espace vectoriel de dimension* n *construit sur le corps des réels.*

$\|\cdot\|$: *Norme sur* $\mathbb{R}^n$ *(norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$*).*

$|\cdot|$: *Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.*

x^T : *Transposé du vecteur* x.

$x \in \mathbb{R}^n$: *Vecteur de composantes* x_i.

$sgn(\cdot)$: *La fonction signe qui renvoie le signe d'un scalaire* $a \in \mathbb{R}$ *tel que :*

$$\varphi_a(x) : \varphi_a(x) = sgn(x)|x|^a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{K}$: *Ensemble des fonctions continues de* $[0, a) \rightarrow [0, \infty)$*, où* a *est un réel positif (éventuellement infini) ,strictement croissante et nulles en zéro.*

$\mathcal{K}_\infty$: *Ensemble des fonctions de* $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ *de classe* $\mathcal{K}$ *tendant vers l'infini.*

$\dfrac{dx}{dt}$: *Dérivée de la variable* x *par rapport au temps.*

$\dfrac{d^2x}{dt^2}$: *Seconde dérivée de* x *par rapport au temps.*

Δ : *Laplacien.*

$(a_{ij})_{i,j=,\dots,n}$: *Coefficients de la matrice.*

V : *Fonction de Lyapunov*

$\langle \cdot \rangle$: *Produit scalaire.*

Table des figures

Introduction Générale

En mathématiques et en automatique, la notion de stabilité de Lyapunov (ou, plus correctement, de stabilité au sens de Lyapunov) apparaît dans l'étude des systèmes dynamiques où elle s'efforce d'apporter des résultats et des méthodes permettant de comprendre, d'analyser et de résoudre les problèmes associés à des systèmes contrôlés. Ces systèmes ont des variables qui permettent d'influencer sa dynamique et qui peuvent être ajustées par un opérateur ou un processus automatisé.
De manière générale, la notion de stabilité joue également un rôle en mécanique, dans les modèles économiques, les algorithmes numériques, la mécanique quantique, la physique nucléaire,...etc.

La stabilité est une notion vaste dans le monde des mathématiques, dans ce mémoire notre étude se focalise sur la stabilité des solutions des équations différentielles et des systèmes différentiel, l'étude c'est ensuite élargie ; à la stabilité au sens de Lyapunov qui est une traduction mathématique d'une constatation élémentaire,si l'énergie totale d'un système de dissipe continûment i.e. décroit avec le temps,alors ce système (qu'il soit linéaire ou non, stationnaire ou non) tend à se ramener à un état d'équilibre (il devient stable).

Donc, la théorie de Lyapunov traite la stabilité du mouvement qui est exprimé plus précisément par un déplacement le long des trajectoires solutions d'un système d'équations différentielles.D'une autre façon si tout mouvement d'un système issu d'un voisinage suffisamment petit d'un point d'équilibre x^* *demeure au voisinage de ce point, alors* x^* *est dit stable au sens de Lyapunov.*

Le mathématicien russe "Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov (1857-1918)" à apporté une grande contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes d'équations différentielles que sa théorie consiste à utiliser des fonctions auxiliaires vérifiant certaines conditions précises et liées à la fonction F *de l'équation différentielle et à* x^* *. Le problème de la stabilité se ramène donc à chercher une telle fonction (dite fonction de Lyapunov). Cette méthode est extrêmement puissante à condition de trouver ces fonctions là dont la forme et le comportement le long des courbes intégrales permettent d'étudier la stabilité de certaines solutions d'une façon analogue. Nous avons choisi de former ce mémoire en étudiant quatre chapitres liées et enchaînés entre eux.*

Le premier chapitre ,en un premier temps est une généralité définissant quelques équations différentielles et des résultats fondamentaux élaborés par la première section qui nous donne quelques rappels sur les équations différentielles ordinaires. Ensuite,nous énonçons deux systèmes(homogènes et non-homogènes) accompagnés par leurs propriétés et même des conditions à respecter.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité et ses divers types en commençant par des notions fondamentales liées à cette étude.

Nous définissons premièrement quelques points illustrés par des exemples et exprimons la stabilité et l'instabilité pour passer après à définir quelques types de stabilités toujours en ajoutant des applications simples à retenir.

Le troisième chapitre exprime la fonction de Lyapunov en introduisant les définitions de quelques fonctions liées à cette dernière.En plus, nous avons fait toute une monographie sur l'existence et l'unicité et la fonction de Lyapunov à l'aide de certains théorèmes fondamentaux et des résultats bien démontrés.

Dans le quatrième chapitre on exhibe les notions générales et les outils mathématiques qui permettent de distinguer la stabilité au sens de Lyapunov . Nous décrivons entre autre les résultats théoriques de stabilité associés aux équation différentielle ordinaires et systèmes différentiels . Nous introduisons des exemples simples pour clarifier quelques résultats. Comme le montre le sujet de ce mémoire, et aussi dans sa dernière partie, détaille la procédure formelle de construction de la fonction de Lyapunov basée sur quatre étapes au but de chercher la bonne fonction qui nous donne l'efficacité des résultats. Par la fin de ce chapitre on a illustré notre travail par un exemple montrant une méthode de recherche de la fonction de Lyapunov.

1 Généralités

Dans ce premier chapitre, nous rappellerons les notions générales des équations différentielles (solution,réduction d'ordre,...etc).
Nous commençons par quelques définitions d'équations différentielles(Ordinaires,Normales,Autonomes).
Ensuite, on termine par quelques définitions simples utilisées généralement sur les systèmes différentiels.

1.1 Rappel sur les EDO

Dans cette section nous donnons quelques définitions essentielles pour introduire la notion des équations différentielles.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 [*Équations différentielles ordinaires* ***(EDO)***]

Une équation différentielle ***ordinaire****, également notée EDO,d'ordre n est une relation entre la variable réelle t ,une fonction inconnue* $t \longmapsto x(t)$ *et ses dérivées* $x', x'', \ldots, x^{(n)}$ *au point* t *définie par :*

$$F(t, x, x'', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

où $F : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *(F n'est pas nécessairement indépendante de sa dernière variable* $x^{(n)}$*). Et* $t \in I(I \subset \mathbb{R})$ *[I peut être* $\mathbb{R}$ *tout entier].*

En général la solution x *sera à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

Remarque 1.1.1

On dit que cette équation est ***scalaire*** *si* $F : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ *(* F *sera à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *).*

Définition 1.1.2 [*Équations différentielles linéaires*]

Une ***EDO*** *d'ordre* n *est* ***linéaire*** *si elle est de la forme :*

$$a_n(t)x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = g(t) \tag{1.2}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *et* g *sont des fonctions (continues) sur un intervalle réel* I *, à valeurs réelles ou complexes.*

Remarque 1.1.2
La linéarité est relativement à la fonction que l'on cherche et à ses dérivées $(x(t), x'(t), x''(t))$*et non pas par rapport à la variable* t.

Remarque 1.1.3

Si l'équation différentielle est linéaire on peut l'écrire sous la forme matricielle : $AX = B$

Définition 1.1.3 [*Systèmes d'équations linéaires*]
On appelle système de n *équations linéaires à* p *inconnues* $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *le système :*

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = & b_2 \\ \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = & b_n \end{cases}$$

D'où on a l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

avec X *et* B *deux matrices colonnes et* A *s'appelle matrice de transformation à* n *lignes et* p *colonnes.*
Les coefficients $a_{ij} \in \mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$ *avec* $1 \leq i \leq n$ *et* $1 \leq j \leq p$.
Les $b_i \in \mathbb{K}$ *avec* $1 \leq i \leq n$ *constituent le second membre de* $(\mathcal{S})$.

Définition 1.1.4

Un système différentiel linéaire à coefficients constants d'ordre 1 à n équations prend la forme :

$$(\mathcal{S}') \quad \begin{cases} x_1^{'} = & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_n + b_1(t) \\ \vdots & \vdots \\ x_n^{'} = & a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases}$$

$$(i.e) \quad \begin{pmatrix} x_1^{'}(t) \\ \vdots \\ x_n^{'}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

et s'écrit alors $X^{'}(t) = AX(t) + B(t)$
où le vecteur $X(t)$ *désigne* $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ *et* $X^{'}(t)$ *le vecteur dérivé qui s'écrit* $\begin{pmatrix} x_1^{'}(t) \\ \vdots \\ x_n^{'}(t) \end{pmatrix}$
A *est la matrice* $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *,et* $B(t)$ *le vecteur* $\begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ *qui désigne le second membre du système* $(\mathcal{S}^{'})$.

Remarque 1.1.4

Un système différentielle linéaire est un ensemble d'équations différentielle linéaires à coefficients a_{ij} *qui forment une matrice* A *de t'aille* n.

Exemple 1.1.1

Soit l'équation :

$$t^2x''(t) - 4tx'(t) + x(t) = sin(t)$$

Cette équation est d'ordre 2 et,et est ***linéaire***.

Remarque 1.1.5

Une équation qui n'est pas linéaire est dite ***non-linéaire***.

Exemple 1.1.2
L'équation :

$$x^{(3)}(t) - \left(1 + x(t) + \tfrac{(x'(t))^2}{3}\right) x'(t) + 5x(t) = 0$$

*est d'ordre 3 et,et est **non-linéaire**.*

Définition 1.1.5 [*Équations différentielles normale*]

*On appelle équation différentielle **normale** d'ordre n toute équation de la forme :*

$$x^{(n)} = f(t, x, x'', \dots, x^{(n-1)}) \tag{1.3}$$

Définition 1.1.6 [*Équations différentielles autonomes*]

*On appelle équation différentielle **autonome** d'ordre n,toute équation de la forme :*

$$x^{(n)} = f(x, x'', \dots, x^{(n-1)}) \tag{1.4}$$

Autrement dit,f ne dépend pas explicitement de t.

Remarque 1.1.6

i) Une équation du premier ordre normale est de la forme : $x' = f(t, x)$.

ii) Une équation de premier ordre autonome est de la forme : $x' = f(x)$.

Remarque 1.1.7

Les équations autonomes sont très importantes pour la recherche des solutions stationnaires et l'étude de leurs stabilités.

Exemple 1.1.3
Soit l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \sqrt{1 + (\frac{dx}{dt})^2}$$

*l'équation est d'ordre 2, non-linéaire , et est **autonome***

Exemple 1.1.4

Le système,

$$x'(t) = 3e^{x(t)} - \frac{1}{x(t)}$$

est ***autonome*** *car :*

$$f(x) = 3e^{x} - \frac{1}{x}$$

ne dépend pas de t. Par contre le système ,

$$x'(t) = tx(t)$$

est ***non autonome*** *car :*

$$f(t, x) = tx$$

dépend de t.

1.1.2 Solutions

Soit l'équation différentielle suivante :

$$F(t, x, x'', \ldots, x^{(n)}) = 0 \;\; , \forall t \in I \qquad\qquad (E)$$

où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *(*Ω *ouvert de* $\mathbb{R}^n$*)*

Définition 1.1.7 [*Solution*]

On appelle ***solution*** *(ou intégrale) d'une équation différentielle* (E) *d'ordre* n *sur un intervalle* $I \in \mathbb{R}$*, toute fonction* x *définie sur cet intervalle et* n *fois dérivable en tout point de* I *et, satisfait* (E)*.*

Remarque 1.1.8

Une solution de (E) *sur un intervalle* $I \in \mathbb{R}$ *est une fonction* n *fois dérivable,* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\forall t \in I; (t, x(t), x^{'}(t), \ldots, x^{n}(t)) \in \Omega$

(ii) $\forall t \in I; F(t, x(t), x^{'}(t), \ldots, x^{n}(t)) = 0$

En générale on la note (I, x)*.*

Remarque 1.1.9

Intégrer une équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Exemple 1.1.5

Considérons la fonction x *,définie sur* $I = \left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$ *par :* $x(t) = \tan t^2$
(I, x) *est la solution de l'équation :*

$$x' = 2t(1 + x^2)$$

Définition 1.1.8 [*Courbe intégrale*]

On appelle ***courbe intégrale*** *l'ensemble* $S = \{(t, x(t))|t \in I\}$ *i.e l'ensemble des points* $(t, x(t))$ *quand* t *parcourt* I *.*

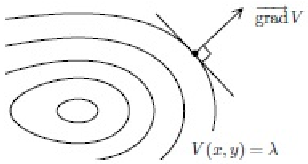

Figure 1.1 – Courbe intégrale

Remarque 1.1.10

Si $x \in \mathbb{R}^n$ *alors* $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 1.1.9 [*Trajectoire*]

la ***trajectoire*** *d'une fonction* x *solution de l'équation* (E) *est l'ensemble* $\{(t, x(t))|t \in I\}$ *qu'on peut la définir par l'application :*

$$\gamma_x : I \longrightarrow \Omega$$
$$t \longmapsto \phi_t(x)$$

où $\phi_t(x)$ *: est l'unique solution du système d'équations différentielles.*

Définition 1.1.10 [*Orbite*]

On appelle ***orbite*** *de* x *, l'image de* γ_x
Et, on le note :

$$Orb_x = \gamma_x(I) = \{\phi_t(x)/t \in I\}$$

Remarques

1. *Une trajectoire est une solution du système différentiel.*
2. *L'orbite est un ensemble de points de* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemple 1.1.6

Soit l'équation différentielle

$$F(t, X, \dots, X^n) = 0 \qquad (*)$$

Dans $\mathbb{R}^3$ *(n=2) par exemple, une* ***courbe intégrale*** *notée* Γ *et* M *un point de cette courbe de coordonnées :*

$$M = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ t \end{pmatrix}$$

i.e

$$x = x_1(t), y = x_2(t), et \;\; z = t$$

On note :

$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ *le vecteur tangent à* Γ *en* M *à pour composantes :* $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix}$

C'est-à-dire : $f_1(t, X(t)), f_2(t, X(t)), et 1$

En notant f_1 *et* f_2 *les composantes de* f. *Pour une telle équation l'espace des phases est* $\mathbb{R}^2$ *une* ***orbite*** *à pour équation :*

$$x = x_1(t), y = x_2(t)$$

Et, le vecteur tangent en un point a *à pour composantes :*

$$f_1(t, X(t)), f_2(t, X(t))$$

Exemple 1.1.7

Soit f *une fonction différentiable sur un intervalle* I *à valeurs réel.*
En t_0 *la droite tangente* L *est de pente* $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0)$.
Donc
c'est la droite qui passe par $\begin{pmatrix} t_0 \\ x(t_0) \end{pmatrix}$ *de pente* $x'(t_0)$, *d'équation :*

$$y(t) - x(t_0) = x'(t_0)(t - t_0) \qquad (E_1)$$

Si on utilise une paramétrisation :

$$\Gamma \;:\; t \longmapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ t_0 \end{pmatrix} + (t - t_0) \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc c'est la droite passant par $\begin{pmatrix} x(t_0) \\ t_0 \end{pmatrix}$ *et le vecteur directeur* $\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dans le cas où $x(t)$ *est une solution de l'équation :* $x' = f(t,x)$ *On a :*

$$x'(t_0) = f(t_0, x(t_0))$$

Donc, la ***courbe solution*** *est* ***tangente*** *au vecteur* $\begin{pmatrix} t_0 \\ f(t_0, x(t)) \end{pmatrix}$. *En variant* t_0 *on voit que le graphe de* $x(t)$ *est tangent partout au champs du vecteur :* $\begin{pmatrix} t \\ f(t, x(t)) \end{pmatrix}$.

Définition 1.1.11 [*Prolongement*]

Soient (x, I) *et* $(\tilde{x}, \tilde{I})$ *deux solutions d'une même équation différentielle. On dira que* $(\tilde{x}, \tilde{I})$ *est* ***un prolongement*** *de* (I, x) *si* $I \subset \tilde{I}$ *et* $\tilde{x}|_I = x$.

Définition 1.1.12 [*Solution maximale*]

Soient I_0 *un intervalle réel et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. *On dit qu'une solution* x *est maximale sur* I_0 *s'il n'existe pas d'intervalle* $I^{'}$ *contenant* I_0 *telle que :* $(I^{'}, x)$ *est la solution de l'équation différentielle.*

Définition 1.1.13 [*Solution globale*]

Soit I *un intervalle inclus dans* $\mathbb{R}$ *.Une solution* (I, x) *est dite* ***globale*** *dans* I *si elle est définie sur l'intervalle* I *tout entier.*

Remarque 1.1.11

En reprenant les mêmes notations que dans les définitions précédentes, si une solution (x, I_1) *peut se prolonger sur l'intervalle* I_2 *tout entier,alors* x *est globale dans* I_2.

Remarque 1.1.12

Toute solution globale est maximale , mais la réciproque est fausse sauf si elle est bornée.

Exemple 1.1.8

Soient a , $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $x_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *la fonction définie par :*

$$x_\lambda(t) = \lambda e^{at}$$

x_λ *est une* ***solution maximale*** *de :* $x'(t) = ax(t)$

La restriction de x_λ *à l'ensemble* $]0, 1[$
i.e $x_\lambda|_{]0,1[}$ *est aussi une solution,mais ce n'est pas une solution maximale.*

1.1.3 Réduction à l'ordre 1

Avant de commencer à résoudre les équations différentielles d'ordre quelconque , il faut se rendre compte qu'il est possible de les réduire l'ordre à 1 en faisant un changement de variables, c'est pour cela qu'on doit tout d'abord préciser c'est quoi une réduction à l'ordre 1.

Principe de réduction

Cette réduction va nous permettre de diminuer l'ordre de dérivation mais l'espace d'arrivé de la fonction F va s'augmenter.

Méthode

Considérons l'EDO d'ordre n $(n \geq 2)$ suivante :

$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

où, x est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ (prenons m=1 en générale) et,

$$U = \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}_{n+1 fois} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Donc, On a p équations avec m inconnues et d'ordre n. On fait le changement d'inconnues $z = (x, x', \ldots, x^{(n-1)})$ .On a alors $z \in (\mathbb{R}^m)^n$ .Et, on note :

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

où chacun des $z_i = y^{(i-1)} \in \mathbb{R}^m, i = 1, \ldots, n$, on se troue alors avec des relations entre les z_i :

$$\begin{cases} z_i' - z_{i+1} & = 0 \\ F(t, z_1, z_2, \ldots, z_n, z_n') & = 0 \\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Donc, On a : $p + m(n-1)$ équations ,avec $m \times n$ inconnues d'ordre 1.

Exemple 1.1.9
Soit,

$$(S) \cdots \quad \begin{cases} x''(t) = 2x(t) + x'(t) + b(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + x'(t) \\ x(0) = x_0, x'(0) = x_0', y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ce système (S) équivalent à un système à 3 équations du premier ordre.
En effet, on introduit une nouvelle fonction inconnue $z(t)$ qui représente la vitesse $z(t) = x'(t)$ .On pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} x(t) & = z(t) \\ y(t) & = x(t) + y(t) + z(t) \\ z(t) & = 2x(t) + z(t) + b(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) & = x'(t) \\ y(t) & = x(t) + y(t) + x'(t) \\ z(t) & = 2x(t) + x'(t) + b(t) \end{cases}$$

Le système équivalent à $X' = AX + B$ avec condition initiale $X(0) = X_0$.

1.1.4 Problème de Cauchy

Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *et soit une fonction* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *. On note* $\|.\|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^n$*(toutes les normes sont équivalentes sur* $\mathbb{R}^n$ *)*

Définition 1.1.14 [*Problème de Cauchy*]

Étant donnée une équation différentielle d'ordre n *sous la forme normale :*

$$x^n = F(t, x, x^{'}, \dots, x^{n-1}) \tag{1.5}$$

où x *est une fonction de classe* C^n *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*. On note le problème de Cauchy de la façon suivante :*

$$\begin{cases} x^n & = F(t, x, x^{'}, \dots, x^{n-1}), \\ x(t_0) & = x_0 \\ \vdots & \\ x^{(n-1)}(t_0) & = x_{n-1} \end{cases} \tag{1.6}$$

où $x_0, \dots, x_{n-1}$ *s'appelle les conditions initiales du problème* (1.6).

Définition 1.1.15 [*Solution du Problème de Cauchy*]

Une solution du problème de Cauchy (1.6) *sur un intervalle ouvert* I *de* $\mathbb{R}$ *est une fonction de classe* C^n $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *telle que :*

i. *Pour tout* $t \in I$, $(t, x, x^{'}, \dots, x^{n-1}) \in U$.
ii. *Pour tout* $t \in I$, $x^n(t) = F(t, x, x^{'}, \dots, x^{n-1})$
iii. x *vérifie les conditions initiales.*

Définition 1.1.16

Le problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 1 par la relation suivante :

$$\begin{cases} x^{'} & = f(t, x), \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

D'où on a le théorème suivant concernant la solution du problème (1.7).

Théorème 1.1.1 [*Solution de* (1.7)]*[5]*

Supposons $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$*continue. Soit* $(t_0, x_0) \in U$ *et,* x *une fonction définie sur un intervalle ouvert* I *contenant* t_0 *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*.*
Une fonction x *est une solution de* (1.7) *sur* I *si et seulement si :*

i. *Pour tout* $t \in I$,$(t, x(t)) \in U$.
ii. x *est continue sur* I .
iii. *Pour tout* $t \in I$,$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$

1.2 Généralité sur les Systèmes Différentiels d'ordre 1

1.2.1 Systèmes Homogènes

Définition 1.2.1

On appelle un système différentielle **homogène** *le système suivant :*

$$\begin{cases} x_1' & = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \vdots \\ x_n' & = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \tag{1.8}$$

Remarque 1.2.1

Ce système peut être écrit sous la forme matricielle,

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t) \tag{1.9}$$

où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \ \ et \ \ F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.2

Le système (1.8) *est dit homogène si* $F = 0$ *. C'est-à-dire :*

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{1.10}$$

Théorème 1.2.1 *[5]*

L'ensemble H *des solutions d'un système différentiel* **homogène** *est un espace vectoriel de dimension finie.*

Définition 1.2.3

Soient n *fonctions* $X^1, X^2, \ldots, X^n$ *de* $I \longrightarrow \mathbb{R}^n$*.*

Elles sont dites linéairement indépendantes si pour tout $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X^i(t) = 0, \ \ \text{pour tout } \ t \in I \Rightarrow C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$$

Définition 1.2.4 [*Système fondamental*]

$X^1, \ldots, X^n$ est un système fondamental de solutions si $X^1, \ldots, X^n$ forme une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel des solutions.

Remarque 1.2.2

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est un espace vectoriel de dimension n.

Théorème 1.2.2 [*Solutions d'un système homogène*] *[5]*

Soient $X^1, \ldots, X^n$ un ensemble fondamental de solutions de (1.10).
alors toute solution X de (1.10) est de la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i X^i(t), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

1.2.2 Systèmes Non Homogènes

Prenons maintenant le système (1.9) avec F non identiquement nulle. Alors toute solution x de (1.9) s'écrit sous la forme :

Théorème 1.2.3 [*Solutions d'un système non homogène*] *[5]*

*Soient $X^1, \ldots, X^n$ un ensemble fondamentale de solutions du problème homogène (1.10) et X_p une solution **particulière** de (1.9) est de la forme :*

$$X(t) = X_p + \sum_{i=1}^{n} C_i X^i(t), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Exemple 1.2.1

Soit l'équation,

$$y' - y \tan x = e^x \qquad \ldots (E)$$

$$\frac{dy_0}{dx} - y_0 \tan x = 0 \Rightarrow \frac{dy_0}{y_0} = \frac{\sin x}{\cos x} ds \quad \Rightarrow Lny_0 = -Ln(cosx) + C$$
$$\Rightarrow y_0 = \frac{D}{cosx}$$

$$\frac{dy_1}{dx} - y_1 \tan x = e^x \ \text{ on assume } y_1 = \frac{D(x)}{\cos x} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx} = \frac{D'(x)cosx + D(x)sinx}{cos^2 x}$$

$\frac{D'(x)}{cosx} = e^x \Rightarrow D'(x) = cosxe^x$

$\begin{cases} u = cosx \\ v' = e^x \end{cases}$

$\begin{cases} u' = -sinx \\ v = e^x \end{cases}$

$$D(x) = cosxe^x + \underbrace{\int sinxe^x dx}_{(I)}$$

$$(I) \Rightarrow \begin{cases} u = sinx \\ v' = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} u' = cosx \\ v = e^x \end{cases}$$

$(I) \Rightarrow sinxe^x - \underbrace{\int cosxe^x dx}_{D^*(x)} \Rightarrow 2D^*(x) = (cosx + sinx)e^x$

$y_1(x) = \frac{e^x}{2}(1 + \tan x)$

$$y(x) = \frac{D}{cosx} + \frac{e^x}{2}(1 + \tan x)$$

2 Les différents Types de Stabilités

Il existe tant de types de stabilités différentes pour caractériser l'évolution d'un point vers son état stable. Les principaux types de stabilités sont abordés ici en supposant que la solution x existe. Traitons dans ce chapitre la stabilité ou l'instabilité par rapport au systèmes autonomes,en donnant quelques définitions de base afin de définir les divers types de stabilité.

2.1 Notions Fondamentales de la Stabilité

La stabilité est l'un des aspects essentiels dans l'étude de la solution des systèmes différentiels et sa notion à pour but de formaliser la propriété de ces systèmes.

Ce qui veut dire que les propriétés des systèmes différentiels sont étroitement liées à l'évolution des points d'équilibres du système .

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1 [*Point d'équilibre*]

Le point x^* est dit ***point d'équilibre*** *si et seulement si $f(x^*) = 0$,autrement dit x^* est une solution constante de l'équation :*

$$x'(t) = f(x(t))$$

i.e Lorsque $x(t_0) = x^*$ alors, $x(t) = x^*, \quad \forall t \geq t_0$.

Remarque 2.1.1

1. *Une équation différentielle peut admettre un point d'équilibre ,plusieurs points d'équilibres ou aucun.*
2. *concernant le point d'équilibre on peut l'appeler aussi un point* ***singulier*** *, un point* ***fixe*** *,et parfois point* ***critique***.

Définition 2.1.2 [*Point régulier*]

Le point x_1 est dit un ***point régulier*** *s'il n'est pas un* ***équilibre*** *,i.e si et seulement si $f(x^*) = 0$.*

Définition 2.1.3 [*Point hyperbolique*]
Un équilibre x^* *est dit* ***hyperbolique*** *si* $\dfrac{df}{dx}(x^*) \neq 0$

Exemple 2.1.1

1. *L'équation* $x' = \alpha x$ *n'admet qu'un* ***seul*** *point d'équilibre* $x^* = 0$.
2. *L'équilibre* $x' = \sin x$ *admet une* ***infinité*** *de point d'équilibre* $x^* = \pm K\pi (K \in N)$
3. $x' = f(x) = e^x$ *cette équation n'admet* ***aucun*** *point d'équilibre*

Définition 2.1.4 [*Point Stationnaire*]
un point x^* *est dit* ***point stationnaire*** *(ou équilibre) de l'équation :* $x' = f(x)$ *si et seulement si* $f(x^*) = 0$.

Remarque 2.1.2

Un point stationnaire au sens d'une fonction f dont on peut calculer la dérivée f' *et la dérivée seconde* f'' *est un point où la dérivée s'annule :* $f'(x) = 0$.
En un point stationnaire, la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ *est* ***horizontale***.

Exemple 2.1.2

i) L'équation $x' = x(1-x)$ *possède deux points stationnaires :* $x_1^* = 0$ *et* $x_2^* = 1$.
ii) L'équation du pendule $x'' = sinx$ *, qui s'écrit aussi* $x' = y, y' = sinx$ *possède deux points stationnaires :* ($x = 0,\ y = 0$) *et* ($x = \pi,\ y = 0$) *(rappelons que x est défini modulo* 2π *).*

2.1.2 Stabilité et instabilité

Définition 2.1.5 [*Stabilité d'un point d'équilibre*]

Le point d'équilibre x^* *de l'équation différentielle* $x'(t) = f(x(t))$ *est :*

a. ***<u>Stable :</u>*** *Si , pour tout* $\epsilon > 0$ *, il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute solution x(t) de l'équation différentielle on a :*
$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.1}$$

b. ***<u>Instable :</u>*** *Le point d'équilibre est dit* ***instable*** *s'il* ***n'****est* ***pas*** *stable.*

Définition 2.1.6 [*L'attractivité d'un équilibre*]

a. Le point d'équilibre x^* *est* ***attractif*** *s'il existe* $\delta > 0$ *tel que :*

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \longrightarrow \infty} x(t) = x^* \tag{2.2}$$

i.e $\lim_{t \longrightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$

b. Le point d'équilibre x^* *est* ***globalement attractif*** *si ,pour tout* $x_0 \in I \subset \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} x(t) = x^* \tag{2.3}$$

(i.e) $\lim_{t \longrightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0.$

Remarque 2.1.3

1. *Le point d'équilibre* x^* *est* ***asymptotiquement stable*** *s'il est* <u>*stable*</u> *et* <u>*attractif*</u>
2. *L'attractivité n'implique pas la stabilité sauf dans le cas linéaire :*

$$\dot{x} = Ax$$

2.2 Les Types de Stabilité

La définition précédente de la stabilité est la forme la plus faible elle n'implique pas que les trajectoires $X(t, t_0, x_0)$ *tend vers (converge vers) le point d'équilibre.*

Pour cela il existe plusieurs notions de stabilité qu'on vas les mentionner.

2.2.1 Stabilité Asymptotique

Définition 2.2.1

Le point d'équilibre x^* *est dit* ***asymptotiquement stable*** *s'il stable, et il existe* $r > 0$ *tel que : pour toute solution x(t) de* $\dot{x}(t) = f(x(t))$ *on a :*

$$\|x_0 - x^*\| \leq r \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t) - x^*\| = 0$$

Exemple 2.2.1

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{-x}{1+t} \\ t \geq t_0, \qquad\qquad t_0 \in \mathbb{R}_+ \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Ce système admet une solution de la forme :

$$\begin{aligned} X(t,t_0,x_0) &= x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{-1}{1+s} ds\right), \\ &= x_0 \exp\left(-\left[log(1+s)\right]_{t_0}^{t}\right), \\ &= x_0 \left(\frac{1+t_0}{1+t}\right). \end{aligned}$$

Remarquons que l'équilibre $x^* = 0$ *est stationnaire et de plus on a :*

$$\lim_{t\to\infty} X(t,t_0,x_0) = 0$$

Donc,
Le point d'équilibre est ***asymptotiquement stable***.

2.2.2 Stabilité Uniforme

Définition 2.2.2 [*Stabilité Uniforme*]

Le point x^* *est dit* ***uniformément stable*** *, si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \|x_0 - x^*\| \leq \eta \Rightarrow \|\phi(t,x_0) - x^*\| \leq \epsilon, \quad \forall t > 0$$

2.2.3 Stabilité asymptotique uniforme

Définition 2.2.3 [*Stabilité asymptotique Uniforme*]

Le point d'équilibre x^* *est dit uniformément asymptotiquement stable ,si :* x^* *est uniformément stable et si :*

$$\exists \rho > 0 \|x_0 - x^*\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} \phi(t,x_0) = x^*$$

Définition 2.2.4

On appelle ***flot*** *l'application* $\phi : \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *qui à* (x_0,t) *associe* $\phi(t,x_0)$.

2.2.4 Stabilité en temps fini

Dans cette sous-section on s'intéressant à un autre type de stabilité appelé ***stabilité en temps fini*** *qui signifie que les solutions du système atteignent le point d'équilibre en un temps fini et y restent.*

Pour cela commençons en donnant un exemple élémentaire de système stable en temps fini dont on connait explicitement les solutions.

Soit, l'équation

$$\dot{x} = -\varphi_a(x), \quad x \in \mathbb{R}, a \in]0,1[\tag{2.4}$$

où $\varphi_a(x) = |x|^a sgn(x)$ *dont les solutions partant de x en* $\tau = 0$ *sont données par :*

$$\phi^x(\tau) = \begin{cases} sgn(x)(|x|^{1-a} - \tau(1-a))^{\frac{1}{1-a}} & si \;\; 0 \leq \tau \leq \frac{|x|^{1-a}}{1-a} \\ 0 & si \;\; \tau > \frac{|x|^{1-a}}{1-a} \end{cases}$$

Les solutions décroisent et finissent par être nulles à partir d'un certain temps.Le système (2.4) *est donc* ***stable en temps fini****.*

En réalité,il existe une fonction ***temps d'établissement*** *qui donne le temps mis par les solutions pour rejoindre l'équilibre qui est ici l'origine (* $x^* = 0$*).*

D'une manière classique, dans le cas autonome,cette fonction ne dépend que de l'état initial de la solution.Mais ,pour les systèmes non autonome ,elle peut aussi dépendre du temps initial associé à l'état initial de la solution.

A / Système non-autonomes continues

Considérons les systèmes de la forme :

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

où $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n$ *. On note* $\phi_t^x(\tau)$ *une solution du système* (2.5) *partant de* $(t,x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n$ *et* $S(t,x)$ *représente l'ensemble des solutions* ϕ_t^x

Pour un tel système donnons la définition de la stabilité en temps fini.

Définition 2.2.5

Le point d'équilibre (l'origine) $x^* = 0$ *du système* (2.5) *est* ***faiblement stable en temps fini*** *si :*

1. *L'origine est stable pour le système* (2.5)*,*
2. *Pour tout* $t \geq 0$*, il existe* $\delta(t) > 0$ *,tel que si* $x \in \delta(t)\mathbf{B}^n$ *alors,*
   (a) ϕ_t^x *est définie pour* $\tau \geq t$*,*
   (b) *Il existe* $0 \leq T(\phi_t^x) < +\infty$ *tel que* $\phi_t^x(\tau) = 0$ *pour tout* $\tau \geq t + T(\phi_t^x)$*.*
   $$T_0(\phi_t^x) = \inf\{T(\phi_t^x) \geq 0 : \; \phi_t^x(\tau) = 0 \forall \tau \geq t + T(\phi_t^x)\}$$
   S'appelle ***le temps d'établissement*** *de la solution* ϕ_t^x*.*
3. *De plus, si* $T_0(t,x) = \sup\limits_{\phi_t^x \in S(t,x)} T_0(\phi_t^x) < +\infty$ *, alors l'origine du système* (2.5) *est* ***stable en temps fini****.*

   $T_0(t,x)$ *s'appelle* ***le temps d'établissement*** *du système* (2.5) *et* T_0 *la fonction temps d'établissement du système* (2.5)*.*

Lorsque le système est asymptotiquement stable,le temps d'établissement d'une solution est en général infini.

Si le second membre du système (2.5) *est continu sur* $\mathbb{R}_{\geq 0} \times V$ *et localement lipschitzienne sur* $\mathbb{R}_{\geq 0} \times V \backslash \{0\}$*,l'unicité des solutions en dehors de l'origine assure que le temps d'établissement d'une solution et le temps d'établissement du système sont les mêmes :* $T_0(t,x) = T_0(\phi_t^x)$*.*

Définition 2.2.6

*Une fonction **Définie Positive** veut dire :*
Soit E un R-espace vectoriel de dimension finie, et f une forme bilinéaire symétrique sur F. On dit que f est :

- ***positive** si pour tout x de E,* $f(x,x) \geq 0.$
- ***définie** si pour tout x de E,* $f(x,x) = 0$ *entraîne* $x = 0.$
- ***définie positive** si elle est définie et positive.*

Définition 2.2.7
Le point d'équilibre $x^* = 0$ *du système* (2.5) *est **uniformément stable en temps fini** si :*

1. *Elle est uniformément asymptotiquement stable ;*

2. *Elle est stable en temps fini ;*

3. *Il existe une fonction continue définie positive* $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *telle que le temps d'établissement du système* (2.5) *vérifie :*
$$T_0(t,x) \leq \alpha(\|x\|).$$
Comme $x \mapsto T_0(t,x)$ *n'est en général pas continue à l'origine,* α *n'est en général pas de classe* K.

B / Systèmes autonomes scalaires

Concernant cette partie sera commencer par un rappel d'un résultat élémentaire donné dans [8] sur la stabilité en temps fini des systèmes autonomes scalaires de la forme :

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *.Dans ce cas particulier, il existe une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini.*

Lemme 2.2.1 *[8]*

Supposons que l'origine soit un point d'équilibre $(x^* = 0)$ *du système* (2.6) *où* f *est continue.*

*Alors, l'origine est **stable** en temps fini pour le système* (2.6) *si et seulement s'il existe un voisinage V de l'origine tel que pour tout* $x \in V\backslash\{0\}$,

i. $xf(x) < 0$ *et,*
ii. $\int_x^0 \frac{dz}{f(z)} < +\infty$

Démonstration

a] $(\Leftarrow)$

Comme, $xf(x) < 0$, $V(x) = x^2$ *est une fonction de Lyapunov* ***[Voir le chapitre 3]*** *pour le système.*
Donc, l'origine du système (2.6) *est* ***asymptotiquement stable****.*
Soit,
$\phi^x(\tau)$ *une solution du système qui tend vers l'origine en un temps* $T(\phi^x)$.

Montrons que : $T(\phi^x) < +\infty$??

D'après la stabilité asymptotique,si x est choisi suffisamment ***petit*** *alors,* $\tau \longmapsto \phi^x(\tau)$ *est strictement monotone pour* $\tau \geq 0$.
De plus,on a :

$$T(\phi^x) = \int_0^{T(\phi^x)} d\tau$$

Comme $xf(x) < 0$ *pour tout* $x \in V\backslash\{0\}$, $\frac{1}{f}$ *est défini sur* $V\backslash\{0\}$*. En utilisant le changement de variable,* $[0, T(\phi^x)[\longrightarrow]0, x]$, $\tau \longmapsto \phi^x(\tau)$ *on a :*

$$\int_0^x \frac{dz}{f(z)} = \int_0^{T(\phi^x)} \frac{\phi^x(\tau)}{f(\phi^x(\tau))} d\tau = T(\phi^x) < +\infty$$

$T(x) = \underset{\phi^x \in S(x)}{Sup}\ T(\phi^x)$ *est indépendant des solutions* ϕ^x *et on en conclut que l'origine du système* (2.6) *est* ***stable*** *en temps fini avec* <u>*le temps d'établissement*</u> $T_0(x) = T(\phi^x)$ *vérifiant :*

$$T_0(x) = \int_x^0 \frac{dz}{f(z)}$$

b] $(\Rightarrow)$

Supposons que l'origine du système (2.6) *soit stable en temps fini. Soit* $\delta > 0$ *donné par la définition* (2.2.5).

Supposons qu'il existe $x \in]-\delta, \delta[\backslash\{0\}$ *tel que :* $xf(x) \geq 0$.

i. $xf(x) = 0$ *alors,* $f(x) = 0$ *et* $\phi^x(\tau) \equiv x$ *est une solution du système* (2.6) *qui ne tend pas vers l'origine.*

ii. $xf(x) > 0$ *alors,on peut supposer sans perte de généralité que* $x > 0$ *et* $f(x) > 0$.

D'après la continuité de f et comme $f(x) > 0$, *on a donc* $f(z) > 0$ *pour z dans un voisinage de x. Ainsi,la fonction* $\tau \longmapsto \phi^x(\tau)$ *est croissante dans un voisinage de l'origine.*

D'après la continuité,cette solution ne peut pas tendre vers l'origine .

Soit, $x \in]-\delta, \delta[\backslash\{0\}$ *et considérons la solution* $\phi^x(\tau)$ *.Par hypothèse, il existe* $0 \leq T_0(\phi^x) < +\infty$ *tel que :*

$$\phi^x(\tau) = 0 \quad \text{pour tout } \tau \geq t + T_0(\phi^x)$$

D'après la stabilité asymptotique, x *peut être choisi suffisamment* ***petit*** *pour que* $\tau \longmapsto \phi^x(\tau)$ *soit strictement décroissante pour* $\tau \geq t$.

En utilisant le changement de variables $[0, T_0(\phi^x)[\longrightarrow]0, x],\ \tau \longmapsto \phi^x(\tau)$ *on obtient :*

$$\int_x^0 \frac{dz}{f(z)} = \int_0^{T_0(\phi^x)} d\tau = T_0(\phi^x) < +\infty$$

Le temps d'établissement d'une solution de (2.6) *et le temps d'établissement du système* (2.6) *sont* ***égaux*** *et,*

$$T_0(x) = \int_x^0 \frac{dz}{f(z)}$$

Si le système (2.6) *est* ***globalement défini*** *et si les conditions du* (2.2.1) *sont vérifiées pour tout* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ *alors, l'origine est* ***globalement stable*** *en temps fini.*

De plus,il est évident que pour les systèmes autonomes ,la stabilité ***uniforme*** *en temps fini est équivalente à la stabilité en temps fini.*

Exemple 2.2.2

Soit, $a \in]0, 1[$, *considérons le système :*

$$\dot{x} = -\varphi_a(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

On a : $-x\varphi_a(x) < 0$ *pour* $x \neq 0$ *,et si* $x \in \mathbb{R}$ *alors,*

$$\int_x^0 \frac{dz}{-|z|^a sgn(z)} = \frac{|x|^{1-a}}{1-a} < +\infty$$

Les hypothèses du (2.2.1) *sont ainsi satisfaites.Donc, l'origine est* ***stable*** *en temps fini et les solutions* $\phi^x(\tau)$ *tendent vers l'origine avec le temps d'établissement :*

$$T_0(x) = \frac{|x|^{1-a}}{1-a}$$

Les mêmes conclusions avaient été obtenue en calculant explicitement les solutions du système (2.4) . *(i.e) au but de donner une condition suffisante puis une autre nécessaire et c'était bien ce que nous avons donné comme résultats sur la stabilité en temps fini sur la base de [8].*

C / En Cas Général

Pour les systèmes plus généraux décrits par (2.5).*Une extension naturelle des résultats précédents serait l'utilisation des fonctions de* ***Lyapunov*** *et c'est ce qu'on vas le détaillé dans le* 4^{ieme} *chapitre.*

Pour une idée général de notre prochains détails nous allons montrer comment l'utilisation de ces fonctions de Lyapunov permet d'obtenir des conditions suffisantes puis nécessaires de stabilité en temps fini.

2.2.5 Stabilité Exponentielle

Définition 2.2.8 [*La Stabilité Exponentielle*]

Un point d'équilibre x^* est ***exponentiellement stable*** *pour l'équation s'il existe deux scalaires strictement positifs K et α tels que :*

$$\|x(t) - x^*\| \leq K\|x_0 - x^*\|exp(-\alpha t)$$

Exemple 2.2.3

Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = -(1 + sin(x^2))x, \quad avec\ \ x(0) = x_0$$

Il est bien clair que $x^* = 0$ est un point d'équilibre.

- *La solution du système est donné par :*

$$x(t) = x(0)exp\left(\int_0^t -(1 + sin(x^2(s)))ds\right), \quad \forall t \geq 0$$

Et, $|x(t)| \leq K|x_0|exp(-t)$
D'où on a la stabilité exponentielle .

Remarque 2.2.1

Si un point d'équilibre est stable mais pas asymptotiquement stable on parle de la stabilité ***neutre****.*

2.2.6 Stabilité Locale et Globale

D'après les définitions précédentes la stabilité est définie dans chacune d'une façon ***locale*** *puisque elle est reliée à la notion de voisinage.Et, maintenant passant à définir c'est quoi une stabilité locale et globale*

Définition 2.2.9 [*Stabilité Locale et Globale*]

Si un système est ***stable asymptotiquement*** *(exponentiellement) pour n'importe quelle condition initiale dans* $\mathbb{R}^n$ *,on dira que le point d'équilibre* $x^* = 0$ *est* ***asymptotiquement*** *(exponentiellement)* ***stable*** *au sens large.*

On dira aussi qu'il est ***globalement*** *asymptotiquement(exponentiellement)stable.*

Remarque 2.2.2

Le point d'équilibre est ***globalement stable*** *si il est stable pour toute condition initiale* $x_0 \in \mathbb{R}$ *,généralement on ne peut pas toujours prouver la stabilité globale,et c'est pour cela qu'on s'intéresse à la* ***stabilité locale*** *et on essaye de la prolonger vers le cas globale.*

Lemme 2.2.2 *[3]*

Soit x^* *un point d'équilibre de l'équation :*

$$\begin{aligned} x' &= f(x), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

où $x \in U, \;\; f : \; U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
Alors, les implications suivantes sont vraies :

x^* *est* ***stable*** $\Longrightarrow$ x^* *est* ***asymptotiquement stable*** $\Longrightarrow$ x^* *est* ***exponentiellement stable****.*

Étude Locale

1. **Cas Linéaire**

Soit,

$$f(x) = \lambda x, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Le seul point d'équilibre c'est $x^* = 0$ *.La solution de l'équation :*

$$x' = \lambda x$$

Est donnée par : $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

i. *Si* $\lambda < 0$ *alors,* $\lim\limits_{t \to +\infty} x_0 e^{\lambda t} = 0, \;\; \forall x_0$ *.On dit alors que le point d'équilibre* x^* *est* ***globalement asymptotiquement stable****.*

ii. *Si* $\lambda > 0$ *alors,* $\lim_{t \to +\infty} x_0 e^{\lambda t} = \pm\infty$ *.On dit que le point d'équilibre* x^* *est* ***instable***.

iii. *Si* $\lambda = 0$ *alors,* $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_0$ *.On dit que le point d'équilibre* x^* *est* ***neutralement stable***.*(i.e)* ***ni on s'éloigne ni on s'approche de*** x^* ***quand*** $t \longrightarrow +\infty$.

2. **Cas non-Linéaire**

Soit, x^* *un point d'équilibre de l'équation :* $x' = f(x)$

On veut déterminer si x^* *est* ***localement stable*** *ou pas, pour cela on introduit une nouvelle variable* ***local*** *:* $U(t) = x(t) - x^*$

$U(t) = 0$ *lorsque* $x(t) = x^*$

On a : $\dot{x} = f(x)$ *et* $U(t) = x(t) - x^* \Rightarrow U'(t) = x'(t) = f(x)$

Comme $x(t)$ *est un voisinage de* x^* *(**constant**) ,on peut utiliser le développement de* ***Taylor***[1]*au premier ordre au voisinage de* x^*.

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= \underbrace{f(x^*)}_{=0} + \frac{df}{dx}(x^*) \underbrace{(x - x^*)}_{=U(t) par hypothese} + \theta(x - x^*) \\
&= \underbrace{\frac{df}{dx}(x^*)}_{=\lambda^*} U(t) \;\; [x^* \;\; equilibre \Rightarrow f(x^*) = 0] \\
&= \lambda^* U(t).
\end{aligned}$$

(i.e) $U'(t) = U_0 e^{\lambda^* t}$ *(En négligeant* $\theta(U)$*)*

La stabilité du point d'équilibre est donnée donc par le signe de λ^* *:*

i. *Si* $\lambda^* < 0$ *alors,* $\lim_{t \to +\infty} U(t) = 0$ *d'où,* $x(t) \Rightarrow x^*$ *et donc,* x^* *est un équilibre* ***stable***.

ii. *Si* $\lambda^* > 0$ *alors,* $\lim_{t \to +\infty} U(t) = \pm\infty$ *selon le signe de* U_0 *d'où* $x(t)$ *s'éloigne de* x^* *et donc,*x^* *est* ***instable***.

iii. *Si* $\lambda^* = 0$ *la linéarisation n'apporte pas d'information sur la dynamique locale ce qui fait qu'on dit à propos de* x^* *qu'il est* ***non hyperbole*** *(dégénérer).*

1. **Développement de Taylor :**

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \mathcal{R}_n(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \underbrace{\mathcal{R}_n(x)}_{\text{le reste}}$$

Exemple 2.2.4

Soit l'équation :

$$x' = (x^2 - 4)(x - 3)$$

(i.e) $(f(x) = (x^2 - 4)(x - 3))$

L'équation admet 3 points d'équilibre tels que :

$$x_1^* = -2 \quad ; \quad x_2^* = 2 \quad ; x_3^* = 3$$

On a :

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$$

i. $\lambda_1^* = f'(x_1^*) = f'(-2) = 20 > 0$ *alors,* x_1^* *est* ***instable***

ii. $\lambda_2^* = f'(x_2^*) = f'(2) = -4 < 0$ *alors,* x_2^* *est* ***stable***

iii. $\lambda_3^* = f'(x_3^*) = f'(3) = 5 > 0$ *alors,* x_3^* *est* ***instable***

Conclusion

D'après ce qu'on a eu dans ce chapitre nous avons bien définie quelques notions de stabilité, pour passer à ses divers types.

On a essayer de donner en cohérence pour chacune de ces types une simple définition accompagnée par un petit exemple pour atteindre la compréhension du lecteur.

Passant au $3^{ème}$ *chapitre qui concerne la* ***fonction de Lyapounov*** *et c'est par là qu'on vas mieux comprendre l'utilité de cette fonction afin d'inspecter son rapport avec la stabilité.*

3 Fonction de lyapunov

Dans ce chapitre nous allons introduire la notion de la fonction de lyapunov en précisant ses conditions d'application.

Commençons par définir quelques fonctions connus illustrées par des exemples compréhensives. Ensuite, vous pouvez mieux comprendre c'est quoi une fonction de lyapunov .

En plus, on parlera sur l'existence et l'unicité de solution d'une équation différentielle et la fonction de lyapunov en basant sur des théorèmes fondamentaux bien démontrés.

3.1 Définitions

Cette section concerne quelque définitions des fonctions qu'on doit les connaitre accompagner par des exemples simples pour atteindre la compréhension du lecteur.

3.1.1 Fonctions de classe $\mathcal{K}$

Définition 3.1.1 [*Fonctions de classe* $\mathcal{K}$]

Soit $a \in \mathbb{R}^{+}\backslash 0$ *et* $\varphi : [0, a] \longmapsto \mathbb{R}^{+}$ *d'espace fonctionnels une application continue.*
On dit que φ *est de* ***classe*** $\mathcal{K}$ *si :*

1. φ *est strictement croissante ,*
2. $\varphi(0) = 0$

Exemple 3.1.1

φ *la fonction définie sur* $[0, a],\ a > 0$ *par :*

$$\varphi(x) = \arctan(x)$$

φ *est de classe* $\mathcal{K}$ *car :*
a. $\varphi(0) = 0$

b. $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} \ > 0$

Définition 3.1.2 [*Fonctions de classe* $\mathcal{K}^\infty$]

Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une application continue, on dit que* φ *est de* ***classe*** $\mathcal{K}^\infty$ *si :*

1. φ *est strictement croissante ,*
2. $\varphi(0) = 0$,
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$

Exemple 3.1.2

Soit $c > 0$ *,* φ *est une application définie sur* $\mathbb{R}_+$ *par :*

$$\varphi(x) = x^c$$

continue, on a φ *est de classe* $\mathcal{K}^\infty$ *car :*

a. $\varphi(0) = 0$, φ *est continue*

b. $\varphi'(x) = cx^{c-1} \ > 0$, *Ce qui fait que* φ *est strictement croissante.*

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^c = +\infty$

Remarque 3.1.1

Dans l'exemple (3.1.1) *la fonction*$\varphi(x)$ *est de classe* $\mathcal{K}$ *,mais elle n'est pas de classe* $\mathcal{K}^\infty$ *car :* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

3.1.2 Fonctions semi-définies positives

Définition 3.1.3

Une fonction $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite* ***semi-définie positive*** *(respectivement semi-définie négative) s'il existe un voisinage* U *de 0 tel que :*

1. $V(0) = 0$,
2. $\forall x \in U \ , \ V(x) \geq 0$ *(respectivement* $V(x) \leq 0$ *).*

Exemple 3.1.3

Soit la fonction V définie par :

$$V(x) = x_1^2 + (x_2 + x_3)^2$$

L'équation (4.1) *est semi-définie positive dans $\mathbb{R}$.*

Définition 3.1.4

Une fonction $V : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite ***semi-définie positive*** *(respectivement semi-définie négative) s'il existe un voisinage U de 0 te que :*

1. $\forall t \in I \;,\; V(t, 0) = 0,$
2. $\forall t \in I \;,\; \forall x \in U \;,\; V(t, x) \geq 0$ *(respectivement $V(t, x) \leq 0$).*

3.1.3 Fonctions définies positives

Définition 3.1.5

Une fonction $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continument différentiable (par rapport à x) est dite ***définie positive*** *(respectivement définie négative) s'il existe un voisinage U de 0 te que :*

1. $V(0) = 0,$
2. $\forall x \in U \,/ x \neq 0 \;,\; V(x) > 0$ *(respectivement $V(x) < 0$).*

Exemple 3.1.4

Les fonctions suivantes définies par :

i) $V(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *est définie positive dans $\mathbb{R}^3$.*

ii) $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ *est définie positive dans $\mathbb{R}^2$,mais semi-définie positive dans $\mathbb{R}^3$.*

iii) $V(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1^4 - x_2^4$ *est définie positive à l'intérieur de U (voisinage de 0).*

3.1.4 Fonctions quadratiques définies positives

Définition 3.1.6

Une matrice symétrique $M_{n\times n}$ *est dite :*

1. *semi-définie positive si : pour tout vecteur* $x_{n\times 1}$ *,*
   $x^T Mx \geq 0.$
2. *définie positive si :*

   – $x^T Mx = 0$ *pour* $x = 0,$

   – $x^T Mx > 0$ *,* $\forall x \neq 0.$
3. *semi-définie négative (respectivement définie négative) si :* $(-M)$ *est semi-définie positive (respectivement définie positive).*

Définition 3.1.7

Une matrice $M = \begin{pmatrix} n_1 & n \\ n & n_2 \end{pmatrix}$ *est semi-définie positive si :* $n_1, n_2 \geq 0$ *et* $\det (M) \geq 0.$
Donc,
M *est semi-définie négative si :* $-n_1, -n_2 \geq 0$ *et* $\det (M) \geq 0$
La matrice M *est définie positive si :* $n_1 > 0$ *et* $\det (M) > 0$
Donc,
M *est définie négative si :* $-n_1 > 0$ *et* $\det (M) > 0$ *.*

Définition 3.1.8

Une fonction quadratique $V(x) = x^T Mx$ *ou* $M_{n\times n}$ *est une matrice réelle symétrique, est dite définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice* $M_{n\times n}$ *sont strictement* ***positives****.*

Remarque 3.1.2

Les fonctions quadratiques sont souvent utilisées dans l'étude des systèmes dynamiques (fonction de lyapunov).

3.1.5 Fonctions radialement non bornées

Définition 3.1.9

i. *Une fonction* $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite* ***radialement non bornée*** *si :*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} V(x) = +\infty$$

ii. *Une fonction* $V : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* ***radialement non bornée*** *si :*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} V(t,x) = +\infty$$

uniformément en t.
i.e $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ (\ \|x\| > \delta\ ) \implies (\ \forall t \in I,\ V(t,x) > \varepsilon\ ).$

En cas ou V *sera continue la définition peut être reformulée par une autre forme suivante :*

Définition 3.1.10

Une fonction $V : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue est dite* ***radialement non bornée*** *s'il existe une fonction* φ *de classe* $\mathcal{K}^\infty$ *telle que :*

$$V(t,x) \geq \varphi(\|x\|)\ ,\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3.1.6 Fonctions décrescentes

Définition 3.1.11

Une fonction $V : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite* ***décrescente*** *si :*

$$\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} V(t,x) = 0$$

uniformément en t.
i.e $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in U,\ \ (\ \|x\| < \delta\ ) \implies (\ \forall t \in I,\ V(t,x) < \varepsilon\ )$

En cas ou V *est continue, la définition se reformule par la suivante :*

Définition 3.1.12

Une fonction $V : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite* ***décrescente*** *si et seulement si : un voisinage* U_{t_0} *et une fonction* ψ *de classe* $\mathcal{K}$ *telle que :*

$$|V(t,x)| \leq \psi(\|x\|) \quad , \quad \forall (t,x) \in U_{t_0}$$

Exemple 3.1.5

Prenons une fonction V *définie par :*

$$V(t,x) = (1+\sin^2(t))(x_1^2 + x_2^2)$$

qui est dominée par la fonction :

$$\alpha(x) = 2(x_1^2 + x_2^2)$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{K}$ *. Donc,* V *est* ***décrescente****.*

3.2 Existence et unicité et la fonction de Lyapunov

Dans cette section on fera toute une étude de l'existence et l'unicité de solution d'un système d'équation différentielle en appliquant quelques théorèmes fondamentaux connus.

Avant de traiter ce dernier on commencera par la notion d'une fonction de Lyapunov qui sera mentionnée tout au long de cette monographie.

3.2.1 Fonction de lyapunov

Dans cette partie on vas s'intéresser seulement au systèmes non-autonomes.

Définition 3.2.1

Considérons un système d'équation différentielle défini par :

$$\begin{cases} x' & = F(t,x(t)) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $F \; : \; \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *continue en* t*.*

On désigne par $x(t)$ *la solution de* (3.1) *issue du point* (t_0, x_0) *qui satisfait une équation intégrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,x(s))ds \tag{3.2}$$

Définition 3.2.2 [*Fonction de Lyapunov*]

Prenons le système (3.1) *,et soit* $\mathcal{U}$ *un voisinage de zéro avec* $V\ :\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction continue et différentiable sur* $\mathcal{U}$.

1. *On dit que* V *est une fonction de Lyapunov au sens large en* 0 *,si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

   i. V *est définie positive,*

   ii. $V^{'}(t,x)\leq 0$ *pour tout* $x\in\mathcal{U}$

2. *On dit que* V *est une fonction de Lyapunov stricte en* 0 *,si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

   i. V *est définie positive,*

   ii. $V^{'}(t,x)<0$ *pour tout* $x\in\mathcal{U}\backslash 0$

Remarque 3.2.1

La dérivée V' *d'une fonction* V *est définie par :*

$$V^{'}(t,x)=\langle\nabla V(t,x),\ F(t,x)\rangle$$

où $\langle .,.\rangle$ *désigne le produit scalaire dans l'espace considéré et* ∇ *l'opérateur gradient.*

3.2.2 Existence et unicité

Cette partie est consacrée à toute une étude d'existence et unicité de solution du système (3.1) *à l'aide de certains théorèmes .*

Théorème 3.2.1

Si $F(t,x)$ *est continue sur* $\mathcal{D}$: $|t-t_0|\leq a$, $\|x-x_0\|\leq b$ *et si* $\|F(t,x)\|\leq M$ *sur* $\mathcal{D}$. *alors, il existe une solution* $x(t)$ *de* (3.1) *sur* $|t-t_0|\leq\alpha$ *pour lequel* $\|x(t)-x_0\|\leq b$ *et* $x(t_0)=x_0$ *où* $\alpha=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$.

Ce théorème peut être prouvé en appliquant le théorème suivant [4] :

Théorème 3.2.2 [*Théorème d'Ascoli*][20]

Soit J *un intervalle borné. Si* $F=\{f\}$ *un ensemble infini de fonctions,uniformément borné, équicontinu de fonctions.*
alors il existe une suite de fonctions $(f_k)_{k\geq 1}$, $k=1,2,\ldots$ *converge uniformément sur* J.

Pour d'autre théorèmes fondamentaux ,voir [4] [12]

Notation 3.2.1

Notons par $C_0(x)$ *la famille des fonctions qui satisfait localement une condition de Lipschitz avec le respect à* x.
Et, si pour tout ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$ *,il existe un constant* $\mathcal{L}(K) > 0$ *tels que :*

$$\|f(t,x) - f(t,x^{'})\| \leq \mathcal{L}(K)\|x - x^{'}\| \,, \quad \textit{pour}\, x \in K,\ x^{'} \in K$$

Nous écrirons $f(t,x) \in \overline{C_0}(x)$.

Pour l'unicité des solutions ,beaucoup de conditions suffisantes sont bien connues [4], [9]

Notation 3.2.2

Les systèmes perturbés sont présentés par la forme

$$x^{'}(t) = f(t,x(t)) + g(t,x(t))$$

Pour ce système (3.2.2) *, supposons que :*

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} f(t,0) = & 0 \\ & \\ g(t,0) = & 0 \end{cases} \qquad\qquad ; \forall t \geq 0$$

Et, que les fonctions f *et* g *sont continues par rapport à* t *, localement Lipschitziennes en* x *pour assurer l'existence te l'unicité des solutions.*

Le système $(\mathcal{P})$ *est la somme d'un système nominal* $x^{'}(t) = f(t,x(t))$ *et d'un terme de perturbation* $g(t,x(t))$ *qui représente les erreurs de modélisation du système réel vu la présence des incertitudes.*

Démonstration

Ici, on discutera sur l'unicité en employant la fonction de Lyapunov .
Dans toute cette monographie ,on assumera qu'une fonction de Lyapunov est une fonction scalaire continue qui satisfait localement une condition de Lipschitz concernant x.

Soit $V(t,x)$ *une fonction scalaire continue définie sur un ensemble ouvert* $\mathcal{S}$ *et soit* $V(t,x) \in C_0(x)$ *Nous définissons la fonction qui correspond à* $V(t,x)$ *par :*

$$V'_{(4.1)}(t,x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h, x+h\mathcal{F}(t,x)) - V(t,x)\} \tag{3.3}$$

Soit $x(t)$ *une solution de* (3.1) *qui reste dans* $\mathcal{S}$ *, et notons par* $V^{'}(t,x(t))$ *la dérivée droite supérieur de* $V(t,x(t))$ *,*

$$\text{(i.e)}\ V^{'}(t,x(t)) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h, x(t+h)) - V(t,x(t))\} \tag{3.4}$$

Pour un point $(t,x) \in \mathcal{S}$ *et un petit* h *,il existe un voisinage* $\mathcal{U}$ *de* (t,x) *tels que* $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{S}$ *,* $(t+h, x+hF(t,x)) \in \mathcal{U}$ *et* $(t+h, x(t+h)) \in \mathcal{U}$*.*
Soit $\mathcal{L}$ *la constante de Lipschitz de* $V(t,x)$ *avec* $x \in \overline{\mathcal{U}}$ *respectivement , et on écrit*

$$V(t+h, x(t+h)) - V(t,x(t)) = (t+h, x+hF(t,x)+h\varepsilon) - V(t,x) \tag{3.5}$$

$$\leq (t+h, x+hF(t,x)) + \mathcal{L}h\|\varepsilon\| - V(t,x)$$

où $\varepsilon \longrightarrow 0$ *avec* h *. Par* (3.5) *,il suit que :*

$$\overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h, x(t+h)) - V(t,x(t))\} \leq \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h, x+hF(t,x)) - V(t,x)\} \tag{3.6}$$

D'autre part, on a :

$$V(t+h, x(t+h)) - V(t,x(t)) \geq V(t+h, x+hF(t,x)) - \mathcal{L}h\|\varepsilon\| - V(t,x)$$

Ce qui implique que $V'_{(4.1)}(t,x) \leq V^{'}(t,x(t))$ *.Ainsi d'après ça et* (3.6) *,on obtient,*

$$V'_{(4.1)}(t,x) = V^{'}(t,x(t)) \tag{3.7}$$

Par le même calcul,nous obtenons la relation

$$\underline{\lim}_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\{V(t+h, x(t+h)) - V(t,x(t))\} = \underline{\lim}_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\{V(t+h, x+hF(t,x)) - V(t,x)\} \tag{3.8}$$

Au cas où $V(t,x)$ *aurait les dérivées partiels continus du premier ordre, il est évident que,*

$$V'_{(4.1)}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot F(t,x) \tag{3.9}$$

où " $\cdot$ " *représente le produit scalaire.*

Si $V'_{(4.1)}(t,x) \leq 0$ *et par conséquent* $V^{'}(t,x(t)) \leq 0$ *,la fonction* $V(t,x(t))$ *est une fonction* ***non croissante*** *de* t *,qui implique que* $V(t,x)$ *est* ***non croissante*** *le long d'une solution de* (3.1).

Inversement,si $V(t,x)$ *est non croissante le long d'une solution de* (3.1) *, on a* $V'_{(4.1)}(t,x) \leq 0$ *. Plus loin , si*

$$\underline{\lim}_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\{V(t+h, x+h\mathcal{F}(t,x)) - V(t,x)\} \geq 0,$$

La fonction $V(t,x)$ *est* ***non décroissante*** *le long d'une solution de* (3.1) *,et réciproquement.*

La propriété suivante d'une fonction de Lyapunov $V(t,x)$ *est importante, particulièrement en étudiant le comportement des solutions des systèmes perturbés*

Soit $x(s)$ *et* $y(s)$ *des fonctions continues et différentiables définies pour* $s \geq t$ *tels que* $x(t) = y(t) = x$ *alors, par définition,*

$$V^{'}(t,x(t)) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h,x(t+h)) - V(t,x(t))\},$$
$$V^{'}(t,y(t)) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h,y(t+h)) - V(t,y(t))\}$$

Soit $\mathcal{L}$ *une constante de Lipschitz de* $V(t,x)$ *dans un voisinage du point* (t,x)*. Alors, pour un suffisamment petit* h*,*

$$\begin{aligned} V^{'}(t,y(t)) &\leq \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h,x(t+h)) - V(t,y(t))\} + \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h,y(t+h)) - V(t+h,x(t+h))\} \\ &\leq \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h,x(t+h)) - V(t,x(t))\} + \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\mathcal{L}\|y(t+h) - x(t+h)\| \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$V^{'}(t,y(t)) \leq V^{'}(t,x(t)) + \mathcal{L}\|y^{'}(t) - x^{'}(t)\|$$

Tout d'abord ,considérons l'unicité d'une solution donnée de (3.1) *.Dans ce cas, en changeant les variables , nous pouvons assumer que,* $F \equiv 0$.

Théorème 3.2.3 *[20]*

Supposons que $F(t,x)$ *du système* (4.1) *est continu sur* $\mathcal{D}$ $: 0 \leq t \leq a$, $\|x\| \leq b$ *et que* $F(t,0) \equiv 0$ *. S'il existe une fonction de Lyapunov* $V(t,x)$ *définie sur* $\mathcal{D}$ *qui satisfait aux conditions :*

(i) $V(t,0) \equiv 0$,

(ii) $V(t,x) > 0$, *pour* $\|x\| \neq 0$

(iii) $V^{'}_{(4.1)}(t,x) \leq 0$

à l'intérieur de $\mathcal{D}$ *, alors la solution à travers* $(0,0)$ *de* (3.1) *est* ***unique à droite****.*

Si $\underline{\lim}_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\{V(t+h,x+hF(t,x)) - V(t,x)\} \geq 0$ *,la solution à travers* $(a,0)$ *est* ***unique à gauche****.*

Démonstration

Supposons qu'il existe une solution $x(t)$ *par* $(0,0)$ *de* (3.1) *qui est différente de la solution zéro. Puis, il y a* $t_0,\ t_1,\ 0 \leq t_0 < t_1 \leq a$ *tel que* $x(t_0) = 0,\ x(t_1) \neq 0$ *et que* $\|x(t)\| > 0$ *pour* $t \in (t_0,t_1)$.

Par (ii) , $V(t_1,x(t_1)) > 0$ *,et par* (iii) *,nous avons* $V(t_1,x(t_1)) \leq V(t_0,x(t_0))$.
Comme $V(t_0,x(t_0)) = 0$ *par* (i) *,il se pose une contradiction. Ainsi,* ***l'unicité*** *de la solution est prouvée.*

Maintenant ,nous verrons que ***l'existence*** *d'une telle fonction* $V(t,x)$ *comme ci-dessus est nécessaire pour l'unicité de la solution.*

Soient $\mathcal{P}_1(t_1,x_1)$ *et* $\mathcal{P}_2(t_2,x_2)$ *deux points dans* $\mathcal{D}$. *Pour* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$, $t_1 < t_2$ *,indiquent par* $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2}$ *la famille de tous les fonctions* $x(t)$ *,qui sont continues sur* $[t_1,t_2]$ *,avec les propriétés que leurs dérivées sont continues, sauf pour au plus une valeur de* t *et que* $x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2$ *et* $(t,x(t)) \in \mathcal{D}$ *pour* $t \in [t_1,t_2]$.

Soit $v(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ *définie pour* $t_1 < t_2$ *par,*

$$v(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) = \inf_{x(t)\in\mathcal{X}_{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2}} \int_{t_1}^{t_2} \|x^{'}(t) - F(t,x(t))\| dt \tag{3.10}$$

Si $t_1 = t_2$ *,nous mettons* $v(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) = \|x_1 - x_2\|$ *et si* $t_1 > t_2$ *,nous réglons*

$$v(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) = v(\mathcal{P}_2,\mathcal{P}_1)$$

Lemme 3.2.1 *[20]*

pour que $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$ *soient sur une solution de* (3.1) *,il est nécessaire et suffisant que* $v(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) = 0$

Démonstration

Il est clair que la condition est nécessaire. Maintenant supposons que $v(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2) = 0$ *,et il existe une séquence de fonctions* $\{x_k(t)\}, \; x_k(t) \in \mathcal{X}_{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2}$ *,telle que,*

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \int_{t_1}^{t^2} \|x_k^{'}(t) - F(t,x_k(t))\| dt = 0$$

Si nous mettons $\varphi_k(t) = x_k(t) - x_1 - \int_{t_1}^{t} F(s,x_k(s))ds$, *clairement* $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} \varphi_k(t) = 0.$

Pour $t_1 \leq t' \leq t'' \leq t_2$ *et* $y_k(t) = x_k(t) - \varphi_k(t)$, *nous avons,*

$$y_k(t'') - y_k(t') = \int_{t'}^{t''} \mathcal{F}(s,x_k(s))ds$$

Et,donc $\|y_k(t'') - y_k(t')\| \leq M(t'' - t')$ *pour une constante* $M > 0$ *tel que :*

$$\|F(t,x)\| \leq M \;\; \text{sur } \mathcal{D}$$

Par conséquent , $\{y_k(t)\}$ *est équicontinue et par le* ***théorème d'ascoli*** *,il existe une sous-suite uniformément convergente,que nous désignons par* $\{y_k(t)\}$ *encore.*

Soit $y(t)$ *la fonction limite. Clairement* $y(t_1) = x_1, \; y(t_2) = x_2$ *et,*

$$y(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} F(s,y(s))ds,$$

Parce que , $x_k(t) \longrightarrow y(t)$ *comme* $\varphi_k(t) \longrightarrow 0$*. Ainsi, il existe une solution de* (3.1) *à travers* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$*.*

Lemme 3.2.2 *[20]*

pour deux points $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$*,* $t_1 < t_2$*, on a,*

$$|v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) - \|x_1 - x_2\|| \leq M(t_2 - t_1) \tag{3.11}$$

3.2.3 Démonstration

Pour toute $x(t) \in \mathcal{X}_{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2}$*,*

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \|x^{'}(t) - F(t, x(t))\|dt \geq & \int_{t_1}^{t_2} \|x^{'}(t)\|dt - \int_{t_1}^{t_2} \|F(t, x(t))\|dt \\ \geq & \|x_2 - x_1\| - M(t_2 - t_1),\end{aligned}$$

Ce qui implique que $v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \geq \|x_2 - x_1\| - M(t_2 - t_1)$*. Ensuite, soit* $x(t)$ *la fonction qui représente le segment* $\overline{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2}$ *,qui est une fonction dans* $\mathcal{X}_{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2}$*. Puisque,*

$$\int_{t_1}^{t_2} \|x^{'}(t)\|dt = \| \int_{t_1}^{t_2} x^{'}(t)dt\| = \|x_2 - x_1\|,$$

Nous avons,

$$\int_{t_1}^{t_2} \|x^{'}(t) - F(t, x(t))\|dt \leq \|x_2 - x_1\| + M(t_2 - t_1),$$

D'où $v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \leq \|x_2 - x_1\| + M(t_2 - t_1)$ *.Ainsi,* (3.11) *est bien prouvée.*

Lemme 3.2.3 *[20]*

pour les points $\mathcal{P}_i(t_i, x_i)$*,* $i = 1, 2, 3$ *,tels que* $t_1 \leq t_2 \leq t_3$*,*

$$v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3) \leq v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) + v(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3) \tag{3.12}$$

Démonstration

Il est clair que (3.12) *est valable dans le cas* $t_1 < t_2 < t_3$. *A présent supposons que* $t_1 < t_2 = t_3$. *Soit* $\{x_k(t)\}$ *la séquence tel que,*

$$v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \lim_{k\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \|x_k^{'}(t) - F(t, x_k(t))\| dt$$

Et, prendre des points $\mathcal{Q}_k = (t^{'}, x_k(t^{'}))$, $t_1 < t^{'} < t_2 = t_3$. *Alors pour* $\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_k$ *et* $\mathcal{P}_3$ *on a* $v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3) \leq v(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_k) + v(\mathcal{Q}_k, \mathcal{P}_3)$, *et donc,*

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \|x_k^{'}(t) - F(t, x_k(t))\| dt = &\int_{t_1}^{t^{'}} \|x_k^{'}(t) - F(t, x_k(t))\| dt + \int_{t^{'}}^{t_2} \|x_k^{'}(t) - F(t, x_k(t))\| dt \\ &\geq v(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_k) + v(\mathcal{Q}_k, \mathcal{P}_2) \geq v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) - v(\mathcal{Q}_k, \mathcal{P}_3) + v(\mathcal{Q}_k, \mathcal{P}_2)\end{aligned}$$

De ceci et (3.11) *,il s'ensuit que*

$$\int_{t_1}^{t_2} \|x_k^{'}(t) - F(t, x_k(t))\| dt \geq v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3) - \|x_2 - x_3 - 2M(t_2 - t^{'}),$$

Et, en laissant $k \longrightarrow \infty$ *et* $t^{'} \longrightarrow t_2$ *,on a* $v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) \geq v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3) - \|x_2 - x_3\|$,
i.e (3.12) *,parce que* $v(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3) = \|x_2 - x_3\|$.

Lemme 3.2.4 *[20]*

pour $\mathcal{P}_i(t_i, x_i)$, $i = 1, 2, 3$, *tel que* $t_1 \leq t_2 \leq t_3$.

$$\begin{cases} v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3) \geq & v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) - \|x_3 - x_2\| - M(t_3 - t_2) \\ v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3) \geq & v(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3) - \|x_2 - x_1\| - M(t_2 - t_1) \end{cases} \tag{3.13}$$

Démonstration

Dans le cas $t_1 < t_2 < t_3$, *considérons la séquence* $\{x_k(t)\}$ *telle que*

$$v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3) = \lim_{k\to\infty} \int_{t_1}^{t_3} \|x_k^{'}(t) - F(t, x_k(t))\| dt$$

Pour les points $\mathcal{Q}_k = (t_2, x_k(t_2)$,

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_3} \|x_k^{'}(t) - F(t, x_k(t))\| dt \geq & v(\mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_k) + v(\mathcal{Q}_k, \mathcal{P}_3) \\ \geq & v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) - v(\mathcal{Q}_k, \mathcal{P}_2) + v(\mathcal{Q}_k, \mathcal{P}_3) \quad \text{(par (3.12))} \\ \geq & v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) - \|x_k(t_2) - x_2\| + \|x_(3) - x_k(t_2)\| - M(t_3 - t_2) \quad \text{(par (3.11))} \\ \geq & v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) - \|x_3 - x_2\| - M(t_3 - t_2),\end{aligned}$$

Ce qui implique que $v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3) \geq v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) - \|x_3 - x_2\| - M(t_3 - t_2)$. *Les autres cas peuvent être facilement prouvés de la même manière.*

A partir des lemmes ci-dessus, il s'ensuit que $v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ *est une fonction continue non-négative de* $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ *et que,*

$$|v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) - v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_3)| \leq \|x_2 - x_3\| + M|t_3 - t_2| \tag{3.14}$$

Théorème 3.2.4 *[20]*

Supposons que $F(t, x)$ *de* (3.1) *est continu sur* $\mathcal{D}$: $0 \leq t \leq a$, $\|x\| \leq b$, *et que* $F(t, 0) \equiv 0$.
Si la solution par $(0, 0)$ *de* (3.1) *est unique à droite, il existe une fonction de Lyapunov* $V(t, x)$ *définie sur* $\mathcal{D}$ *qui satisfait aux conditions* $(i), (ii)$ *et* (iii) *du théorème* (3.2.3).

Dans le cas où la solution à travers $(a, 0)$ *de* (3.1) *est unique à gauche, la condition* $V'_{(4.1)}(t, x) \leq 0$ *est remplacée par,*

$$\underline{\lim}_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\{V(t + h, x + hF(t, x)) - V(t, x)\} \geq 0$$

Démonstration

Pour $\mathcal{P}_1 = (0, 0)$ *et* $\mathcal{P}_2 = (t, x) \in \mathcal{D}$, *nous définissons* $V(t, x) = v(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$. *Depuis* $x(t) \equiv 0$ *est une solution de* (3.1) *à* $(0, 0)$ *,clairement* $V(t, 0) \equiv 0$.

Pour tout point $(t, x) \in \mathcal{D}$ *tel que* $x \neq 0$ *,il n'y a pas de solution de* (3.1) *à travers* $(0, 0)$ *et* (t, x) *,et par conséquent, par le lemme* (3.2.1) *nous avons* $V(t, x) > 0$ *.à partir de* (3.14) *,il s'ensuit que,*

$$|V(t, x) - V(t', x')| \leq \|x - x'\| + M|t - t'| \tag{3.15}$$

De plus, le lemme (3.2.1) *et le lemme* (3.2.3) *montrent que* $V(t, x)$ *est non-croissante le long de la solution de* (3.1) *,ce qui implique que* $V'_{(4.1)}(t, x) \leq 0$ *,à cause de* (3.15).

Théorème 3.2.5 *[20]*

Supposez que $F(t,x)$ *de* (3.1) *est continu sur* $\mathcal{D}_1 \ : \ 0 \leq t < a, \ \ \|x\| < b$. *Pour que chaque solution de* (3.1) *commence d'un point dans* $\mathcal{D}_1$ *est unique à droite,il nécessaire et suffisant que pour n'importe quel point* $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}_1$, *il existe un voisinage* $\mathcal{U}$ *de* (t_0, x_0) *qui à la propriété suivante :*

Soit $\mathcal{W}$ *un ensemble de* (t,x,y) *tels que* $(t,x) \in \mathcal{U}$, $(t,y) \in \mathcal{U}$, *alors là existe une fonction de Lyapunov* $V(t,x,y)$ *définie sur* $\mathcal{W}$ *,qui satisfait les conditions :*

i] $V(t,x,y) = 0$ *si* $x = y$

ii] $V(t,x,y) > 0$ *si* $x \neq y$

iii] $V(t,x,y) \in C_0(x,y)$ *Et,*

$$V^{'}(t,x,y) = \overline{\lim_{h \longrightarrow 0^+}} \frac{1}{h} \left\{ V(t+h, x+h\,F(t,y)) - V(t,x,y) \right\} \leq 0 \tag{3.16}$$

Démonstration

La suffisance peut être facilement prouvée . Nous montrons seulement que la condition est ***nécessaire*** *.Considérons le système suivant associé à* (3.1)

$$\begin{cases} x^{'} = & F(t,x), \\ y^{'} = & F(t,y) \end{cases} \tag{3.17}$$

Pour chaque point $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}_1$ *,soit* $\mathcal{U}$ *un voisinage de* (t_0, x_0) *qui est contenu dans l'ensemble* $\mathcal{S} = \{(t,x); |t - t_0| \leq \alpha, \|x - x_0\| \leq \beta\} \subset \mathcal{D}_1$.

Pour deux points $\mathcal{P}(t,x,y)$ *et* $\mathcal{Q}(\tau, \xi, \eta)$, $(t,x) \in \mathcal{S}$, $(t,y) \in \mathcal{S}$, $(\tau, \xi) \in \mathcal{S}$, $(\tau, \eta) \in \mathcal{S}$, *définissent la fonction* $v(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$.

Soit $v^*(\mathcal{P})$

$$v^*(\mathcal{P}) = \min_{\substack{0 \leq \tau \leq t \\ \xi = \eta}} v(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$$

Puisque $v(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ *est continue dans* $\mathcal{Q}$ *et* $\mathcal{Q}$ *varie sur un ensemble compact,* $\min v(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = v^*(\mathcal{P})$ *existe et est continu en* $\mathcal{P}$, *et on a :*

$$v^*(\mathcal{P}) = v(\mathcal{P}, \mathcal{Q}^*) \quad \text{pour certain } \ \mathcal{Q}^*$$

Soit $V(t,x,y)$ *tel que* $V(t,x,y) = v^*(\mathcal{P})$. *Si* $\mathcal{P}$ *est sur* $x = y$, $v^*(\mathcal{P}) = 0$ *ou* $V(t,x,y) = 0$ *,et si* $x \neq y$, $v^*(\mathcal{P}) > 0$ *où* $V(t,x,y) > 0$, *en raison de l'unicité des solutions.*

Pour deux points $\mathcal{P}(t,x,y)$, $\mathcal{P}'(t,x^{'},y^{'})$ *lequel nous pouvons assumer que,*

$$v^*(\mathcal{P}') \geq v^*(\mathcal{P}),\ 0 \leq v^*(\mathcal{P}') - v^*(\mathcal{P}) \leq v(\mathcal{P}',\mathcal{Q}) - v(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \leq \overline{\mathcal{P}'\mathcal{P}}$$

où $v^*(\mathcal{P}) = v(\mathcal{P},\mathcal{Q})$
De ceci, il s'ensuit que $|V(t,x,y) - V(t,x^{'},y^{'})| \leq \|x - x^{'}\| + \|y - y^{'}\|$

Pour conclure,supposons que $\mathcal{P}(t,x,y), \mathcal{R}(t^{'},x^{'},y^{'}),\ t^{'} < t$*, soient sur une solution de* (3.17) *.Là existe un* $\mathcal{P}(t_1,x_1,y_1)$ *sur* $x = y$ *tels que :*

$$v^*(\mathcal{R}) = v(\mathcal{R},\mathcal{Q})$$

pour le lemme (3.2.1) *et* (3.2.3) , $v(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \leq v(\mathcal{P},\mathcal{R}) + v(\mathcal{R},\mathcal{Q}) \leq v(\mathcal{R},\mathcal{Q})$.

Comme nous avons $v^*(\mathcal{P}) \leq v(\mathcal{P},\mathcal{Q})$, $v^*(\mathcal{P}) \leq v^*(\mathcal{R})$, *qui signifie que* $V(t,x,y)$ *est non-croissante le long de la solution de* (3.17).

Remarque 3.2.2

Dans les conditions du théorème (3.2.3) *et* (3.2.5) *,on sait qu'il existe des fonction de Lyapunov qu'elles ont des dérivées partiels du premier ordre continus.*

Exemple 3.2.1

Dans le cas où $F(t,x)$ *de* (3.1) *satisfait une condition de Lipschitz*

$$\|F(t,x) - F(t,x^{'})\| \leq \mathcal{L}\|x - x^{'}\|$$

où $\mathcal{L} > 0$ *est une constante ,la fonction* $V(t,x,y) = e^{-2\ \mathcal{L}\ t}\ \|x-y\|^2$ *satisfait,*

$$V^{'}_{(4.1)}(t,x,y) \leq e^{-2\ \mathcal{L}\ t}\ \{-2\ \mathcal{L}\ \|x-y\|^2 + 2\|x-y\|\ \|F(t,x) - \mathcal{F}(t,y)\|\} \leq 0$$

Ainsi,il peut voir que $V(t,x,y)$ *satisfait les conditions dans le théorème* (3.2.5) *et par conséquent,chaque solution est* ***unique*** *vers la droite.*

Conclusion

D'après l'étude faite par ce chapitre nous avons donnés quelques définitions à propos de certains fonctions (de classe $\mathcal{K}$*, définies positives, radialement non bornées, . . . etc)*

Ensuite, la deuxième section sera la partie la plus intéressante au cours de ce chapitre parce qu'elle définie l'existence et l'unicité de solution du problème (3.1) *,et on on trouve de même la notion d'une fonction de Lyapunov qui nous sert à passer à sa relation avec la stabilité étudiée par le* $4^{ème}$ *chapitre.*

4 La stabilité au sens de lyapunov

Ce chapitre s'intéresse à quelques notions particulières de stabilité. En particulier, on cite la stabilité au sens de Lyapunov.

Au cour de cette monographie on utilisera certains théorèmes et résultats fondamentaux afin d'appliquer la théorie de Lyapunov pour analyser la stabilité d'un système d'équations différentiels.

Commençons par définir cette théorie qui va nous visualisée le comportement des trajectoires d'une équation différentielle au tour d'un point d'équilibre. Ensuite, on terminera notre travail par quelques méthode différents de construction ou de recherche d'une fonctions de Lyapunov.

4.1 La théorie de la stabilité de Lyapunov

cette section récapitules des résultats fondamentaux mentionnés par la première partie qui suit, indiqués par des applications pour s'adapter à la façon d'utiliser les notions de ces déductions.

4.1.1 Théorie de Lyapunov

Avant de commencer on suppose qu'il existe une solution pour le système d'équation différentielle citons le cas dépendant de t

$$x^{'}(t) = \mathcal{F}(t,x) \tag{4.1}$$

où $\mathcal{F}$ *une fonction telle que :*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t,x) &\longmapsto\ \mathcal{F}(t,x) \end{aligned}$$

On suppose que $\mathcal{F}(t,0)\equiv 0$ *de sorte que* $x=0$ *est un équilibre de l'équation* (4.1)

Définition 4.1.1

Soit 0 *l'origine de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{U}$ *un voisinage de* 0. *Soit* N *une fonction à valeurs réelles, définie sur* $\mathcal{U}$, *telle que :*

i $N(0) = 0$,

ii $N(x) > 0$ *si* $x \neq 0$

On dit que N *est définie positive dans* $\mathcal{U}$.

Notation 4.1.1

On notera par K *la famille des fonctions* $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *strictement croissante et telles que* $a(0) = 0$; *on démontre facilement que* N *est définie positive dans* $\mathcal{U}$ *si et seulement si :*

$$\exists a \in K \; : \; N(x) \geq a(\|x\|)$$

Définition 4.1.2

Soit $\mathcal{U}$ *un ensemble contenant l'origine* 0 *de* $\mathbb{R}^n$ *,une fonction* $V : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ *est dite définie positive sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$ *si :*

a. $V(t, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$

b. Il existe N *définie positive sur* $\mathcal{U}$ *telle que* $V(t, x) \geq N(x)$.

Il est équivalent par (4.1.1) *de supposer qu'il existe* $a \in K$ *telle que ,*

b'. $V(t, x) \geq a(\|x\|)$ *sur* $\mathcal{U}$

Soit x *une solution de* (4.1) *,soit* $V(t, x)$ *une fonction de classe* C^1 *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *on s'intéresse à la variation de* V *le long des trajectoires, c'est-à-dire à la fonction* $V(t, x(t))$ *; rappelons que :*

$$\frac{d}{dt}(V(t, x(t))) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t, x(t)) \; , \; \mathcal{F}(t, x(t)) \right\rangle$$

Notation 4.1.2

On posera,

$$V'(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \; , \; \mathcal{F}(t, x) \right\rangle$$

Théorème 4.1.1 [*Lyapunov*] *[17]*

Soit (4.1) *une équation telle que* $\mathcal{F}(t,0)=0$.

a. *On suppose qu'il existe un voisinage* $\mathcal{U}$ *de l'origine* 0 *de* $\mathbb{R}^n$ *, une fonction* V *de classe* C^1 *définie positive sur* $(\mathbb{R}_+\times\mathcal{U})$ *telle que* $V'(t,x)\leq 0$ *sur* $\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}$.
Alors $x\equiv 0$ *est solution stable de* (4.1). *Si* $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$ *toutes les solutions de* (4.1) *sont bornées.*

b. *On suppose qu'il existe* V *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}$ *et* a,b *deux fonctions de* K *telles que sur* $\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}$

$$V(t,0)\equiv 0\ ,\ a(\|x\|)\leq V(t,x)\leq b(\|x\|)\quad V'(t,x)\leq 0,$$

alors $x\equiv 0$ *est une solution uniformément stable de* (4.1).

c. *On suppose qu'il existe* V *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}$ *et* a,b,c *trois fonctions de* K *telles que sur* $\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}$

$$V(t,0)\equiv 0\ ,\ a(\|x\|)\leq V(t,x)\leq b(\|x\|)\quad V'(t,x)\leq -c(\|x\|),$$

alors $x\equiv 0$ *est une solution uniformément asymptotiquement stable de* (4.1).

Soit $\rho\ :\ \{\|x\|\leq\rho\}\subset\mathcal{U}$ *et* $x_0\in\{x\ ,\ V(t_0,x)\leq a(\rho)\}$
alors $\lim\limits_{t\to\infty}x(t,t_0,x_0)=0$
En particulier si $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$ *et si* $\lim\limits_{\rho\to\infty}a(\rho)=\infty$ *toutes les solutions de* (4.1) *ont pour limite zéro.*

d. *On suppose qu'il existe* V *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}$ *et* a *et* c *deux fonctions de* K *telles que, sur* $\mathbb{R}_+\times\mathcal{U}$

$$V(t,0)=0\ ,\ a(\|x\|)\leq V(t,x),\quad V'(t,x)\leq -c(\|x\|)$$

Si $\mathcal{F}(t,x)$ *est bornée pour* $(\|x\|\leq M)$, $x\equiv 0$ *est solution asymptotiquement stable de* (4.1).
Soit $\rho\ :\ \{\|x\|\leq\rho\}\subset\mathcal{U}$, *soit* $x_0\ :\ V(t_0,x_0)\leq a(\rho)$ *alors* $\lim\limits_{t\to\infty}x(t,t_0,x_0)=0$.

Exemple 4.1.1

Soit

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+b(1+\varepsilon f(t))x=0\qquad (I)$$

On suppose que a *et* b *sont deux nombres positifs et* $f(t)$ *est une fonction bornée positive.*
(précisément $a>0$; $b>0$ $f(t)\geq 0\ \forall t$.*)*

Soit

$$V(x,y)=\frac{1}{2}(y+\frac{ax}{2})^2+(\frac{a^2}{4}+b)\frac{x^2}{2}$$

$$V'(t,x,y) = -\frac{a}{2}y^2 - \frac{ab}{2}(1+\varepsilon f(t))x^2 - b\varepsilon f(t)xy$$

Si $b\varepsilon^2 f^2(t) - a^2(1+\varepsilon f(t)) \leq 0 < 0$ $V'(t,x,y)$ *est définie négative, ce qui est réalisé si* $\varepsilon = 0$ *et si* ε *est compris entre les racines de*

$$\varepsilon^2 f^2(t) - \varepsilon \frac{a^2}{b} f(t) - \frac{a^2}{b} = 0$$

En particulier si $f(t) \leq M \quad \forall t$ *il suffit que* $\varepsilon^2 < \frac{a^2}{bM}[\sqrt{1+\frac{4b}{a^2}} - 1]$

On peut interpréter le terme $\varepsilon f(t)bx$ *comme un apport d'énergie,si le freinage est assez fort l'origine est stable et même asymptotiquement si* $V'(t,x,y)$ *est définie négative.*

Remarque 4.1.1

Comme le théorème de Lyapunov (4.1.1) *est souvent insuffisant pour les applications et il a donné lieu à de nombreuse généralisations. En voici deux fort utiles.*

Théorème 4.1.2 [*Salvadori*] *[17]*

Soit $\mathcal{F}(t,x)$ *une fonction de* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *telle que* $\mathcal{F}(t,0) \equiv 0$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$.
Soit (4.1) *une équation différentielle.*
On suppose qu'il existe une voisinage $\mathcal{U}$ *de l'origine de* $\mathbb{R}^n$ *,deux fonctions* V *et* W *définies sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$ *, et 3 fonctions* a, b, c *de* K *telle que :*

a. $V(t,0) \equiv 0 \quad V(t,x) \geq a(\|x\|)$ *dans* $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$

b. $W(t,0) \equiv 0 \quad W(t,x) \geq b(\|x\|)$ *dans* $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$

c. $V'(t,x) \leq -c[W(t,x)]$ *et* $\exists \alpha$ *,* $\beta \quad \alpha < V'(t,x) < \beta$ *dans* $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$.

Soit ρ : $\{\|x\| \leq \rho\{ \subset \mathcal{U}$ *alors* $\forall x_0$: $V(t_0,x_0) \leq a(\rho) \quad \lim_{t\to\infty} x(t,t_0,x_0) = 0$
L'origine est donc asymptotiquement stable (pas nécessairement uniformément).

Exemple 4.1.2

Soit $h(t) > 0$ *et* (I) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + h(t)\dfrac{dx}{dt} + \sin x = 0$ *l'équation d'un pendule soumis à un frottement dépendant du temps* $h(t)\dfrac{dx}{dt}$.

On étudie (I) *en posant* $y = \dfrac{dx}{dt}$.

Soit $U(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + (1-\cos x) \quad U'(t,x,y) = -h(t)y^2.$
$x \equiv 0 \equiv y$ *est donc solution uniformément stable d'après le théorème* (4.1.1).
Le théorème de salvadori va nous permettre de démontrer plus :

Soit

$$\begin{aligned} V(t,x,y) =& (\frac{y+\lambda\sin x}{2})^2 \; + \; (1-\cos x)(1+\lambda h(t)-\lambda^2) \\ V'(t,x,y) =& -(h(t)-\lambda)y^2 - \lambda(2-\frac{dh}{dt})(1-\cos x) + g(x,y) \end{aligned}$$

où g *est indépendant de* t *et développable en série, le développement commençant par des termes de troisième ordre.*
Soit $h(t) \geq \alpha > \lambda > 0$, $\dfrac{dh}{dt} \leq \beta < 2$ *et* $W(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + (1-\cos x)$ *, on vérifie que* $W'(t,x,y) = -h(t)y^2$; V , $-V'$ *et* W *sont définies positives et satisfont les conditions* $a.$, $b.$, $c.$ *du théorème de salvadori.*

Ainsi 0 *est uniformément asymptotiquement stable et les orbites ont une allure comparable à celles que nous avons esquissées et qui correspondant à* $h(t) \equiv 1$.

Théorème 4.1.3 [*(Cetaev) : Instabilité*] *[17]*

Soit (I) $\dfrac{dx}{dt} = \mathcal{F}(x)$ *un système autonome dont l'origine est un équilibre* $\mathcal{F}(0) = 0$.

Soit $\rho > 0$ *et* $\mathcal{B}_\rho = \{\|x\| \leq \rho\}$, *soit* $\mathcal{U}$ *un sous-ensemble de* $\mathcal{B}$ *dont la frontière* F *contient* 0 .

On suppose qu'il existe N *de classe* C^1 *telle que si* $x \in \mathcal{U}$ *et* $x \notin F$ *,alors* $N(x) > 0$ *et* $N'(x) > 0$ *tandis que si* $x \in F$ $N(x) \equiv 0$.
Dans ces conditions 0 *est un équilibre instable.*

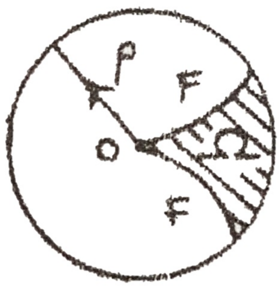

FIGURE 4.1 – Instabilité (Cataev)

Théorème 4.1.4 [*Cetaev*] *[17]*

Soit $\mathcal{F}(t,x)$ *une équation où* $\mathcal{F} \ : \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *et* $\mathcal{F}(t,0) = 0 \quad \forall t$.
Soit $\rho > 0$ *et* $\mathcal{U} \subset \{\|x\| \leq \rho\{$ *on suppose que la partie de la frontière* F *de* $\mathcal{U}$ *telle que* $\{\|x\| < \rho\{$ *contient le point* 0 *. (*$\mathcal{U}$ *ouvert.)*

On suppose qu'il existe V *de classe* C^1 *telle que :*

a. $0 < V(t,x) \leq k < \infty \ \forall t \geq t_0$ *et* $x \notin F$ *et* $x \in \mathcal{U}$.

b. $\exists a \in K \ : \ V'(t,x) \geq a(V(t,x)) \quad \forall t \geq t_0 \ , \ x \in \mathcal{U}$.

c. $V(t,x) = 0 \ \forall t \geq t_0 \ , \ x \in F \ , \ \|x\| \leq \rho$.

Alors 0 est une solution instable de (4.1).
On peut remplacer $a.$ *et* $b.$ *par* a' *et* b' $: \exists b\,, c \in K$

a' $\quad 0 < V(t,x) \leq b(\|x\|) \quad \forall t \geq t_0 \ x \in \mathcal{U} \ x \notin F$

b' $\quad V(t,x) \geq c(\|x\|) \quad \forall t \geq t_0 \ x \in \mathcal{U} \ x \notin F$

et même a' *par* a'' : $\exists k$ *cste* $k > 0$, $W(t,x)$ *sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$ *continue et* $W(t,x) \geq 0 \ : \ V'(t,x) = kV(t,x) + W(t,x)$.

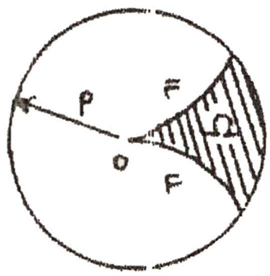

FIGURE 4.2 – Stabilité(Cataev)

Exemple 4.1.3

Soit $h(t)$ *une fonction réelle telle que* $0 \leq h(t) < 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Soit (I) $\quad \dfrac{d^2x}{dt^2} + h(t)\dfrac{dx}{dt} - x = 0.$

Pour étudier (I) *on pose* $y = \dfrac{dx}{dt}$ *et* $V(x,y) = xy$.

a. *Si* $h(t) \equiv 0 \quad V'(x,y) = x^2 + y^2$ *et* $\forall \rho$ *on quitte le cercle* $\{x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$ *d'après le théorème* (4.1.3) *de Cetaev.*

b. *Si* $h(t) \neq 0$ $V'(t,x,y) = x^2 + y^2 - h(t)xy = r^2(1 - h(t)\cos\theta\sin\theta$ *en passant en coordonnées polaires. Si* $x > 0$ *et* $y > 0$ *, soit si* $0 \leq \cos\theta\sin\theta \leq \frac{1}{2}$ *alors*

$$V' \geq r^2(1 - \frac{1}{2}h(t)) > 0 \;\; \textit{pour} \;\; r \neq 0$$

Le théorème (4.1.4) *de Cetaev permet donc d'établir que la solution* $x \equiv 0 \equiv y$ *est une solution instable de* (I).

4.1.2 Première méthode de Lyapunov

Cette méthode permet une étude locale par linéarisation autour du point d'équilibre. En effet, c'est une justification de l'approximation linéaire des petits mouvements. Elle est intéressante en tant qu'étude préliminaire lorsque le système présente plusieurs points d'équilibre, pour déduire rapidement les différents points d'équilibres stables.
L'étude de stabilité locale doit alors être poursuivie en vue de déterminer les domaines de conditions initiales garantissant la convergence vers l'équilibre asymptotiquement stable considéré.
La stabilité du système étudié, autour d'un point de fonctionnement, est déduite à partir des valeurs propres de la matrice d'état du modèle linéarisé correspondant.

Nous ramènerons, dans la suite, le point d'équilibre à l'origine.

L'évolution du processus étant régie par l'équation
$x'(t) = \mathcal{F}(t,x)$ *dans le cas continu, et par :*
$x(k+1) = \mathcal{F}(x(k),k)$ *dans le cas discret*

Un développement limité au voisinage de l'origine conduit aux représentations respectives locales :
$x'(t) = Ax(t) + \circ(\|x(t)\|)$ *en continue,et*
$x(k+1) = Ax(k) + \circ(\|x(k)\|)$ *en discret.*

Dans ces conditions la stabilité de la matrice A *implique la stabilité asymptotique locale du processus.*

En continu, les parties réelles des valeurs propres de A *doivent être strictement négatives. En discret, les modules des valeurs propres de* A *doivent être strictement inférieurs à 1.*

L'étude de la stabilité locale est surtout intéressante pour savoir s'il faut poursuivre l'étude de la stabilité, ou non. En effet, si le système linéarisé est instable, le système non linéaire le sera nécessairement.

4.1.3 Deuxième méthode de Lyapunov

La deuxième méthode de Lyapunov est inspirée du principe physique :

Les systèmes linéaires ou non linéaires, dont l'énergie est continument,dissipée, peuvent tendre vers un point d'équilibre.

L'énergie est une fonction scalaire, ainsi, pour étudier la stabilité d'un système, il suffit, d'après Lyapunov, d'examiner la variation d'une fonction scalaire, appelée fonction candidate de Lyapunov $V(x)$, *qui représente en quelque sorte l'énergie du système. Si la fonction de Lyapunov est décroissante, le système est stable.*
$V(x)$ *sert donc de fonction de comparaison.L'intérêt de cette méthode est celui de l'utilisation d'une fonction scalaire* $V(x)$, *pour l'étude de la convergence du vecteur x vers l'origine, au lieu d'utiliser le vecteur x lui-même afin d'atteindre la stabilité.*

4.1.4 Comportement des trajectoires de l'équation différentielle au voisinage d'un point singulier

Cette sous-section visualise comment se comporte les trajectoires d'une équation différentielle au tour d'un point d'équilibre illustrée par des figures et même des exemples.

Définition 4.1.3

Soit le système d'équations différentielles non-autonome

$$\begin{cases} x'(t) = & f_1(t, x, y), \\ y'(t) = & f_2(t, x, y). \end{cases} \tag{1}$$

Soient $x = x(t)$ *et* $y = y(t)$ *les solutions de ce système satisfaisant aux conditions initiales*

$$\begin{cases} x_{t=0} = & x_0, \\ y_{t=0} = & y_0. \end{cases} \tag{1'}$$

Soient encore $\overline{x} = \overline{x}(t)$ *et* $\overline{y} = \overline{y}(t)$ *les solutions du système* (4.1.3) *satisfaisant aux conditions initiales*

$$\begin{cases} \overline{x}_{t=0} = & \overline{x}_0, \\ \overline{y}_{t=0} = & \overline{y}_0. \end{cases} \tag{1''}$$

Définition 4.1.4

Les solutions $x = x(t)$ *et* $y = y(t)$ *satisfaisant aux équations* (1) *et aux conditions initiales* $(1')$ *sont dites stables au sens de Lyapunov lorsque* $t \longrightarrow \infty$ *si ,pour tout* $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit,il existe* $\delta > 0$ *tel que l'on ait pour tout* $t > 0$ *les inégalités*

$$\begin{cases} |\overline{x}(t) - x(t)| < & \varepsilon, \\ |\overline{y}(t) - y(t)| < & \varepsilon. \end{cases} \qquad (2)$$

dès que les conditions initiales satisfont aux inégalités

$$\begin{cases} |\overline{x}_0 - x_0| < & \delta, \\ |\overline{y}_0 - y_0| < & \delta. \end{cases} \qquad (3)$$

Interprétons cette définition. Il résulte des inégalités (2) *et* (3) *que les solutions varient peu, quel que soit* t *positif, lorsque les conditions initiales varient peu. Si le système d'équations différentielle est celui d'un mouvement ,le caractère du mouvement varie peu lorsque les conditions initiales varient peu si les solutions sont stables.*

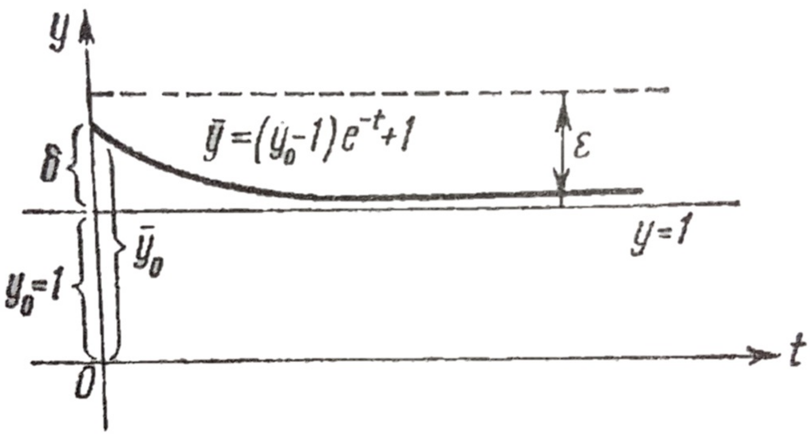

FIGURE 4.3 – Courbe de solution

Exemple 4.1.4

Soit l'équation différentielle du premier ordre

$$y'(t) = -\,y + \,1 \qquad (a)$$

Sa solution générale est

$$y = Ce^{-t} \,+\, 1 \qquad (b)$$

Trouvons la solution particulière satisfaisant à la condition initiale

$$y_{t=0} = 1 \qquad (c)$$

Il est évident que cette solution $y = 1$ *correspond à* $C = 0$. *Trouvons ensuite la solution particulière satisfaisant à la condition initiale*

$$\overline{y}_{t=0} = \overline{y}_0$$

Trouvons la valeur de C *dans l'équation* (b) *:*

$$\overline{y}_0 = C \ + \ 1,$$

d'où

$$C = \overline{y}_0 \ - \ 1.$$

On obtient en substituant cette valeur de C *dans l'égalité* (b)

$$\overline{y} = (\overline{y}_0 \ - \ 1)e^{-t} \ + \ 1$$

Il est évident que la solution $y = 1$ *est stable. En effet*

$$\overline{y} - y = [(y_0 \ - \ 1) \ + \ e^{-t} \ + \ 1] \ - 1 = (\overline{y}_0 \ - \ 1)e^{-t} \to 0$$

Lorsque $t \longrightarrow \infty$.

L'inégalité (3) *est donc vérifié quel que soit* ε *dès que l'on a*

$$(y_0 \ - \ 1) = \delta < \varepsilon$$

Remarque 4.1.2

Si les équations du système (1) *décrivent le mouvement, où l'argument* t *est le temps,et qu'elles ne contiennent pas explicitement le temps* t *,c'est-à-dire si elles ont la forme*

$$\begin{cases} x'(t) = & f_1(x, y), \\ y'(t) = & f_2(x, y). \end{cases}$$

un tel système est dit autonome.

Définition 4.1.5

Considérons ensuite le système d'équations :

$$\begin{cases} x'(t) = & cx \ + \ dy, \\ y'(t) = & ax \ + \ by. \end{cases} \qquad (4)$$

En supposant que les coefficients $a, \ b, \ c, \ d$ *soient des constantes.*

La substitution directe nous convainc que la solution du système (4.1.5) *est alors* $x = 0, \ \ y = 0.$

Voyons à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients pour que les solutions $x = 0, \ y = 0$ *du système* (4) *soit stable.*

Dérivons la première équation et éliminons y *et* $y'(t)$ *, on obtient une équation du second ordre :*

$$x''(t) = cx'(t) + dy'(t) = cx'(t) + d(ax + by) = cx'(t) + adx + b(x'(t) - cx)$$

ou

$$x''(t) - (b + c)x'(t) - (ad - bc)x = 0 \tag{5}$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$\lambda^2 - (b + c)\lambda - (ad - bc) = 0 \tag{6}$$

Cette équation est notée habituellement sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & d \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

Notation 4.1.3

Désignons les racines de l'équation caractéristique par λ_1 *et* λ_2.

Comme nous allons le voir, la stabilité (ou l'instabilité) des solutions du système (4.1.5) *est déterminée par la nature des racines* λ_1 *et* λ_2.

I. ***Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, négatives et distinctes :***

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Définition 4.1.6

On trouve x *de l'équation* (5) *:*

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

De la première équation du système (4) *, on déduit alors* y. *La solution du système* (4) *prend ainsi la forme :*

$$\begin{cases} x = & C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y = & [C_1(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}]\dfrac{1}{d} \end{cases} \tag{8}$$

Remarque 4.1.3

Si $d = 0$ *et* $a \neq 0$,*il faut alors écrire l'équation* (5) *pour la fonction* y. *De la deuxième équation du système* (4) *on déduit* y *ensuite* x. *La structure de la solution* (8) *ne change pas .*

Si $d = 0$ *et* $a = 0$, *la solution du système d'équations s'écrit sous la forme :*

$$x = C_1 e^{ct}, \quad y = C_2 e^{bt}. \tag{8'}$$

Dans ce cas il est plus facile d'analyser le caractère des solutions.

Donnons à C_1 *et* C_2 *des valeurs telles que les solutions* (8) *satisfaisant aux conditions initiales*

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = y_0$$

La solution vérifiant les conditions initiales est donc :

$$\begin{cases} x = & \dfrac{cx_0 + dy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} \; + \; \dfrac{x_0\lambda_1 - cx_0 - dy_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t}, \\ y = & \dfrac{1}{d}[\dfrac{cx_0 + dy_0 - x_0\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1 - c)e^{\lambda_1 t} \; + \; \dfrac{x_0\lambda_1 - cx_0 - dy_0}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_2 - c)e^{\lambda_2 t}]. \end{cases} \tag{9}$$

Il résulte de ces dernières formules que, pour tout $\varepsilon > 0$, *on peut choisir* $|x_0|$ *et* $|y_0|$ *suffisamment petits tels que l'on ait pour tout les* $t > 0$ *:*

$$|x(t)| < \varepsilon, \quad |y(t)| < \varepsilon, \quad \text{étant donné que}$$

$$e^{\lambda_1 t} < 1 \text{ et } e^{\lambda_1 t} < 1$$

Notation 4.1.4

Dans ce cas notons que

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = & 0, \\ \lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = & 0. \end{cases} \tag{10}$$

Considérons le plan xOy *qui porte le nom de plan de phase du système d'équations différentielles* (4) *et de l'équation différentielle* (5).

Définition 4.1.7

Considérons les solutions (8) *et* (9) *du système* (4.1.5) *comme les équations paramétriques d'une certaine courbe dans le plan de phase* xOy *:*

$$\begin{cases} x = & \overline{\Phi}(t,\ C_1,\ C_2), \\ y = & \overline{\Psi}(t,\ C_1,\ C_2), \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} x = & \Phi(t,\ x_0,\ y_0), \\ y = & \Psi(t,\ x_0,\ y_0), \end{cases} \tag{12}$$

Ces courbes sont appelées courbes intégrales ou trajectoires de l'équation différentielle

$$\frac{x'}{y'} = \frac{ax\ +\ by}{cx\ +\ dy} \tag{13}$$

obtenue en divisant membre à membre les équations du système (4).

Remarque 4.1.4

L'origine des coordonnées $O(0,0)$ *est un point singulier pour l'équation différentielle* (13) *puisqu'il n'appartient pas au domaine d'existence et d'unicité de la solution.*

Le caractère des solutions (9) *et plus généralement des solutions du système* (4) *est illustré concrètement par la disposition des courbes intégrales*

$$\overline{F}(x,y,C) = 0$$

qui forment l'intégrale générale de l'équation différentielle (13).

La constante C *est tirée de la condition initiale* $y_{x=x_0} = y_0$*. Après substitution de* C *l'équation de la famille prend la forme*

$$F(x, y, x_0, y_0). \qquad (14)$$

Dans le cas des solutions (9) *le point singulier porte le nom de* ***nœud stable****.*

Remarque 4.1.5

On dit qu'un point se déplaçant sur la trajectoire tend indéfiniment vers le point singulier si $t \longrightarrow +\infty$*.*

Il est évident qu'on aboutirait également à la relation (14) *en éliminant le paramètre* t *du système* (12)*.*

Pour déterminer comment, dans le plan de phase, sont disposées les courbes intégrales au voisinage du point singulier pour toutes les racines possibles de l'équation caractéristique ,au lieu d'une analyse complète,bornons nous à une illustration sur des cas simples ne nécessitant pas des calculs compliqués.

Précisons que les trajectoires de l'équation (13) *et celles qui serons étudiées dans les exemples qui suit après auront la même allure au voisinage de l'origine des coordonnées quels que soient les coefficients.*

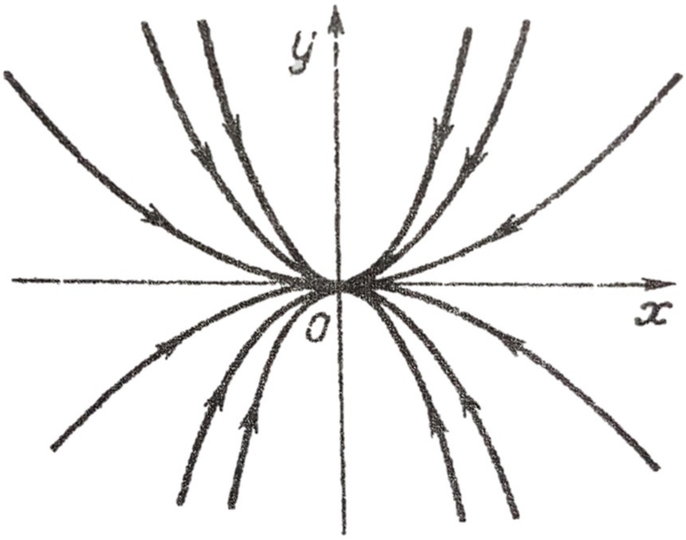

FIGURE 4.4 – nœud stable

Exemple 4.1.5

Étudier la stabilité de la solution $x = 0,\ y = 0$ *du système d'équations*

$$x'(t) = -\,x,$$
$$y'(t) = -\,2y.$$

Donc l'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ses racines $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$
Les solutions $(8')$ *sont dans ce cas*

$$x = C_1 e^{-t}, \quad y = C_2 e^{-2t}$$

Les solutions (9)

$$x = x_0 e^{-t}, \quad y = y_0 e^{-2t} \qquad (a)$$

Il est évident que lorsque $t \longrightarrow +\infty$ $x(t) \to 0$ *et* $y(t) \to 0$. *La solution* $x = 0, \; y = 0$ *est donc stable.*

Voyons maintenant le plan de phase. En éliminant le paramètre t *de l'équation* (a) *nous obtenons une équation de la forme* (14)

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0} \qquad (b)$$

C'est une famille de paraboles.

L'équation (13) *s'écrit dans ce cas*

$$\frac{y'}{x'} = \frac{2y}{x}.$$

Nous obtenons en intégrant

$$\log|y| = 2\log|x| \;+\; \log|C|,$$

$$y = Cx^2.$$

Tirons C *des conditions*

$$y_{x=x_0} = y_0, \quad C = \frac{y_0}{x_0^2}.$$

En substituant C *dans* (c) *nous obtenons la solution* (b). *Le point singulier* $O(0,0)$ *est un nœud stable.*

II. ***Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, positives et distinctes :***

$$\lambda_1 > 0, \;\; \lambda_2 > 0, \;\; \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Définition 4.1.8

Dans ce cas les solutions sont données également par les formules (8) *et respectivement* (9). *Ici cependant pour* $|x_0|$ *et* $|y_0|$ *aussi petits qu'on veut* $|x(t)| \to \infty$, $|y(t)| \to \infty$ *lorsque* $t \to +\infty$, *étant donné que* $e^{\lambda_1 t} \to \infty$ *et* $e^{\lambda_2 t} \to \infty$ *lorsque* $t \to +\infty$. *Sur le plan de phase le point singulier sera un* ***nœud instable*** *:*
en effet lorsque $t \to +\infty$, *un point qui se déplace sur la trajectoire s'éloigne du point de repos* $x = 0, \; y = 0$.

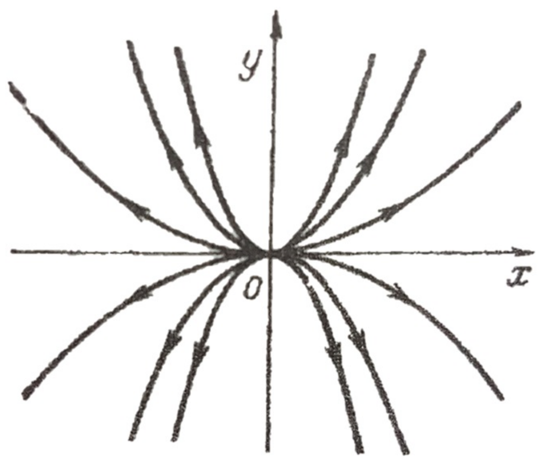

FIGURE 4.5 – nœud instable

Exemple 4.1.6

Étudier la stabilité de la solution $x = 0,\ y = 0$ *du système d'équations*

$$x'(t) = x,$$
$$y'(t) = 2y.$$

Donc l'équation caractéristique sera

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Ses racines $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$
et la solution du système

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 e^{2t}$$

Cette solution est instable car $|x(t)| \to \infty,\ |y(t)| \to \infty$ *lorsque* $t \to +\infty$.
Éliminons t *:*

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \frac{y}{y_0}$$

Le point singulier $O(0,0)$ *est un nœud instable.*

III. ***Les racines de l'équation caractéristique sont réelles et de signe contraires, par exemple :***

$$\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 < 0$$

Définition 4.1.9

Il résulte de la formule (9) *que pour* $|x_0|$ *et* $|y_0|$ *aussi petits qu'on veut,si* $cx_0 + dy_0 - x_0\lambda_2 \neq 0,\ |x(t)| \to \infty,\ |y(t)| \to \infty$ *lorsque* $t \to +\infty$ *. La solution est instable.*
Dans le plan de phase le point singulier porte le nom de ***selle (col).***

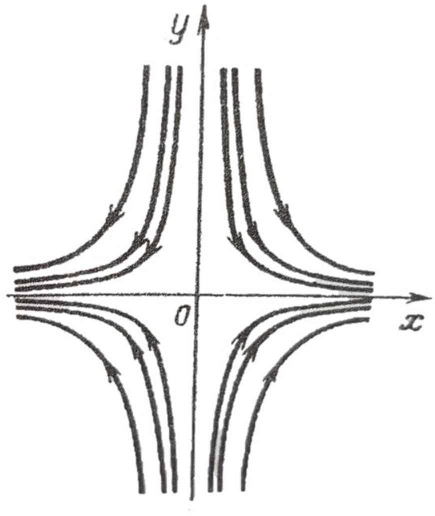

FIGURE 4.6 – Point selle (col)

Exemple 4.1.7

Étudier la stabilité de la solution $x = 0,\ y = 0$ *du système d'équations*

$$\begin{aligned} x'(t) =& x, \\ y'(t) =& -2y. \end{aligned}$$

Donc l'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

Par suite, $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$
La solution est

$$x = x_0 e^{+t}, \quad y = y_0 e^{-2t}$$

La solution est instable. En éliminant le paramètre t *, nous obtenons une famille de courbes dans le plan de phase*

$$yx^2 = y_0 x_0^2.$$

Le point singulier $O(0,0)$ *est un selle.*

IV. ***Les racines de l'équation caractéristique sont complexes avec une partie réelle négative :***

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \ \ \lambda_2 = \alpha - i\beta \ (\alpha < 0).$$

Définition 4.1.10

La solution du système (4) *est*

$$\begin{cases} x = & e^{\alpha t}[C_1 \cos \beta t \ + \ C_2 \sin \beta t], \\ y = & \dfrac{1}{d} e^{\alpha t}[(\ \alpha C_1 \ + \ \beta C_2 \ - \ cC_1\ ) \cos \beta t \ + \ (\ \alpha C_2 \ + \ \beta C_1 \ - \ cC_2\ ) \sin \beta t] \end{cases} \tag{15}$$

Posons

$$C = \sqrt{C_1^2 \ + \ C_2^2}, \quad \sin \delta = \frac{C_1}{C}, \quad \cos \delta = \frac{C_2}{C}.$$

L'équation (15) *peut alors s'écrire sous la forme*

$$\begin{cases} x = & Ce^{\alpha t} \sin(\beta t \ + \ \delta), \\ y = & \dfrac{Ce^{\alpha t}}{d}[(\ \alpha \ - \ c\ ) \sin(\beta t \ + \ \delta) \ + \ \beta \cos(\beta t \ + \ \delta)], \end{cases} \tag{16}$$

où C_1 *et* C_2 *sont des constantes arbitraires susceptibles d'être tirées des conditions initiales :* $x = x_0, \ \ y = y_0$ *en faisant* $t = 0$*. De plus,*

$$x_0 = C \sin \delta, \quad y_0 = \frac{C}{d}[(\alpha - c) \sin \delta \ + \ \beta \cos \delta],$$

d'où

$$C_1 = x_0, \ \ C_2 = \frac{dy_0 - x_0(\alpha - c)}{\beta}. \tag{17}$$

Remarque 4.1.6

Rappelons que si $d = 0$*, la solution se présentera sous un autre aspect, mais le caractère de l'analyse restera le même.*

Définition 4.1.11

Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $|x_0|$ *et* $|y_0|$ *suffisamment petits on aura*

$$|x(t)| < \varepsilon, \ \ |y(t)| < \varepsilon$$

La solution est stable. Dans ce cas quand $t \to +\infty$

$$x(t) \to 0 \ \ \textit{et} \ \ y(t) \to 0$$

en changeant de signe un nombre indéfini de fois. Sur le plan de phase le point singulier de cette nature porte le nom de ***foyer stable****.*

Exemple 4.1.8

Étudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$x'(t) = -\,x \;+\; y,$$
$$y'(t) = -\,x \;-\; y.$$

Écrivons l'équation caractéristique et cherchons ses racines

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \;\; \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 1i, \;\; \alpha = -1, \;\; \beta = 1.$$

Déterminons C_1 *et* C_2 *d'après les formules* (17) *:* $C_1 = x_0, \;\; C_2 = y_0.$
En les substituant dans (15) *nous obtenons :*

$$\begin{cases} x = & e^{-t}(x_0 \cos t \;+\; y_0 \sin t), \\ y = & e^{-t}(y_0 \cos t \;-\; x_0 \sin t). \end{cases} \qquad (A)$$

Il est évident que pour les valeurs de t *quelconques*

$$|x| \leq |x_0| \;+\; |y_0|, \;\; |y| \leq |x_0| \;+\; |y_0|.$$

Lorsque $t \longrightarrow +\infty, \;\; x(t) \to 0, \;\; y(t) \to 0.$ *La solution est stable.*

Voyons maintenant comment dans ce cas sont disposées les courbes dans le plan de phase. Transformons l'expression (A). *Soient*

$$x_0 = M \cos \delta, \;\; y_0 = M \sin \delta,$$

$$M = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \;\; tg\delta = \frac{y_0}{x_0}$$

Les égalités (A) *prennent alors la forme :*

$$\begin{cases} x = & Me^{-t} \cos(\beta t \;-\; \delta), \\ y = & Me^{-t} \sin(\beta t \;-\; \delta). \end{cases} \qquad (B)$$

Passons aux coordonnées polaire ρ *et* θ *et exprimons* ρ *en fonction de* θ. *Les équations* (B) *prennent la forme*

$$\begin{cases} \rho \cos \theta = & Me^{-t} \cos(\beta t \;-\; \delta), \\ \rho \sin \theta = & Me^{-t} \sin(\beta t \;-\; \delta). \end{cases} \qquad (C)$$

En élevant les premiers et les deuxièmes membres au carré et en additionnant, nous obtenons

$$\rho^2 = M^2 e^{-2} t$$

ou encore

$$\rho = Me^{-t} \qquad (D)$$

Examinant à présent t *en fonction de* θ*. En divisant membre à membre les équations du système* (C)*, nous obtenons*

$$tg\theta = tg(\beta t \; - \; \delta),$$

D'où il vient

$$t = \frac{0 + \delta}{\beta}$$

Substituons dans (D) *:*

$$\rho = Me^{-\frac{\theta+\delta}{\beta}}$$

où

$$\rho = Me^{-\frac{\delta}{\beta}-\frac{\theta}{\beta}}$$

En désignant $Me^{-\frac{\delta}{\beta}}$ *par* M_1 *nous obtenons en définitive*

$$\rho = M_1 e^{-\frac{\theta}{\beta}} \qquad (E)$$

C'est une famille de spirales logarithmiques. Dans ce cas lorsque $t \to +\infty$ *un point se déplaçant sur la trajectoire tend vers l'origine des coordonnées.*

Le point singulier $O(0,0)$ *est un* ***foyer stable****.*

V. ***Les racines de l'équation caractéristique sont complexes avec une partie réelle positive :***

$$\lambda_1 = \alpha \; + \; i\beta, \;\; \lambda_2 = \alpha \; - \; i\beta \; (\alpha > 0).$$

Définition 4.1.12

Dans ce cas la solution s'exprimera également au moyen des formules (15)*, où* $\alpha > 0$*. Lorsque* $t \to +\infty$*,* $|x(t)|$ *et* $|y(t)|$ *peuvent prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut quelles que soient les conditions* x_0 *et* $y_0(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \neq 0)$*.*

La solution est instable. Sur le plan de phase un point singulier de cette nature porte le nom de ***foyer instable****. Un point se déplaçant sur la trajectoire s'éloigne indéfiniment de l'origine des coordonnées.*

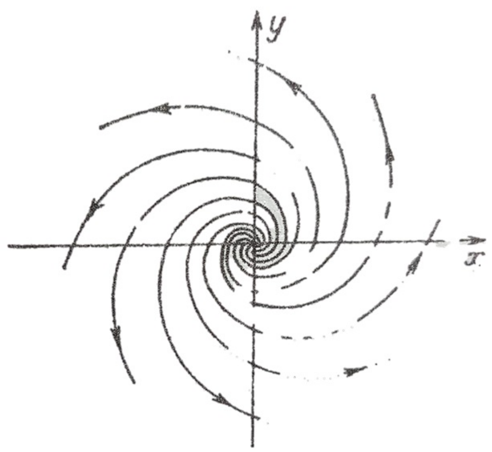

FIGURE 4.7 – foyer instable

Exemple 4.1.9

Étudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\begin{aligned} x'(t) =& x + y, \\ y'(t) =& -x + y \end{aligned}$$

Écrivons l'équation caractéristique et cherchons ses racines

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \ \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = 1 + i, \ \ \lambda_2 = 1 - i.$$

La solution (15), *compte tenue de* (17), *est dans ce cas*

$$\begin{aligned} x =& e^t (x_0 \cos t + y_0 \sin t), \\ y =& e^t (y_0 \cos t - x_0 \sin t). \end{aligned}$$

Dans le plan de phase nous obtenons une courbe en coordonnées polaires

$$\rho = \overline{M}_1 e^{\theta/\beta}$$

Le point singulier est un foyer instable.

VI. ***Les racines de l'équation caractéristique sont des nombres imaginaires purs :***

$$\lambda_1 = i\beta, \ \ \lambda_2 = -i\beta \ (\alpha > 0).$$

Définition 4.1.13

Dans ce cas la solution (15) *prend la forme :*

$$\begin{cases} x = & C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t, \\ y = & \dfrac{1}{d}[(\beta C_2 - cC_1) \cos \beta t + (-\beta C_1 - cC_2) \sin \beta t]. \end{cases} \tag{18}$$

Les constantes C_1 *et* C_2 *sont déterminées d'après la formules* (17) *:*

$$C_1 = x_0, \ \ C_2 = \frac{dy_0 + cx_0}{d}. \tag{19}$$

Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $|x_0|$ *et* $|y_0|$ *suffisamment petits,* $|x(t)| < \varepsilon$ *et* $|y(t)| < \varepsilon$ *quel que soit* t.

La solution est donc stable. x *et* y *sont des fonctions périodiques de* t.

Définition 4.1.14

Pour analyser les courbes intégrales dans le plan de phase, il est plus commode d'écrire la première des solutions (18) *sous la forme suivante* (4.1.10) *:*

$$\begin{cases} x = & C\sin(\beta t + \delta), \\ y = & \dfrac{C\beta}{d}\cos(\beta t + \delta) - \dfrac{Cc}{d}\sin(\beta t + \delta). \end{cases} \tag{20}$$

où C *et* δ *sont des constantes arbitraires.*

Remarque 4.1.7

Nous constatons immédiatement d'après (20) *que* x *et* y *sont des fonctions périodiques de* t.

Éliminons le paramètre t *des équations* (20).

$$y = \frac{C\beta}{d}\sqrt{1 - \frac{x^2}{C^2}} - \frac{c}{d}x.$$

En faisant disparaître le radical, nous obtenons :

$$\left(y - \frac{c}{d}x\right)^2 = \left(\frac{C\beta}{d}\right)^2 \left(1 - \frac{x^2}{C^2}\right) \tag{21}$$

C'est une famille de courbes du second degré (courbes réelles) dépendant de la constante arbitraire C. *Aucune d'elles ne possède de point indéfiniment éloigné.*

Par conséquent, c'est une famille d'ellipses entourant l'origine des coordonnées (lorsque $c = 0$ *les axes des ellipses sont parallèles aux axes des coordonnées). Le point singulier de cette nature est appelé* ***centre***.

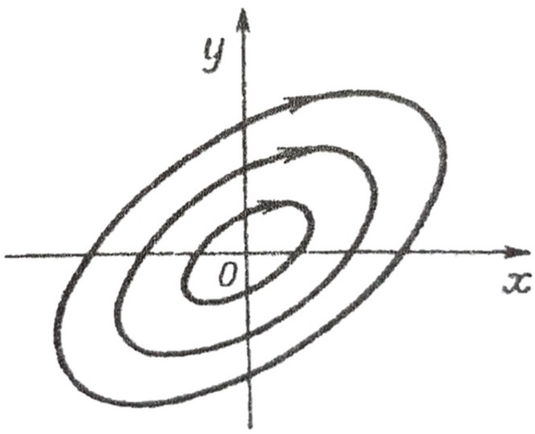

Figure 4.8 – Centre

Exemple 4.1.10

Étudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\begin{aligned} x'(t) =& y, \\ y'(t) =& -4x. \end{aligned}$$

ÉCRIVONS L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE ET CHERCHONS SES RACINES

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 4 = 0, \quad \lambda = \pm 2i.$$

Les solutions (20) *seront*

$$\begin{aligned} x =& C \sin(2t + \delta), \\ y =& 2C \cos(2t + \delta). \end{aligned}$$

L'équation (21) *prend la forme*

$$y^2 = 4C^2(1 - \frac{x^2}{C^2}), \quad \frac{y^2}{4C^2} + \frac{x^2}{C^2} = 1.$$

Nous obtenons ainsi une famille d'ellipses dans le plan de phase. Le point singulier est un ***centre****.*

VII. ***Les racines de l'équation caractéristique sont :***

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Définition 4.1.15

La solution (8) *dans ce cas prend la forme*

$$\begin{cases} x = & C_1 \ + \ C_2 e^{\lambda_2 t}, \\ y = & \dfrac{1}{d}[-C_1 c + C_2(\lambda_2 - c) e^{\lambda_2 t}]. \end{cases} \tag{22}$$

Il est évident que pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $|x_0|$ *et* $|y_0|$ *suffisamment petits,* $|x(t)| < \varepsilon$ *et* $|y(t)| < \varepsilon$ *quel que soit* $t > 0$*. La solution est donc stable.*

Exemple 4.1.11

Étudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$\begin{aligned} x'(t) =& 0, \\ y'(t) =& -y. \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

CHERCHONS LES RACINES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + \lambda = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1.$$

Dans ce cas $d = 0$ *. Résolvons directement le système sans recourir aux formules* (22)

$$x = C_1, \quad y = C_2 e^{-t}. \qquad (\beta)$$

La solution satisfaisant aux conditions initiales $x = x_0$ *et* $y = y_0$ *lorsque* $t = 0$ *est*

$$x = x_0, \quad y = y_0 e^{-t}. \qquad (\gamma)$$

Il est évident que la solution est stable. Dans le plan de phase l'équation différentielle est $\dfrac{x'}{x'} = 0.$

L'intégrale générale est $x = C$*. Les trajectoires sont donc des droites parallèles à l'axes* Oy*. De l'équation* (γ) *il vient que les points sur les trajectoires s'approchent de la droite* $y = 0$*.*

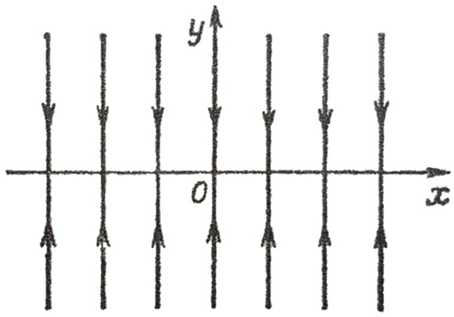

FIGURE 4.9 – Les trajectoires sont des droites parallèles à l'axes Oy

VIII. ***Les racines de l'équation caractéristique sont :***

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 > 0.$$

Des formules (22) *ou* $(8\prime)$ *il résulte que la solution n'est pas stable,étant donné que* $|x(t)| + |y(t)| \to \infty$ *lorsque* $t \to +\infty$*.*

IX. ***Les racines de l'équation caractéristique sont :***

$$\lambda_1 = \lambda_2 < 0.$$

Définition 4.1.16

La solution est

$$\begin{cases} x = & (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t}, \\ y = & \dfrac{1}{d} e^{\lambda_1 t}[C_1(\lambda_1 - c) + C_2(1 - \lambda_1 t - ct)]. \end{cases} \qquad (23)$$

Étant donné que $e^{\lambda_1 t} \to 0$ *et* $te^{\lambda_1 t} \to 0$ *lorsque* $t \to +\infty$*, pour tout* $\varepsilon > 0$ *on peut choisir* C_1 *et* C_2 *(par le choix de* x_0 *et* y_0 *) tels que*

$|x(t)| < \varepsilon, \ |y(t)| < \varepsilon$ *quel que soit* $t > 0$*. La solution est donc stable. De plus,* $x(t) \to 0$ *et* $y(t) \to 0$ *lorsque* $t \to +\infty$*.*

Exemple 4.1.12

Étudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$x'(t) = -\,x,$$
$$y'(t) = -\,y.$$

CHERCHONS LES RACINES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \ (\lambda+1)^2 = 0, \ \ \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Dans ce cas $d = 0$ *. La solution du système aura la forme* $(8')$ *:*

$$x = C_1 e^{-t}, \ \ y = C_2 e^{-t}$$

en outre $x \to 0$, $y \to 0$ *quand* $t \to +\infty$*. La solution est stable. La famille de courbes représentées sur le plan de phase aura pour équation*

$$\frac{y}{x} = \frac{C_2}{C_1} = k \ \ ou \ \ y = kx.$$

C'est un faisceau de droites passant par l'origine des coordonnées. Les points se déplaçant sur la trajectoire tendent vers l'origine des coordonnées. Le point singulier $O(0,0)$ *est* ***nœud****.*
Notons qu'au cas où $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ *l'allure de la solution* (22) *ne change pas,mais quand* $t \to$

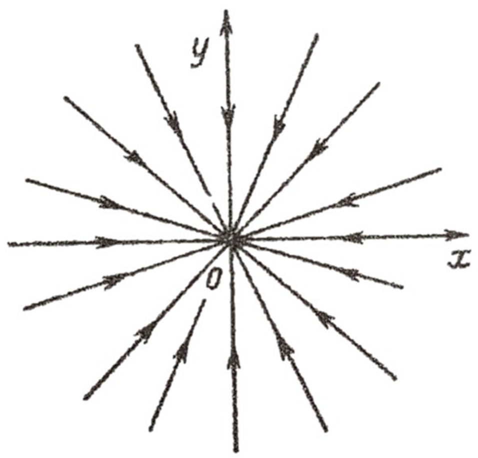

FIGURE 4.10 – nœud (étoile)

$+\infty$, $|x(t)| \to \infty$ *et* $|y(t)| \to \infty$.

La solution est donc instable.

X. ***Les racines de l'équation caractéristique sont :***

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Définition 4.1.17

soit alors

$$\begin{cases} x = & C_1 \ + \ C_2 t, \\ y = & \dfrac{1}{d}[-cC_1 \ + \ C_2 - cC_2 t)]. \end{cases} \tag{24}$$

On voit que $x \to \infty$ *et* $y \to \infty$ *lorsque* $t \to +\infty$. *La solution est donc instable.*

Exemple 4.1.13

Étudier la stabilité de la solution du système d'équations

$$x'(t) = y,$$
$$y'(t) = 0.$$

CHERCHONS LES RACINES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \ \lambda_1^2 = 0, \ \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

La solution est donc

$$y = C_2, \ \ x = C_2 t + C_1$$

Il est évident que $x \to \infty$ *quand* $t \to +\infty$. *La solution est donc instable. Dans le plan de phase l'équation sera* $\dfrac{x'}{y'} = 0$. *Les trajectoires* $y = C$ *sont des droites parallèles à l'axe* Ox . *Le point singulier de cette nature s'appelle* ***selle dégénérée***.

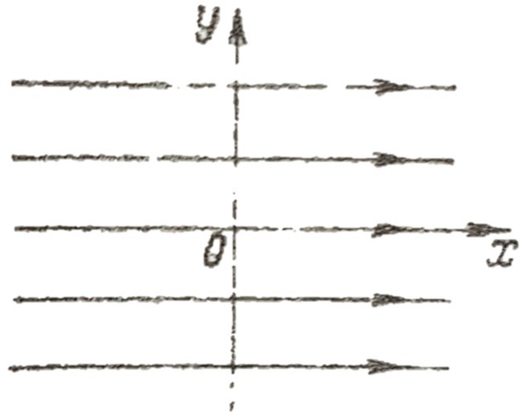

FIGURE 4.11 – selle dégénérée

4.2 Méthodes de recherche de la fonction de Lyapunov

Cette section définie la construction de la fonction de Lyapunov en suivant des étapes précis et à l'aide de quelques théorèmes auxiliaires de type Lyapunov.

4.2.1 Définitions et théorème de base de type Lyapunov

Soit h *un entier non négatif donné où* $h = \infty$, i *étant un temps discret,* $i \in Z \cup Z_0$, $Z = \{0, 1, \ldots\}$, $Z_0 = \{-h, \ldots, 0\}$, S *est un espace de séquences avec des éléments dans* $\mathbb{R}^n$.

Soit $\{\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}\}$ *un espace de probabilité basique,* $\mathcal{F}_i \in \mathcal{F}$, $i \in Z$, *soit une famille de* σ-*algèbres, soit* $\mathbf{E}$ *une espérance,* ξ_j, $j \in Z$, *une suite de variables aléatoires adaptées à* $\mathcal{F}_j$, *et soit le processus* $x_i \in \mathbb{R}^n$ *une solution de l'équation*

$$x_{i+1} = F(i, x_{-h}, \ldots, x_i) + \sum_{j=0}^{i} G(i, j, x_{-h}, \ldots, x_j)\xi_{j+1}, \quad i \in Z \tag{4.2}$$

avec la condition initial

$$x_i = \varphi_i, \qquad i \in Z_0 \tag{4.3}$$

où $F : Z \times S \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $G : Z \times Z \times S \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *On suppose que* $F(i, \ldots)$ *ne dépend pas de* x_j *avec* $j > i$, $G(i, j, \ldots)$ *ne dépend pas de* x_k *avec* $k > j$ *et* $F(i, 0, \ldots, 0) = 0$, $G(i, j, 0, \ldots, 0) = 0$.

Pour la fonction arbitraire $V_i = V(i, x_{-h}, \ldots, x_i)$, $i \in Z$, *l'opérateur* ΔV_i *est défini par*

$$\Delta V_i = V(i+1, x_{-h}, \ldots, x_{i+1}) - V(i, x_{-h}, \ldots, x_i) \tag{4.4}$$

Définition 4.2.1

La solution triviale de (4.2) *pour certains* $p > 0$ *s'appelle :*

i. p-*stable,* $p > 0$, *si pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe un* $\delta > 0$ *tel que* $\mathbf{E}|x_i|^p < \varepsilon$, $i \in Z$, *si* $\|\varphi\|^p = \sup_{i \in Z_0} \mathbf{E}|\varphi_i|^p < \delta$

ii. *Asymptotiquement* p-*stable si elle est* p-*stable et pour chaque fonction initiale* φ_i *la solution* x_i *de* (4.2) *est asymptotiquement* p-*trivial.*

Théorème 4.2.1 *[19]*

Supposons qu'il existe une fonction non négative $V_i = V(i, x_{-h}, \ldots, x_i)$ *satisfait les conditions*

$$\mathbf{E}V(0, \varphi_{-h}, \ldots, \varphi_0) \leq c_1 \|\varphi\|^p \tag{4.5}$$

$$\mathbf{E}\Delta V_i \leq -c_2 \mathbf{E}|x_i|^p, \quad i \in Z \tag{4.6}$$

où c_1, c_2 *et* p *sont des constantes positives. Alors la solution triviale de* (4.2) *est asymptotiquement* p-*stable.*

Démonstration

d'après (4.4), *et* (4.6) *il s'ensuit que*

$$\sum_{j=0}^{i} \mathbf{E}V(i+1, x_{-h}, \dots, x_{i+1}) \;-\; \mathbf{E}V(0, x_{-h}, \dots, x_0) \le -c_2 \sum_{j=0}^{i} \mathbf{E}|x_j|^p$$

De ceci et (4.5) *nous obtenons*

$$\mathbf{E}|x_i|^p \le \sum_{j=0}^{i} \mathbf{E}|x_j|^p \le \frac{1}{c_2}\mathbf{E}V(0, x_{-h}, \dots, x_0) \le \frac{c_1}{c_2}\|\varphi\|^p, \tag{4.7}$$

i.e la solution triviale de (4.2) *est* p*-stable.*

De (4.7) *il s'ensuit aussi que la solution de* (4.2) *est* p*-sommable pour chaque fonction initiale* φ *telle que* $\|\varphi\| < \infty$ *et donc il est asymptotiquement* p*-trivial.*
Ainsi, la solution triviale de (4.2) *est asymptotiquement stable. Le théorème* (4.2.1) *est éprouvé.*

Corollaire 4.2.1

Supposons qu'il existe une fonction non négative $V_i = V(i, x_{-h}, \dots, x_i)$, *qui satisfait aux conditions* (4.5) *et*

$$\mathbf{E}\Delta V_i = -c\mathbf{E}|x_i|^p, \quad i \in Z$$

Alors l'inégalité $c > 0$ *est une condition nécessaire et suffisante pour asymptotique* p*-stabilité de la solution triviale de* (4.2).

Démonstration

La suffisance découle du théorème (4.2.1). *Pour prouver une nécessité, il suffit de montrer que si* $c \le 0$ *alors via* (4.4)

$$\sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{E}\Delta V_j = \mathbf{E}V_i - \mathbf{E}V_0 \ge 0$$

où $\mathbf{E}V_i \ge \mathbf{E}V_0 > 0$ *pour chaque fonction initial* $\varphi \not\equiv 0$. *Cela signifie que la solution triviale de* (4.2) *ne peut pas être asymptotiquement stable.*

4.2.2 Procédure formelle de construction de Lyapunov fonctionnels

Ci-dessous, une procédure formelle pour la construction des fonctionnelles de Lyapunov pour (4.2), (4.3) *est proposé. Cette procédure comprend quatre étapes.*

Étape 1 *: Représente les fonctions* F *et* G *du côté droit de* (4.2) *dans le forme*

$$F(i, x_{-h}, \dots, x_i) = F_1(i, x_{i-\tau}, \dots, x_i) \;+\; F_2(i, x_{-h}, \dots, x_i) \;+\; \Delta F_3(i, x_{-h}, \dots, x_i).$$

$$F_1(i, 0, \dots, 0) \equiv F_2(i, 0, \dots, 0) \equiv F_3(i, 0, \dots, 0) \equiv 0 \tag{4.8}$$

$$G(i,j,x_{-h},\dots,x_j) = G_1(i,j,x_{j-\tau},\dots,x_j) \ + \ G_2(i,j,x_{j-\tau},\dots,x_j),$$
$$G_1(i,j,0,\dots,0) \equiv G_2(i,j,0,\dots,0) \equiv 0$$

où $\tau \geq 0$ *est un entier donné,et l'opérateur* Δ *est défini par* (4.4).

Étape 2 *: Supposons que la solution triviale de l'équation différentielle auxiliaire*

$$y_{i+1} = F_1(i,y_{i-\tau},\dots,y_i) \ + \ \sum_{j=0}^{i} G_1(i,j,y_{j-\tau},\dots,y_j)\xi_{j+1}, \quad i \in Z \tag{4.9}$$

est asymptotiquement p*-stable et qu'il existe une fonction de Lyapunov* $v_i = v(i,y_{i-\tau},\dots,y_i)$ *pour cette équation qui satisfait aux conditions du théorème* (4.2.1).

Étape 3 *: La fonction de Lyapunov* v_i *est construite sous la forme* $V_i = V_{1i} \ + \ V_{2i}$*, où le composant principal est*

$$V_{1i} = v(i,x_{i-\tau},\dots,x_{i-1},x_i \ - \ F_3(i,x_{-h},\dots,x_i))$$

Il est nécessaire de calculer $\mathbf{E}\Delta V_{1i}$ *et d'une manière raisonnable de l'estimer.*

Étape 4 *: Afin de satisfaire aux conditions du théorème* (4.2.1)*, le composant supplémentaire* V_{2i} *est généralement choisi de manière standard.*

Énonçons des remarques sur certaines particularités de cette procédure.

(1) *Il est clair que la représentation* (4.8) *dans la première étape de la procédure n'est pas unique. Par conséquent, pour différentes représentations, on peut construire différentes fonctions de Lyapunov, et donc on a des conditions de stabilité différentes.*

(2) *Dans la deuxième étape pour l'équation auxiliaire* (4.9)*, on peut choisir des différentes fonctions de Lyapunov* v_i*. Ainsi, pour l'équation initiale* (4.2), (4.3) *des différentes fonctions de Lyapunov peuvent être construites et par conséquent différentes conditions de stabilité peuvent être obtenu.*

(3) *Il est également nécessaire de souligner qu'en choisissant différentes méthodes d'estimation* $\mathbf{E}\Delta V_{1i}$ *on peut construire des différentes fonctions de Lyapunov .*
Par conséquent une parmi ces méthodes à des conditions de stabilité différentes.

(4) *Enfin, un moyen standard de la construction de la* $V2i$ *fonctionnelle supplémentaire permet parfois de simplifier la quatrième étape et on n'utilise pas le* $V2i$ *fonctionnel du tout. Ci-dessous, les théorèmes auxiliaires correspondants de type Lyapunov sont considérés.*

4.2.3 Théorèmes auxiliaires de type Lyapunov

En utilisant les théorèmes suivants dans certains cas, il suffit de construire Lyapunov fonctionnelles satisfaisant les conditions plus faibles que (4.6).

Théorème 4.2.2 *[19]*

Supposons qu'il existe une fonctionnelle non négative $V_{1i} = V_1(i, x_{-h}, \dots, x_i)$ *ce qui satisfait à la condition* (4.5) *et aux conditions*

$$\mathbf{E}\Delta V_{1i} \leq a\mathbf{E}|x_i|^p + \sum_{k=-h}^{i} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{E}|x_k|^p, \quad i \in Z, \ \mathbf{A}_{ik} \geq 0 \tag{4.10}$$

$$a + b < 0, \quad b = \sup_{i\in Z}\sum_{j=i}^{\infty} \mathbf{A}_{ji} \tag{4.11}$$

Alors la solution triviale de (4.2) *et* (4.3) *est asymptotiquement* p*-stable.*

Démonstration

En suivant la procédure de construction des fonctionnelles de Lyapunov comme décrit ci-dessus laissez-nous construire la fonction V_i *sous la forme* $V_i = V_{1i} + V_{2i}$*, où* V_{1i} *satisfait les conditions* (4.10), (4.11) *et*

$$V_{2i} = \sum_{k=-h}^{i-1} |x_k|^p \sum_{j=i}^{\infty} \mathbf{A}_{jk}, \qquad i = 1, 2, \dots$$

Calculons $\mathbf{E}\Delta V_{2i}$ *nous obtenons*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Delta V_{2i} =& \mathbf{E}\left(\sum_{k=-h}^{i} |x_k|^p \sum_{j=i+1}^{\infty} \mathbf{A}_{jk} - \sum_{k=-h}^{i-1} |x_k|^p \sum_{j=i}^{\infty} \mathbf{A}_{jk}\right) \\ =& \mathbf{E}|x_i|^p \sum_{j=i+1}^{\infty} \mathbf{A}_{ji} - \sum_{k=-h}^{i-1} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{E}|x_k|^p\end{aligned}$$

De ceci et (4.10) *pour la fonctionnelle* $V_i = V_{1i}+V_{2i}$ *nous obtenons* $\mathbf{E}\Delta V_i \leq (a+b)\mathbf{E}|x_i|^p$ *avec* (4.11) *cette inégalité implique* (4.6). *Ainsi, il existe un* V_i *fonctionnel qui satisfait aux conditions du théorème* (4.2.1)*, c'est-à-dire la solution triviale de* (4.2) *et* (4.3) *est asymptotiquement stable.*

Corollaire 4.2.2

Supposons qu'il existe une fonction non négative $V_i = V(i, x_{-h}, \dots, x_i)$ *satisfait la condition* (4.5) *et* (4.10) *avec l'égalité exacte au lieu de l'inégalité.*
Alors la condition (4.11) *est une condition nécessaire et suffisante pour la* p*-stabilité asymptotique de la solution triviale de* (4.2).

Démonstration

La suffisance découle du théorème (4.2.2). *La nécessité est prouvée semblable au théorème* (4.2.2) *et Corollaire* (4.2.1).

Théorème 4.2.3 *[19]*

Supposons qu'il existe une fonction non négative $V_i = V(i, x_{-h}, \ldots, x_i)$ *satisfait aux conditions*(4.5) *et*

$$\mathbf{E}\Delta V_i \leq a\mathbf{E}|x_i|^p \; + \; b\mathbf{E}|x_{i-m}|^p, \;\; i \in Z, \; m > 0 \tag{4.12}$$

Si la solution de (4.2) *et* (4.3) *est* p*-bornée mais n'est pas* p*-sommable alors*

$$a + b \geq 0 \tag{4.13}$$

Démonstration

Sommation (4.12) *de* $i = 0$ *à* $i = N + m, \; N > 0,$ *on obtient*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}V_{N+m+1} - \mathbf{E}V_0 \leq & a\sum_{i=0}^{N+m}\mathbf{E}|x_i|^p \; + \; b\sum_{i=0}^{N+m}\mathbf{E}|x_{i-m}|^p \\ = & a\sum_{i=0}^{N+m}\mathbf{E}|x_i|^p \; + \; b\sum_{i=0}^{N}\mathbf{E}|x_i|^p \; + \; b\sum_{i=-m}^{-1}\mathbf{E}|\varphi_i|^p \\ = & (a+b)\sum_{i=0}^{N}\mathbf{E}|x_i|^p \; + \; a\sum_{i=N+1}^{N+m}\mathbf{E}|x_i|^p \; + \; b\sum_{i=-m}^{-1}\mathbf{E}|\varphi_i|^p\end{aligned}$$

De ceci et $V_i \geq 0$ *il s'ensuit que*

$$-(a+b)\sum_{i=0}^{N}\mathbf{E}|x_i|^p \leq \mathbf{E}V_0 \; + \; a\sum_{i=N+1}^{N+m}\mathbf{E}|x_i|^p \; + \; b\sum_{i=-m}^{-1}\mathbf{E}|\varphi_i|^p \tag{4.14}$$

Puisque la solution de (4.2) *et* (4.3) *est limitée par* p, *i.e* $\mathbf{E}|x_i|^p \leq C, \;\; i \in Z,$ *en utilisant* (4.5) *nous avons*

$$-(a+b)\sum_{i=0}^{N}\mathbf{E}|x_i|^p \leq c_1\|\varphi\|^p \; + \; m(|a|C \; + \; |b|\|\varphi\|^p) < \infty \tag{4.15}$$

Supposons que (4.13) *ne soit pas valide, i.e* $a + b < 0$. *De* (4.15), *il s'ensuit que la solution de* (4.2) *et* (4.3) *est* p*-sommable et nous obtenons une contradiction avec la condition du théorème* (4.2.3). *Par conséquent,*(4.13) *tient.*

Corollaire 4.2.3 *[19]*

Supposons qu'il existe une fonction non négative $V_i = V(i, x_{-h}, \ldots, x_i)$ *qui satisfait aux conditions* (4.5), (4.12) *et*

$$a + b < 0 \tag{4.16}$$

Alors la solution de (4.2) *et* (4.3) *est* p*-sommable ou n'est pas* p*-bornée.*

Théorème 4.2.4 *[19]*

Supposons qu'il existe une fonction non négative $V_i = V(i, x_{-h}, \ldots, x_i)$ *satisfait aux conditions* (4.5), (4.12) *et* (4.16). *Si* $a \leq 0$ *alors la solution triviale de* (4.2) *et* (4.3) *est asymptotiquement stable. Si* $a > 0$, *alors chaque solution* p*-bornée de* (4.2) *et* (4.3) *est asymptotiquement* p*-trivial.*

Démonstration

Du corollaire (4.2.3), *il s'ensuit que par conditions* (4.5), (4.12) *et* (4.16) *chaque solution* p*-borné de* (4.2) *et* (4.3) *est* p*-sommable et, par conséquent, elle est asymptotiquement* p*-trivial.*
Donc, il suffit de montrer que si $a \leq 0$, *alors la solution triviale de* (4.2) *et* (4.3) *est* p*-stable.*

Notons que de (4.12) *on a* (4.14). *Si* $a = 0$, *alors via* (4.14)*et* (4.15) *nous avons*

$$|b|\mathbf{E}|x_N|^p \leq |b|\sum_{i=0}^{N}\mathbf{E}|x_i|^p \leq \mathbf{E}V_0 \leq c_1\|\varphi\|^p,$$

i.e la solution triviale de (4.2) *et* (4.3) *est* p*-stable.*

Soit $a < 0$. *Si* $b \leq 0$, *la condition* (4.6) *découle de la condition* (4.12) *et du Théorème* (4.2.1) *il s'ensuit que la solution triviale de* (4.2) *et* (4.3) *est asymptotiquement* p*-stable. Si* $b > 0$, *alors la condition* (4.12) *est un cas particulier de condition* (4.10).
De ceci et (4.5), (4.16) *il s'ensuit que la fonctionnelle* V_i *satisfait les conditions du Le théorème* (4.2.2) *et, par conséquent, la solution triviale de* (4.2) *et* (4.3) *est asymptotiquement* p*-stable.*

4.2.4 Exemple illustratif montrant les moyens de construction de la fonction de Lyapunov

Voici la procédure pour la construction des fonctionnelles de Lyapunov décrites avant par une sous-section est utilisé pour l'étude de la p*-stabilité de l'équation différentielle scalaire à coefficients constants et* $p = 2k$, $k = 1, 2, \ldots$ *via différentes représentations de l'équation considérée sous la forme* (4.8) *différentes conditions de* p*-stabilité asymptotique obtenus.*

Considérons l'équation

$$x_{i+1} = ax_i + bx_{i-1} + \sigma x_{i-1}\xi_{i+1} \qquad , i \in Z \tag{4.17}$$

où a, b, σ *sont des constantes connues, et* ξ_{i+1}, $i \in Z$, *est une séquence de* $\mathcal{F}_i$*-adaptée variables aléatoires mutuellement indépendantes avec* $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $\mathbf{E}\xi_i^2 = 1$.

Pour commencer, on étudie la stabilité quadratique moyenne asymptotique, i.e le cas $p = 2$.

En utilisant les quatre étapes de la procédure pour la construction des fonctionnelles de Lyapunov, nous obtenons ce qui suit.

1. *Le membre de droite de* (4.17) *est déjà représenté sous la forme* (4.8), *où* $\tau = 0$,

$$F_1(i, x_i) = ax_i, \quad F_2(i, x_{-1}, \dots, x_i) = bx_{i-1},$$
$$F_3(i, x_{-1}, \dots, x_i) = 0, \quad G_1(i, j, x_j) = 0, \quad j = 0, \dots, i,$$
$$G_2(i, j, x_{-1}, \dots, x_j) = 0, \quad j = 0, \dots, i-1,$$
$$G_2(i, i, x_{-1}, \dots, x_i) = \sigma x_{i-1},$$

2. *L'équation auxiliaire* (4.9) *dans ce cas a la forme* $y_{i+1} = ay_i$. *La fonction* $v_i = y_i^2$ *est une fonction de Lyapunov pour cette équation si* $|a| < 1$, *puisque* $\Delta v_i = (a^2 - 1)y_i^2$.

3. *La partie principale* V_{1i} *de la fonction de Lyapunov* $V_i = V_{1i} + V_{2i}$ *doit être choisie sous la forme* $V_{1i} = x_i^2$. *Calculons* $\mathbf{E}\Delta V_{1i}$ *pour* (4.17) *nous obtenons*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Delta V_{1i} =& \mathbf{E}(x_{i+1}^2 - x_i^2) = \mathbf{E}[(ax_i + bx_{i-1} + \sigma x_{i-1}\xi_{i+1})^2 - x_i^2] \\ \le& (a^2 - 1 + |ab|)\mathbf{E}x_i^2 + \mathbf{A}\mathbf{E}x_{i-1}^2, \quad \mathbf{A} = b^2 + |ab| + \sigma^2.\end{aligned}$$

4. *Choisir le* V_{2i} *fonctionnel supplémentaire sous la forme* $V_{2i} = \mathbf{A}\mathbf{E}x_{i-1}^2$ *nous trouvons que la fonction* $V_i = V_{1i} + V_{2i}$ *satisfait aux conditions du théorème* (4.2.1), *à condition cette*

$$|a| + |b| < \sqrt{1 - \sigma^2} \tag{4.18}$$

Ainsi, l'inégalité (4.18) *est une condition suffisante pour la stabilité quadratique moyenne asymptotique de la solution triviale de* (4.17).

Notons, cependant, qu'en faisant l'hypothèse (4.18), *le* V_{1i} *fonctionnel satisfait les conditions du théorème* (4.2.2). *C'est donc une option pour utiliser le* V_{2i} *fonctionnel supplémentaire.*

Les régions de stabilité pour (4.17) *données par l'inégalité* (4.18) *sont montrées sur la Fig. 2.1 pour différentes valeurs de* σ^2 : $(1)\sigma^2 = 0; (2)\sigma^2 = 0.4; (3)\sigma^2 = 0.8$.

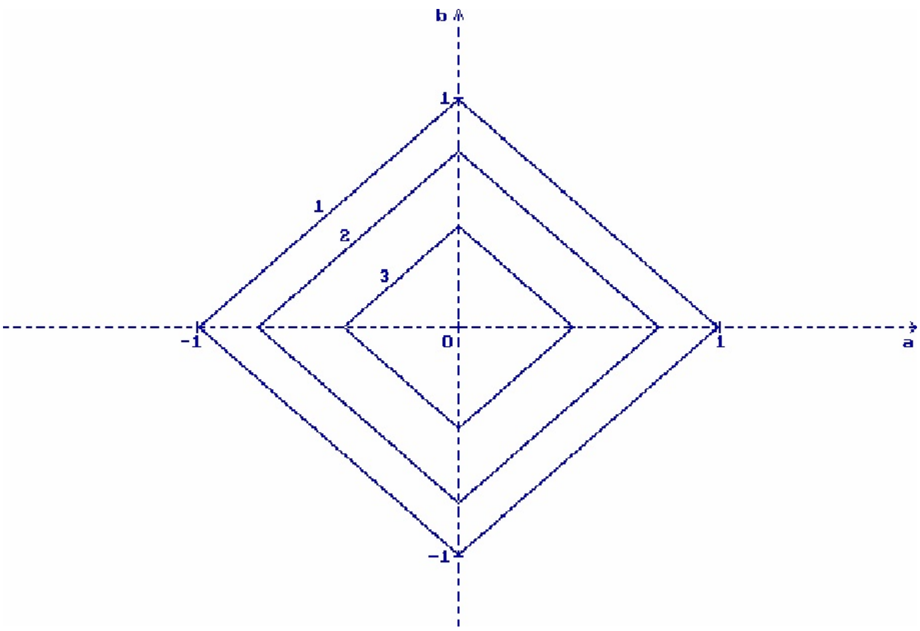

FIGURE 4.12 – Régions de stabilité pour (4.17) données par l'inégalité (4.18) pour différentes valeurs de σ^2 : $(1)\sigma^2 = 0; (2)\sigma^2 = 0.4; (3)\sigma^2 = 0.8$.

Conclusion générale

Les résultats présentés, dans ce travail, constituent un apport à l'étude de la stabilité et l'instabilité et ses divers types afin d'analyser le comportement des solutions des équations différentielles et des systèmes différentiels.

Dans ce mémoire nous avons établit un résultat de la stabilité des équations différentielles ordinaires,nous avons présenté quelques observations les plus connus et utilisés afin d'étudier la stabilité des systèmes différentiels.

Au cours de notre travail on a présentés la fonction de Lyapunov et ses conditions d'application pour terminer notre travail par la théorie de Lyapunov qui joue un rôle primordial en visualisant son rapport avec la stabilité i.e.la stabilité au sens de Lyapunov.

Pour conclure la méthode de Lyapunov ainsi présentés est très puissante et tellement utile dès lors qu'on trouve la bonne fonction de Lyapunov.En effet, il n'existe pas de méthode générale pour la trouver mais la recherche de cette dernière peut se formaliser en un problème d'optimisation en utilisant également des méthodes permettant de réaliser un bouclage de manière qu'une fonction de Lyapunov choisie à l'avance, garantisse la stabilité.

Bibliographie

[1] Vladimir Arnold. Equations différentielles ordinaires.

[2] Ourida Chabour. *Stabilisation des systèmes non linéaires.* PhD thesis, Metz, 2000.

[3] Ralph Chill and Ph Adda. Equations différentielles et stabilité.

[4] Earl A Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* Tata McGraw-Hill Education, 1955.

[5] JP Demailly. Analyse numérique et équations différentielles ; collection grenoble sciences, presses universitaires de grenoble, 1996.

[6] Imen Ellouze. *Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs.* PhD thesis, Université de Metz ; Faculté des Sciences de Sfax, 2010.

[7] X Gourdon. Analyse (les maths en tête), 1994.

[8] VARDA TEPPER Haimo. Finite time controllers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(4) :760–770, 1986.

[9] Philip Hartman. Ordinary differential equations, 2002.

[10] Frédéric Jean. *Stabilité et commande des systèmes dynamiques.* September 2011.

[11] S. Lang. *Analyse réelle.* Cours. Mathématiques. InterEditions, 1977.

[12] Solomon Lefschetz, Solomon Lefschetz, Solomon Lefschetz, Russia Mathematician, Solomon Lefschetz, Russie Mathématicien, and Etats-Unis France. *Differential equations : Geometric theory*, volume 6. Interscience Publishers New York, 1963.

[13] E Moulay and W Perruquetti. Finite time stability of nonlinear systems. In *Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on*, volume 4, pages 3641–3646. IEEE, 2003.

[14] Emmanuel Moulay. *Une contribution à l'étude de la stabilité en temps fini et de la stabilisation.* PhD thesis, Ecole Centrale de Lille ; Université des Sciences et Technologie de Lille-Lille I, 2005.

[15] Hirosi Okamura. Condition nécessaire et suffisante remplie par les équations différentielles ordinaires sans points de peano. *Mem. Coll. Sci., Kyoto Imperial Univ., Series A*, 24 :21–28, 1942.

[16] Nikolaĭ Piskunov. *Calcul différentiel et intégral.*

[17] H Reinhart. Equations différentielles, fondements et applications, 1982.

[18] Nicolas Rouche, Patrick Habets, and Michel Laloy. *Stability theory by Liapunov's direct method*, volume 4. Springer, 1977.

[19] Leonid Shaikhet. *Lyapunov functionals and stability of stochastic difference equations.* Springer Science & Business Media, 2011.

[20] Taro Yoshizawa. Stability theory by liapunov's second method. 1966.

Résumé :

Ce mémoire de Master a pour but d'étudier la stabilité ou l'instabilité de la solution d'une équation différentielle ou un système différentielle en définissant des résultats fondamentaux et de visualiser le type de stabilité associé à cette équation ou système.

En plus, ce document à l'intérêt d'introduire la théorie de Lyapunov qui consiste à utilisée des fonctions auxiliaires permettant de suivre le comportement des trajectoires de l'équation ou le système différentielle afin de garantir la stabilité de certaines solutions.Et, c'est ce qu'on appelle" la stabilité au sens de Lyapunov".

Finalement,on termine ce recueil de déductions par une procédure formelle de construction de la fonction de Lyapunov suivi par quatre étapes comme étant une parmi les méthodes de recherches de cette dernière.

Ce mémoire n'a pas la prétention d'apporter de nouveaux résultats,mais il présente en détails quelques observations obtenus par des différents auteurs,dans des travaux présentés en bibliographie.

Mots clés : Stabilité,instabilité,équation différentielle, système différentielle,la stabilité au sens de Lyapunov, fonction de Lyapunov.

Abstract :

This Master's dissertation aims to study the stability or instability of the solution of a differential equation or a differential system by defining fundamental results and to visualize the type of stability associated with this equation or system.

In addition, this document has the advantage of introducing the Lyapunov theory which consists in using auxiliary functions making it possible to follow the behavior of the trajectories of the equation or the differential system in order to guarantee the stability of certain solutions. what is called "stability in the sense of Lyapunov".

Finally, we conclude this collection of deductions by a formal procedure of construction of the Lyapunov function followed by four steps as one of the research methods of the latter.

This thesis does not pretend to bring new results, but it presents in detail some observations obtained by different authors in works presented in the bibliography.

Key words : Stability, instability, differential equation, differential system, Lyapunov stability, Lyapunov function.