

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
المركز الجامعي لعين تموشنت
Centre Universitaire d'Ain Témouchent

Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



PROJET DE FIN D'ETUDES
Pour l'obtention du diplôme de Master en :
Domaine : **SCIENCE ET TECHNOLOGIE**
Filière : **GENIE MECANIQUE**
Spécialité : **CONSTRUCTION MECANIQUE**
Thème

**Modélisation numérique du mouvement vibratoire
des rotors flexibles et rigides**

Présenté Par :

- 1) BETAOUAF HIND
- 2) MANSOURI NADJLAE KHEIRA

Devant le jury composé de :

Président : AMIRAT MOHAMMED
Examineur : ASSAM HASSAN
Encadreur : BELOUFA AMINE.

Année universitaire 2018/2019

Remerciement

Avant tout, nous remercions le bon Dieu qui nous a donné la volonté et le courage pour réaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer notre sincère reconnaissance à **Mr. BELOUFA Mohamed Amine**, maître de conférences notre directeur de thèse pour son appui et ses conseils donnés tout le long de ce travail, ainsi que pour sa compréhension et ses idées.

Nous tenons à saisir cette occasion et adresser nos profonds remerciements et nos profondes reconnaissances à nos parents car à cause leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles sans s'oublier toutes nos familles.

Nous adressons nos remerciements pour **Melle. Cheriet Rahmouna** doctorante au niveau du centre universitaire Ain Témouchent.

Enfin, nos sincères remerciements s'adressent à tous les membres du département Génie mécanique, **Dr. GANDOUZ, Dr. BELHENINI, Dr. SARI, Mr. ASSAM HASSAN, Dr OUDED, Dr. AMIRAT, Dr. BOUAFIA, Professeur. ZIADI**, ainsi que tous les autres, pour l'aide que chacun d'eux a pu nous apporter et pour les bons moments passés ensemble.

Résumé

ملخص

هذه المذكرة لها هدفين : الهدف الرئيسي هو نمذجة الحركة الاهتزازية للدوار المرن والصلب باستخدام طريقة العناصر المحدودة. الهدف الثاني هو زيادة هامش السرعة الحرجة. لذلك ، يلعب المرء على معايير مختلفة مثل مادة الدوار ، والعمود ، والقرص ، وعلى الصلابة ومعاملات تخميد المحامل. أظهرت النتائج أن المادة لا تؤثر على هامش السرعة الحرج ، في حين تستخدم معاملات الصلابة والتخميد لزيادة هامش السرعة الحرجة. **الكلمات المفتاحية:** الدوار المرن والصلب ، السرعة الحرجة ، الصلابة والتثبيط للمحامل.

Résumé

Ce mémoire a pour deux objectifs : L'objectif principal est de modéliser le mouvement vibratoire du rotor flexible et rigide en utilisant la méthode des éléments finis. Le deuxième objectif est de faire augmenter la marge de vitesse critique.

Pour cela, on joue sur différents paramètres tels que le matériau du rotor, de l'arbre, du disque, et sur les raideurs et les coefficients d'amortissements des paliers.

Les résultats ont montré que le matériau n'a pas une influence sur la marge de vitesse critique, par contre les raideurs et les coefficients d'amortissements servent à augmenter la marge de vitesse critique.

Mots clés: Rotor flexible et rigide, vitesse critique, raideurs et amortissements des paliers.

Abstract

This summary has two objectives. The main objective is to model the vibratory motion of the flexible and rigid rotor using the finite element method. The second objective is to increase the critical speed margin.

For that, one plays on various parameters such as the material of the rotor, of the shaft, the disk, and on the stiffness and the coefficients of damping of the bearings.

The results showed that the material does not influence the critical speed margin, while stiffness and damping coefficients can increase the critical speed margin.

Key words: Flexible and rigid rotor, critical speed, stiffness and damping of the bearings.

Sommaire

Remerciement	2
Résumé.....	3
Liste des Figures.....	6
Liste des Tableaux	8
NOMENCLATURE.....	9
INTRODUCTION GENERALE.....	11
CHAPITRE I NOTIONS BIBLIOGRAPHIQUES SUR LES ROTORS INDUSTRIELS.....	12
Introduction	13
I. Notions Sur Les Rotors Industriels.....	15
I.1 Définition	15
I.1.1 Classifications des rotors	16
I.1.2 Caractéristiques des éléments de rotor	17
I.1.3 Type de palier.....	18
I.1.4 L'effet de dissymétrie	21
I.1.5 L'effet d'embarquement	23
I.2 Dynamique des rotors	23
I.2.1 Hypothèses cinématiques	23
I.2.2 Précession et Nutation	25
I.2.3 Analyse dynamique et vibratoire des Rotors.....	28
I.2.3.1 Analyse dynamique et vibratoire d'un rotor flexible.....	28
I.2.3.2 Analyse dynamique et vibratoire d'un rotor rigide.....	28
I.3 Les divers types d'excitations.....	29
I.3.1 Les forces de balourd.....	29
I.3.2 Les forces de fluide	29
I.3.3 Forces aléatoires	30
I.4 Les Solutions qui corrigent les défauts générant des vibrations.....	30
I.4.1 L'analyse de stabilité	30
I.4.2 Équilibrage	30
I.5 L'effet gyroscopique	31
I.6 Conclusion.....	31
Référence :	32
CHAPITRE II ÉQUATIONS FONDAMENTALES ET CALCUL THEORIQUE DE LA DYNAMIQUE DES ROTORS	33
Introduction.....	34
II.1 Dynamique d'un corps déformable.....	34
II.2 Équations fondamentales de mouvement	35
II.3 Calcul de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de rotor	37

II.3.1 Élément de disque	37
II.3.1.1 Énergie cinétique	38
II.3.2 Élément d'arbre.....	39
II.3.2.1 Énergie cinétique.....	39
II.3.2.2 L'énergie de déformation	41
II.3.3 Élément de balourd	43
II.4.1 L'énergie de l'amortisseur et palier.....	45
II.5.1 Modèle analytique (modèle simple)	47
II.6 Les différentes raideurs.....	48
II.7 Les équations différentielles partielles.....	50
II.7.1 Modèle symétrique (pas de roulement).....	50
II.7.2 Interprétation du Graphe	51
II.8 Problème	52
II.8.1 La Solution du problème.....	53
II.9 Conclusion	58
Référence.....	59
CHAPITRE III MODELISATION ELEMENTS FINIS DU ROTOR.....	60
Introduction.....	61
III.1 La conception du rotor sous logiciel WORKBENCH.....	61
III.2 Simulation du Rotor en ANSYS 15.0 (workbench).....	62
III.2.1 Dimensionnement et géométrie du rotor	62
III.2.2 Matériaux utilisés pour la simulation.....	63
III.2.3 Maillage :.....	64
III.3 Analyse Modale.....	72
CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS.....	73
Introduction.....	74
IV.1 La schématisation des modes propres du rotor en acier.....	74
IV.2 Résultats du diagramme de Campbell	77
IV.3 Influence du matériau utilisé (alliage d'aluminium).....	81
IV.4.2 La schématisation des modes propres du rotor en alliage d'aluminium	82
IV.4.2.1 Résultats du diagramme de Campbell	83
IV.3 Influence de l'amortissement et de la raideur des paliers.....	86
CONCLUSION GENERALE.....	89

Liste des Figures

<i>Figure 1 Rotor en ¼ de coupe Avec disques.</i>	13
<i>Figure 2 Rotor étagé d'une pompe hydraulique Équilibrée à la force axiale avec le plus grand diamètre.</i>	13
<i>Figure 3 Rotor d'une pompe hydraulique centrifuge Équilibré axialement par deux épaulements.</i>	14
<i>Figure 4 Rotor de turbomachine.</i>	14
<i>Figure 5 Modèle d'un rotor industriel. [2]</i>	15
<i>Figure 6 Rotor de Jeffcott [1] .</i>	17
<i>Figure 7 types de Roulements [1] .</i>	19
<i>Figure 8 Paliers magnétiques [2] .</i>	20
<i>Figure 9 Palier hydrodynamique [1] .</i>	20
<i>Figure 10 Influence des dissymétries sur le diagramme de Campbell [1] .</i>	21
<i>Figure 11 Poutre d'Euler Bernoulli [4]</i>	24
<i>Figure 12 Nutation et Précession. [4]</i>	25
<i>Figure 13 Rotation propre, précession, et nutation [4].</i>	27
<i>Figure 14 L'effet gyroscopique.</i>	31
<i>Figure 15 Repère et référence d'un disque monté sur un arbre flexible.</i>	37
<i>Figure 16 Repère et la rotation de la précession et nutation.</i>	38
<i>Figure 17 Section élémentaire de l'arbre.</i>	40
<i>Figure 18 Section droit de l'arbre.</i>	41
<i>Figure 19 Élément de balourd.</i>	44
<i>Figure 20 Distribution de balourd sur le rotor.</i>	44
<i>Figure 21 Modélisation de la distribution de balourd.</i>	44
<i>Figure 22 Modélisation de l'amortissement tournant.</i>	45
<i>Figure 23 Amortissement et raideur des paliers.</i>	46
<i>Figure 24 Modèle simple de rotor.</i>	47
<i>Figure 25 La précession synchrone.</i>	48
<i>Figure 26 Diagramme de Campbell.</i>	51
<i>Figure 27 Les trois premières formes de flexion d'une poutre appuyée.</i>	52
<i>Figure 28 Modèle d'un rotor déformable.</i>	52
<i>Figure 29 Diagramme de Campbell obtenu.</i>	58
<i>Figure 30 Conception du rotor sous logiciel WORKBENCH.</i>	61
<i>Figure 31 La Simulation du rotor.</i>	62
<i>Figure 32 La géométrie du rotor.</i>	62
<i>Figure 33 Maillage quadrilatère de l'arbre.</i>	64
<i>Figure 34 Maillage du rotor par l'élément quadrilatère.</i>	64
<i>Figure 35 La vitesse de rotation.</i>	67
<i>Figure 36 Le déplacement distant 1.</i>	68

<i>Figure 37 Le déplacement distant 2.....</i>	<i>68</i>
<i>Figure 38 Le contact collé l'arbre et le disque.....</i>	<i>69</i>
<i>Figure 39 Maillage quadrilatère de la géométrie.....</i>	<i>69</i>
<i>Figure 40 Maillage du disque flexible par l'élément quadrilatère.....</i>	<i>70</i>
<i>Figure 41 Comparaison entre les diagrammes de Campbell du rotor théorique à disque rigide et du rotor numérique à disque rigide.....</i>	<i>77</i>
<i>Figure 42 Diagramme de Campbell du rotor à disque rigide théorique et rotor numérique à disque flexible.....</i>	<i>79</i>
<i>Figure 43 Diagramme de Campbell du rotor à disque flexible en acier et en alliage d'aluminium.....</i>	<i>84</i>
<i>Figure 44 Palier amorti.....</i>	<i>86</i>
<i>Figure 45 Diagramme de Campbell numérique du rotor en alliage d'aluminium avec des paliers flexibles et amortis.....</i>	<i>88</i>

Liste des Tableaux

<i>Tableau II.1 Rigidité équivalente de ressort des systèmes dynamiques simples [3].....</i>	<i>49</i>
<i>Tableau II.2 Résultats de la variation des fréquences propres en fonctions des fréquences de rotation.....</i>	<i>57</i>
<i>Tableau III.1 Les propriétés géométriques du rotor.....</i>	<i>63</i>
<i>Tableau III.2 Les propriétés du matériau du rotor.....</i>	<i>63</i>
<i>Tableau III.3 Les éléments utilisés et leur DDL.....</i>	<i>65</i>
<i>Tableau III.4 Illustration des éléments.....</i>	<i>66</i>
<i>Tableau III.5 Les vitesses appliquées sur le rotor.....</i>	<i>67</i>
<i>Tableau III.6 Les éléments utilisés et leur DDL.....</i>	<i>70</i>
<i>Tableau III.7 Illustration des éléments.....</i>	<i>71</i>
<i>Tableau IV. 1 Les déplacements initiales du rotor à disque rigide.....</i>	<i>75</i>
<i>Tableau IV. 2 Les déplacements initiales du rotor à disque flexible.....</i>	<i>76</i>
<i>Tableau IV. 3 Les fréquences propres théoriques et numériques du rotor à disque rigide.....</i>	<i>77</i>
<i>Tableau IV. 4 Les fréquences propres du rotor à disque rigide théorique et à disque flexible numérique.....</i>	<i>79</i>
<i>Tableau IV. 5 Les propriétés de l'alliage d'aluminium.....</i>	<i>81</i>
<i>Tableau IV. 6 Les déplacements initiales du rotor à disque flexible en alliage d'aluminium.....</i>	<i>83</i>
<i>Tableau IV. 7 Les fréquences propres du rotor à disque flexible numérique en acier et en alliage d'aluminium.....</i>	<i>83</i>
<i>Tableau IV. 8 Les déplacements initiales du rotor à paliers flexibles ou amortis et à disque flexible en alliage d'aluminium.....</i>	<i>87</i>

NOMENCLATURE

a	Effet gyroscopique total de rotor
[C]	Matrice d'amortissement
d	Distance de balourde du centre géométrique de l'arbre
f	Fréquence naturelle
E	Module d'élasticité
E_d	Énergie d'amortisseur
E_p	Énergie potentielle
F	La force unitaire
G	Module de cisaillement
I	Moment d'inertie
\bar{I}_C	Tenseur d'inertie principale
I_m	Moment d'inertie terme symétrique
I_m	Moment d'inertie terme antisymétrique
j	Nombre complexes
K	Raideur des paliers
k_a	Rigidité de l'arbre
[K]	Matrice de rigidité
L	Longueur
N	Vitesse de rotation
M	Masse totale
M_a	Masse de l'arbre
M_D	Masse de disque
m_b	Masse de balourde
$\{q_i\}$	Cordonnées généralisés

q, \dot{q}, \ddot{q}	Vitesse et déassement, vecteur accélération
$R(x,y,z)$	Repère tournant
R_0	Repère fixe
S	Surface
T_a	Énergie cinétique de l'arbre
T_D	Énergie cinétique de disque
T_b	Énergie cinétique de balourde
t	Temps
U	Énergie de déformation
u et w	Cordonnées du centre géométrique de disque O dans le repère fixe
u^* et w^*	Cordonnées du centre géométrique de disque O dans le repère mobile
w_x, w_y, w_z	Vecteur de rotation instantanées suivants x, y, z

Symboles grecques

ε	Accélération angulaire
ρ	La masse volumique
σ	Contrainte de flexion
τ	Contrainte de cisaillement
θ, φ, Ψ	Déplacement angulaire
ω	vitesse critique
Ω	Pulsation propre
λ	Solution de l'équation

INTRODUCTION GENERALE

Les machines tournantes sont connues comme des équipements essentielles qui sont souvent trouvées dans différents domaines de la technologie moderne tel que les installations industrielles (thermique, nucléaire, etc). Ils comprennent deux éléments principaux, une partie fixe s'appelle le stator et une partie tournante s'appelle le rotor. Suivant le rôle auquel sont utilisées, ils ont destiné pour transformer une mode d'énergie.

Les arbres tournants peuvent être le siège des phénomènes vibratoires qui perturbent leur fonctionnement normal. Ces vibrations proviennent généralement dues aux forces excitatrices qui sont d'origine de balourd, instabilité de fluide environnement, excitations aléatoire (choc, séisme, etc).

La dynamique des structures l'un des branches de la science d'engineering qui nous permettre de bien prédire les niveaux vibratoires et les zones de vulnérabilité dans les machines tournantes de façon à déterminer les fréquences naturelles et les modes propres de système tournant.

La simulation numérique basée sur la méthode des éléments finis est une méthode très sophistiqué et efficace pour le calcul des structures très complexe dans les machines tournantes.

Le sujet de cette mémoire a pour deux objectifs :

- Modélisation du mouvement vibratoire du rotor flexible et rigide en utilisant la méthode des éléments finis.
- Augmentation de la marge de vitesse critique.

Notre travail est présenté en quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à des généralités sur les rotors des machines tournantes industrielles, description, classification ainsi que leurs applications. Une synthèse bibliographique sur la dynamique des rotors rigides et flexibles est également présentée.

Le deuxième chapitre présente les équations fondamentales et le calcul théorique de la dynamique des rotors. Le troisième chapitre présente la modélisation par éléments finis du rotor.

Le quatrième chapitre est consacré aux résultats et discussions.

**CHAPITRE I NOTIONS
BIBLIOGRAPHIQUES SUR
LES ROTORS
INDUSTRIELS**

Introduction

Les ensembles tournants sont des structures aux formes et aux comportements très complexes qui sont aux cœurs des équipements Industriels. L'étude du comportement dynamique et vibratoire des rotors occupe une place importante dans l'histoire de la science, notamment dans la dynamique des structures et des machines. Il est considéré parmi les phénomènes les plus complexes dont la modélisation et la simulation exigent des moyens numériques très efficaces et rapides ; ainsi que la réalisation des expériences et des essais plus performant.

Ce problème continue d'attirer l'attention des ingénieurs, chercheurs et savants jusqu'à nos jours malgré le nombre considérable de travaux théoriques, expérimentaux et numériques qui lui ont été consacrés dans cette synthèse bibliographique, on propose d'examiner quelques travaux (les plus importants) afin de préciser notre contribution dans l'ensemble des recherches consacrées à ce type de phénomène.

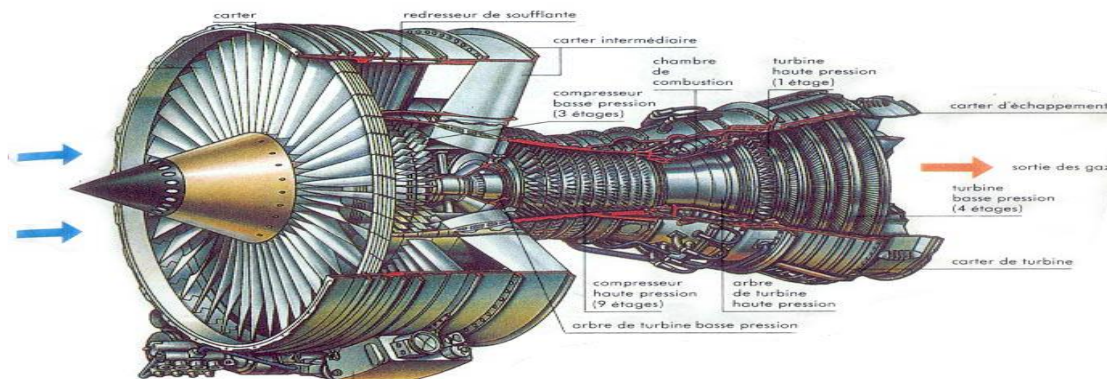


Figure 1 Rotor en ¼ de coupe Avec disques.

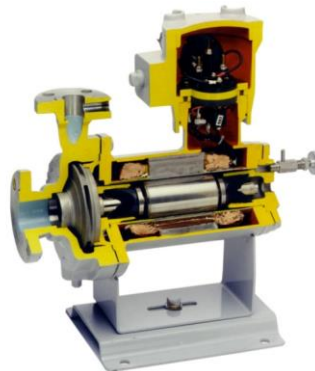


Figure 2 Rotor étagé d'une pompe hydraulique Équilibrée à la force axiale avec le plus grand diamètre.



Figure 3 Rotor d'une pompe hydraulique centrifuge Équilibré axialement par deux épaulements.

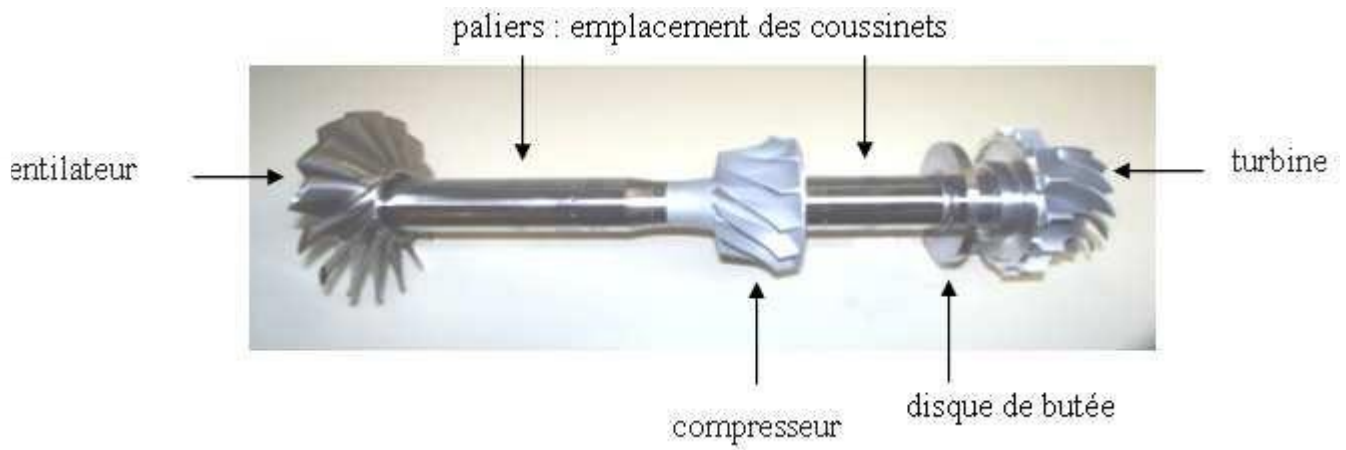


Figure 4 Rotor de turbomachine.

I. Notions Sur Les Rotors Industriels

I.1 Définition

Un rotor est un élément tournant autour d'un axe fixe [1] , constitué d'un arbre reposant sur des paliers, et comportant un ou plusieurs disques. Le champ d'application des rotors est vaste, nous les trouvons dans les satellites géostationnaires, dans les machines tournantes industrielles.

Le rôle principale des rotors est de transformer un mode d'énergie selon les applications auxquelles ils sont destinés (l'aéronautique, l'industrie pétrolière, centrale électrique et hydraulique, l'industrie électronique et pharmaceutique, etc), ils sont souvent composés de plusieurs tronçons et soumis à des sollicitations d'origines diverses [2] .

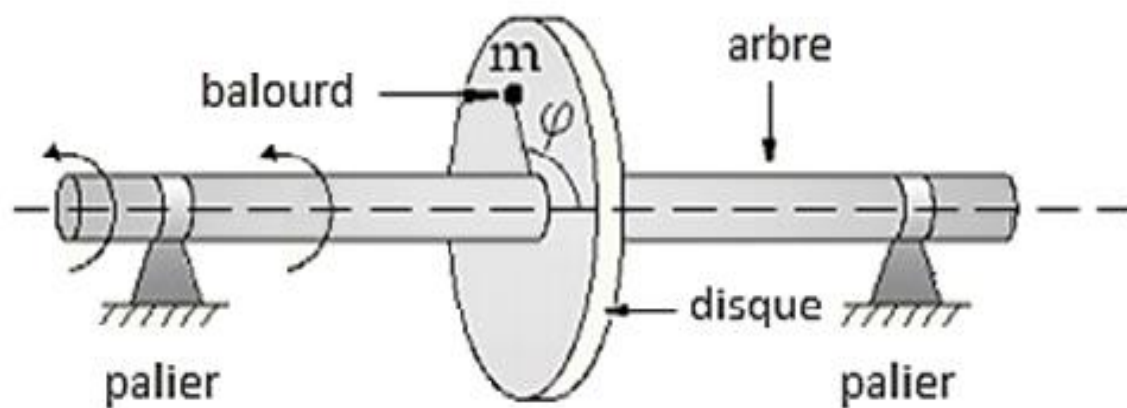


Figure 5 Modèle d'un rotor industriel. [2]

I.1.1 Classifications des rotors

On peut classer les rotors industriels selon deux paramètres.

❖ **Selon les paramètres géométriques:**

- **à long arbre** : les dimensions de l'arbre sont plus grandes à celui de disque. Il est bien adapté pour modéliser les rotors des différentes machines tournantes industrielles (turbine, générateur, etc). [1]
- **disque rotor** : les dimensions du disque sont plus grandes à celles de l'arbre. [1]
- **rotor aubage** : ce modèle est bien adapté pour étudier le comportement vibratoire de quelques rotors ayant une structure aubage (hélicoptère, aérogénérateur, fan de turboréacteur, soufflerie industrielle, etc). [1]
- **rotor libre** : ce modèle de rotor est caractérisé par l'absence des suspensions (paliers, support). [1]

❖ **Selon les paramètres mécaniques on distingue les modèles suivants :**

- **rotor rigide** : un rotor peut être considéré comme rigide lorsqu'il tourne à des vitesses sensiblement inférieures à la vitesse critiques associées à la flexion de l'arbre [1].
Ainsi, le rotor rigide possède des paliers souples et il ne se déforme pas en flexion.
- **rotor de Jeffcott** : c'est un modèle simple utilisé pour étudier le comportement dynamique en flexion des rotors industrielle, la configuration de ce modèle est caractérisée par des points matériels attachés dans un arbre non massique dans le but de négliger les effets gyroscopique. [1]

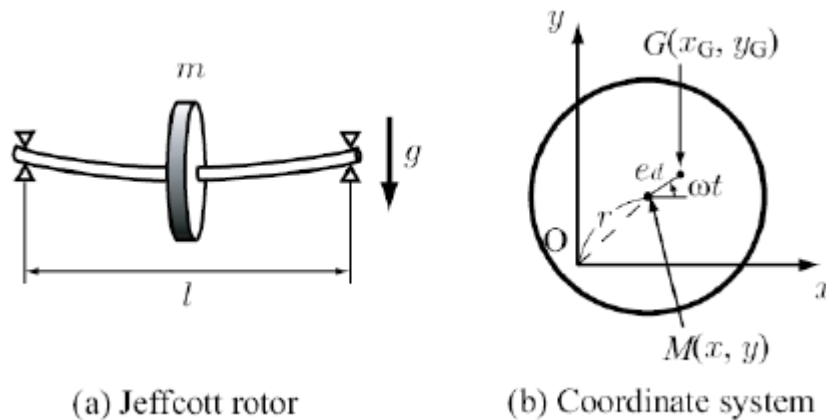


Figure 6 Rotor de Jeffcott [1] .

- **rotor flexible** : c'est le modèle de rotor flexible quand il tourne avec des vitesses supérieures à la première vitesse critique en flexion [1]. Ainsi, le rotor flexible possède des paliers rigides et il se déforme en flexion.

I.1.2 Caractéristiques des éléments de rotor

Les éléments de rotor (arbres, disque, palier, autre) dont les caractéristiques mécanique et géométrique, ont des influences directes sur le comportement dynamique global de rotor, suivant le phénomène qui lui envisagées. Dans la plus part des cas des forces non linéaire engendrée par Le changement des ces caractéristiques influent directement sur les équations dynamique de système (rendre en système non linéaire). Nous traitions quelques Caractéristiques des éléments de rotor [1] :

❖ Système arbre –disque

Les paramètres géométriques de l'arbre et de disque qui peuvent être influé sur le comportement dynamique de rotor on a :

-
- L'uniformité de l'arbre (arbre axisymétrique ou non, variations de diamètre).
 - L'épaisseur de disque.
 - Présence de discontinuité (rotor fissuré).

Les paramètres mécaniques des éléments arbre et disque qui peuvent être influés sur le comportement dynamique de rotor sont :

- La rigidité ou la flexibilité de disque (disque rigide ou déformable).
- L'effet de souplesse de disque.
- La nature de matériau de l'arbre (arbre en matériau composite par exemple).
- L'effet de l'amortissement structurel (arbre viscoélastique). [1]

❖ **Le support**

Les paramètres qui peuvent être définis les caractéristiques mécaniques et géométriques des supports sont :

- La nature et les types des paliers (roulement à bille, à rouleau, palier magnétique, palier hydrodynamique, palier lisse, palier à patin oscillant, à patin pivot, etc).
- L'isotropie et l'anisotropie (effet de dissymétrie).
- Le mouvement de support (effet d'embarquement). [1]

I.1.3 Type de palier

On s'intéresse sur quatre types des paliers qui sont, les roulements à bille, paliers à butée, les paliers magnétiques et paliers hydrodynamiques.

❖ **Roulement à bille :**



Figure 7 types de Roulements [1] .

La majorité des recherches sur l'étude de comportement dynamique d'un rotor monté sur un support de type roulement à bille sont basées sur l'identification des phénomènes non linéaire qui provient généralement de jeu radial et le contact de Hertz [1] .

❖ **Palier a buté :**

Les paliers à buté sont utilisés dans les machines tournantes pour supporter les vibrations axiales qui sont généralement dus au chargement axiale (poussée de gaz par exemple). [1]

❖ **Palier magnétique :**

Les paliers magnétiques actifs permettent la sustentation sans contact d'un rotor tournant à très haute vitesse et très haute température. Cette technologie de point est beaucoup utilisé

dans divers domaine de la technologie, surtout pour des applications où toute lubrification est interdite (exemple : turbocompresseurs à applications dans le vide) [2] .

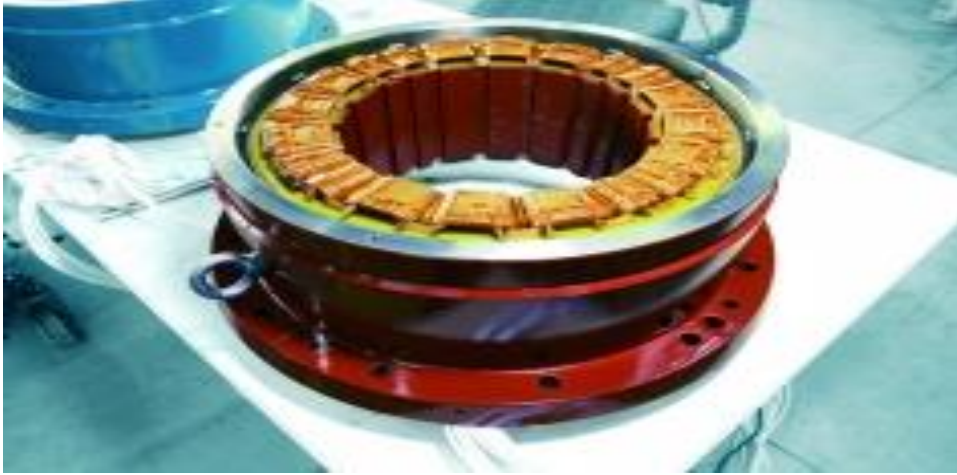


Figure 8 Paliers magnétiques [2] .

❖ **Palier hydrodynamique :**

Leur conception permet la formation d'un film de lubrifiant qui sépare complètement les surfaces solide de l'arbre et son alésage. Les paliers hydrodynamiques doivent atteindre une certaine vitesse de rotation pour que s'établisse un régime stable de lubrification qui est fonction du nombre de SOMMERFELD (voir ci-contre) [1] .



Figure 9 Palier hydrodynamique [1] .

I.1.4 L'effet de dissymétrie

Si les rotors sont souvent axisymétriques, axisymétrique en comportement, il n'en est pas de même pour les stators : la présence d'éléments associés aux carters, la fixation avec l'aile, . . . créent des dissymétries à la fois de masse et surtout de raideur.

L'influence des dissymétries en raideur des paliers sur la dynamique du rotor est importante. Tout d'abord, on note que si les raideurs transversales dans deux directions principales sont différentes, la réponse synchrone du rotor à un balourd est un mouvement de précession elliptique au lieu de circulaire. De plus, à l'arrêt, les modes propres dans les plans vertical et horizontal ont naturellement des fréquences propres distinctes. Les modes classiquement associés par paires dans le contexte axisymétrique (car identiques à vitesse de rotation nulle),

avec un mode direct et un mode rétrograde, sont dès lors différents l'un de l'autre. On montre d'ailleurs que pour chacun des deux, une vitesse critique existe.

Lors d'une réponse à balourd, on observe donc non pas un pic de résonance mais deux (on parle de phénomène de dédoublement de résonance, Split résonances dans la littérature anglo-saxonne): le mode rétrograde est excité.

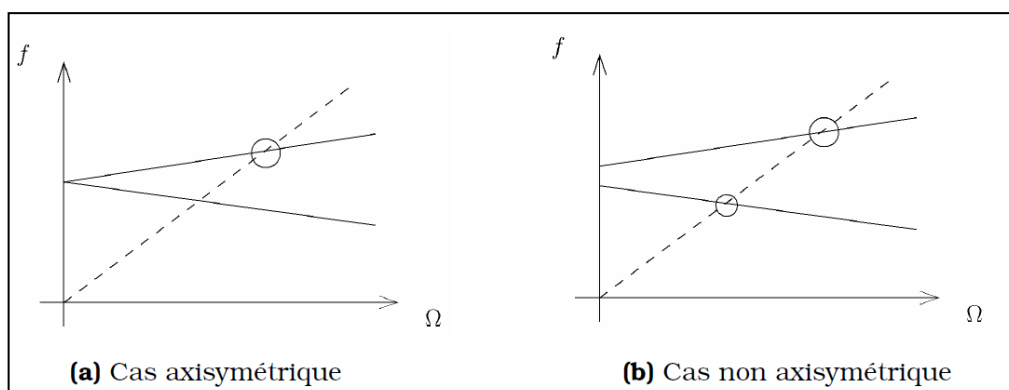


Figure 10 Influence des dissymétries sur le diagramme de Campbell [1] .

Il faut préciser que les dissymétries dans les rotors peuvent apparaître au cours du temps avec la fatigue. La présence de fissures transversales dans l'arbre entraîne une modification locale de raideur qui rend les caractéristiques élastiques anisotropes [1] .

I.1.5 L'effet d'embarquement

L'étude de comportement dynamique d'un rotor sous l'effet d'embarquement consiste à étudier le comportement globale de rotor dont le support (palier) est soumis à des mouvements quelconques. Ce modèle est bien adapté pour comprendre le phénomène de mouvement des rotors embarqués dans les véhicules, les avions, etc. [1] .

I.2 Dynamique des rotors

La dynamique des rotors est l'étude de la dynamique et de la stabilité du mouvement des machines tournantes. Elle joue un rôle important dans l'amélioration de la sécurité et des performances de ces systèmes.

Au fur et à mesure que la vitesse de rotation d'un objet tournant augmente, son niveau de vibration traverse souvent un seuil, sa vitesse critique. Cette évolution est souvent excitée par un déséquilibre de la structure tournante. Si l'ampleur de la vibration à ces vitesses critiques devient excessive, une défaillance catastrophique peut se produire. Une turbomachine peut également développer des instabilités liées à sa construction interne, entraînant également des défaillances catastrophiques. [4]

I.2.1 Hypothèses cinématiques

- L'étude des rotors est basée généralement sur les hypothèses suivantes :
- L'arbre est déformable.
- La déformation est toujours supposées linéaire, transversale et longitudinale.
- Le disque est rigide.
- Pas de déformation pour le disque et on tien compte juste de son inertie.
- Le rotor tourne à une vitesse constante Ω .
- L'arbre et le disque ont les mêmes caractéristiques mécaniques.

- L'arbre et le disque changent parfois des caractéristiques mécaniques.
- On se place dans le cas de petites de déplacement et de rotation.
- Déformation linéaire.

L'arbre est du type d'Euler Bernoulli c'est-à-dire toute section plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant déformation reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation de cet arbre et l'effet de cisaillement est nul (figure 11) Ces hypothèses correspondent à la majorité des rotors industriels. [4]

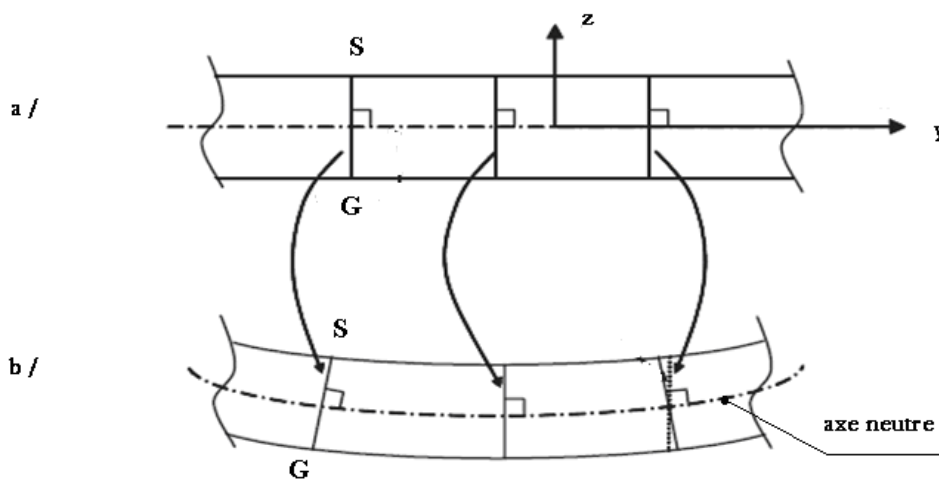


Figure 11 Poutre d'Euler Bernoulli [4]

A : Avant déformation

B : Après déformation

I.2.2 Précession et Nutation

Lors du mouvement, le rotor génère plusieurs phénomènes qui sont : La nutation, la précession, la rotation propre du rotor (figure12) et autres spécifications qui seront étudiés et détaillés ultérieurement en définissant tous ces phénomènes en éclairant leurs origines, énergies du rotor et leurs équations du mouvement. La mise en équation du mouvement est obtenue à partir des énergies cinétiques et de déformations des différents composants du rotor. [4]

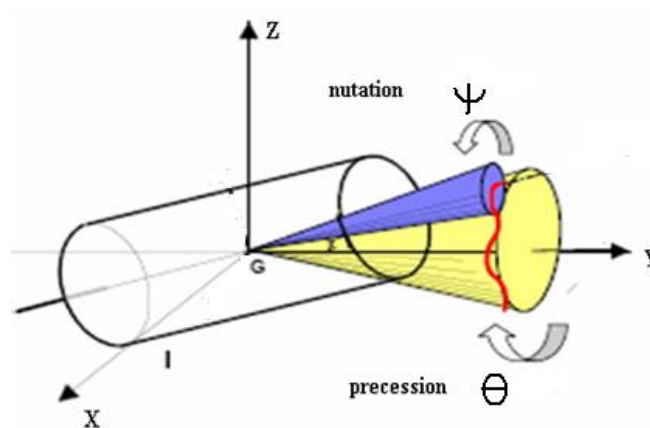


Figure 12 Nutation et Précession. [4]

❖ La précession:

La précession est le nom donné au changement graduel d'orientation de l'axe de rotation d'un objet ou, de façon plus général, d'un vecteur sous l'action de l'environnement, par exemple, quand un couple lui est appliqué. Ce phénomène est aisément observable avec une toupie mais tous les objets en rotation peuvent subir la précession. Lors de la précession, l'angle que fait l'axe de rotation ou le vecteur avec une direction donnée reste fixé. Le vecteur ou l'axe de rotation décrit ainsi au cours du temps un cône dont l'axe est la direction fixée. Ce cône est parcouru à une vitesse angulaire constante qui est déterminée par les données du problème. Le sens dans lequel se produit la précession dépend du problème considéré. [4]

➤ **L'orbite modale**

Les points situés dans l'axe générateur de rotor décrivent par le mouvant de rotation de rotor et due au mode propre des orbites qui ont des formes suivant le phénomène auxquelles envisagée (circulaire pour un rotor symétrique non amorti, elliptique pour un rotor dissymétrique non amorti...). Ces orbites sont engendrées selon deux précessions possibles :

- une précession directe où les orbites sont décrites dans le même sens que la vitesse de rotation de rotor, dans ce cas-là sous les effets gyroscopiques, la fréquence de résonance associée croît.
- une précession rétrograde (inverse), où les orbites sont décrites dans le sens inverse que le sens de la vitesse de rotation de rotor, de qui engendrent un effet d'assouplissement et donc une chute de la vitesse critique. [1]

❖ **La Nutation :**

La nutation a été découverte en 1748 par l'astronome Britannique James Bradley (1693-1762) en observant l'étoile Gamma Draconis (Eltanin) en vue de déterminer sa parallaxe

En raison de l'attraction conjuguée du Soleil et de la Lune la nutation se traduit par une oscillation de l'axe de rotation de la Terre pouvant aller jusqu'à 17,2" (secondes d'arc) avec une période de 18,6 ans, qui est égale à celle de la précession du nœud ascendant de l'orbite lunaire. Le pôle vrai dessine alors autour du pôle moyen une ellipse dont le grand axe mesurant 9,21" est dirigé vers le point vernal

Classiquement, la nutation est composée de deux éléments :

➤ **Nutation en longitude :**

Décrivant l'oscillation du point vernal vrai autour du point vernal moyen. Au 1^{er} janvier 2015, sa valeur angulaire était de 4,872".

➤ **Nutation en obliquité :**

Décrivant l'oscillation de l'équateur vrai autour de l'équateur moyen. Au 1er janvier 2015, sa valeur angulaire était de -9,540".

Les catalogues d'étoiles donnent habituellement les coordonnées astrométriques des étoiles. Celles-ci sont les coordonnées moyennes à une époque T fixée. Si on désire avoir les coordonnées vraies à une autre époque, on doit corriger ces coordonnées en tenant compte de la précession pendant la durée s'écoulant entre les deux époques, puis corriger ces coordonnées moyennes « corrigées » en ajoutant l'effet de la nutation. [4]

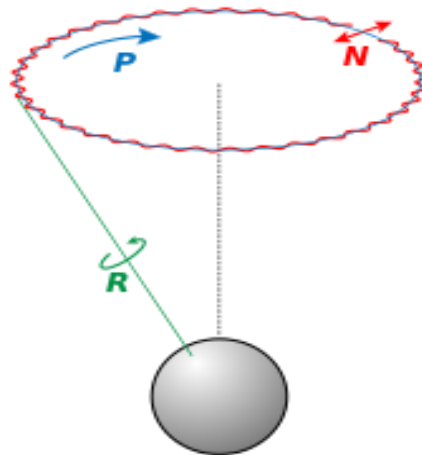


Figure 13 Rotation propre, précession, et nutation [4].

I.2.3 Analyse dynamique et vibratoire des Rotors

I.2.3.1 Analyse dynamique et vibratoire d'un rotor flexible

L'étude de comportement dynamique et vibratoire d'un rotor flexible nécessite de connaître la notion de vitesse critique et les techniques d'analyse de stabilité.

Toute machine tournante en fonctionnement génère des vibrations dont les amplitudes dépendent essentiellement :

- de la géométrie du rotor.
- de la raideur des paliers et de son supportage.
- de l'amortissement apporté par ces mêmes paliers.
- des sources d'excitation, tel que le balourd par exemple.
- de la vitesse de rotation du rotor [1] .

I.2.3.2 Analyse dynamique et vibratoire d'un rotor rigide

Les petites turbines tournent en régime sous-critique, c'est-à-dire que leur vitesse de rotation maximale en service se trouve, pour des arbres théoriquement rigides, au-dessous de la vitesse de résonance critique.

Pour les gros rotors, il est préférable de construire des arbres tournants en régime sur-critique la vitesse critique se situe à environ 60% de la vitesse nominale. Cela est valable aussi bien pour les compresseurs que pour les turbines d'entraînements.

Pour la détermination des vitesses critiques, il faut tenir compte des masses et des élasticités des films d'huile, des paliers et des fondations, la prise en considération du rotor seul est insuffisante dans les calculs. [1]

I.3 Les divers types d'excitations

Le rotor en rotation est soumis à des excitations diverses, d'amplitudes et de fréquences très différentes. Ces excitations peuvent d'être de nature périodique, aléatoire ou a impulsion, nous traitons en particulière quelle mode d'excitation directe à la machine. [1]

I.3.1 Les forces de balourd

Sont des forces périodique propre aux machines tournantes, il correspond aux forces d'inertie généré par le mouvement rotatif des masses excentrées et non équilibrées de rotor. L'origine des efforts de balourd est variée. Il peut s'agir soit de problèmes d'usinage, de montage, voire de gradients thermiques qui peuvent induire un fléchissement de l'arbre. Lorsqu'une pièce d'un rotor possède des axes principaux d'inertie transversale non orthogonaux à l'axe de rotation, une couple est aussi produite. On le qualifié de balourd dynamique, par opposition à balourd statique usuellement employé pour désigner la force. [1]

I.3.2 Les forces de fluide

Ces forces sont propres aux machines tournantes, elles sont de nature périodique ou aléatoire et très important surtout dans le cas de présence des instabilités de fluide (écoulement turbulent, phénomène de cavitation, phénomène de pompage, etc). Deux types des forces que l'on peut rencontrer dans la majorité des études des machines tournantes, les forces aérodynamiques et les forces hydrodynamiques. Ces forces on réalité soit ont des influences directes sur le comportement dynamique de rotor si elles sont concentrées par exemple dans les joints, les paliers et les butées hydrodynamiques, ou d'un arbre fonctionne directement dans un fluide, soit ont des influences indirectes via les structures aubage qui peuvent être envisagé en deux façons. La première concerne le comportement dynamique des structures fonctionnant dans des fluides lourds, deuxième concerne les fluides légers et la possibilité d'apparition du flottement [1] .

I.3.3 Forces aléatoires

Les forces aléatoires peuvent être par exemple les forces de choc, elles peuvent être engendrées dans des machines tournantes par des impacts ou autres excitations (séisme) [1] .

I.4 Les Solutions qui corrigent les défauts générant des vibrations

I.4.1 L'analyse de stabilité

L'analyse de stabilité dans l'étude de comportement vibratoire et dynamique d'un rotor flexible est nécessaire puisqu'il a considéré comme un système dynamique régit par des systèmes d'équations différentielles. La définition de stabilité recouvre la définition de Laypunov pour l'analyse de la stabilité des points d'équilibre et la définition de Poincaré pour la notion de stabilité orbitale [1] .

I.4.2 Équilibrage

Le déséquilibre du rotor peut être statique ou dynamique. Le déséquilibre statique correspond à une translation linéaire de l'axe d'inertie principal du rotor par rapport à son axe de rotation, les deux axes restant parallèles, alors le centre de gravité du rotor se trouve à quelques distances de l'axe de rotation. Dans le cas du déséquilibre dynamique sous forme de coupe, l'axe principale d'inertie ne coïncide pas avec l'axe de rotation du rotor, mais le coupe au centre de gravité, et fait avec lui un angle constant au cours de la rotation. Dans le cas général, le déséquilibre du rotor correspond à la superposition des déséquilibres statiques et dynamiques sous forme de couple [5] .

I.5 L'effet gyroscopique

L'effet gyroscopique apparaît lorsqu'un solide est animé de deux mouvements de rotation aux axes perpendiculaires. L'action mécanique créée, appelée couple gyroscopique est un moment autour d'un troisième axe. Cet effet a une influence importante sur les comportements des arbres tournants. Ce couplage gyroscopique inhérent aux structures tournantes induit un mouvement de précession directe ou inverse (rétrograde) selon que le sens de ce mouvement est identique ou contraire à celui de la rotation propre.

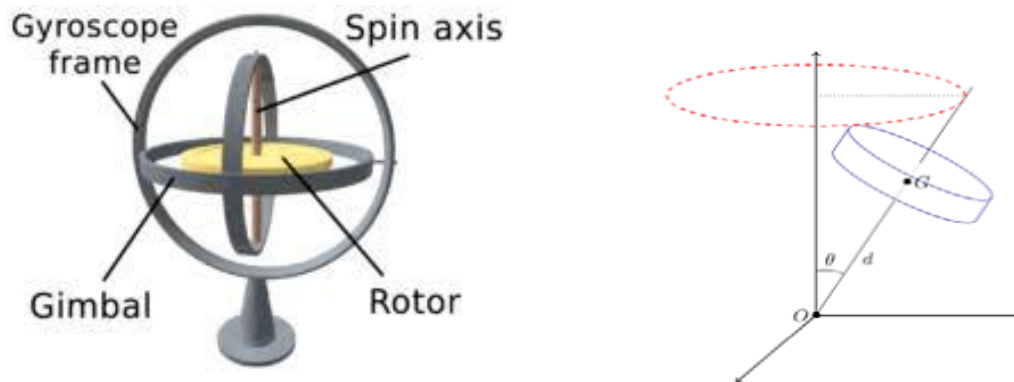


Figure 14 L'effet gyroscopique.

I.6 Conclusion

Ce chapitre nous a divulgué des rappels liés aux rotors industriels et des notions fondamentales sur la dynamique des rotors, dans le but de donner une vision assez large sur les travaux effectués dans le cadre des rotors et les différents phénomènes qui influent sur la dynamique des rotors et leurs caractéristiques.

Référence :

[1] Mémoire En vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER EN GENIE MECANIQUE de Mr. Brahimi Hamza, Université de Boumerdès, Année universitaire 2009 /2010.

<http://dlibrary.univ-boumerdes.dzBrahmiHamza.pdf>

[2] Mémoire de fin d'études pour l'obtention du diplôme de Master de Mr MATELA Taki-ddine et Mr. BELGUERCHI Benameur. Université de Tiaret, Année universitaire 2016/2017.

[3] Mémoire En vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER EN GENIE MECANIQUE de Mr. SAIMI Ahmed. Université de Tlemcen, Année universitaire 2012/2013.

<https://wwdspace.univ-tlemcen.dzcomportement-vibratoire-des-roues-aubagees.pdf>

[4] Mémoire En vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER EN GENIE MECANIQUE de Mr. ASSEM Hassan Université de Tlemcen, Année universitaire 2009/2010.

[5] Philippe Arqués, Diagnostique prédictif et défaillances des machines Théorie-traitement-Analyse-Reconnaissance-Prédiction, Edition TECHNIP, 2009.

CHAPITRE II
ÉQUATIONS
FONDAMENTALES ET
CALCUL THEORIQUE DE
LA DYNAMIQUE DES
ROTORS

Introduction

Il est utile d'aborder les notions fondamentales de la dynamique des corps élastiques avant de passer aux formulations mathématiques des équations de mouvement qui sont utilisées en dynamique des rotors. Nous allons décrire dans ce chapitre les aspects de la modélisation dynamique des corps élastiques, après on applique ces notions pour développer les équations de mouvement des rotors. Dans un point de vue général, on s'intéresse aux phénomènes importants qui sont souvent rencontré en dynamique des rotors.

II.1 Dynamique d'un corps déformable

Les équations du mouvement du système peuvent être établies de deux façons :

La première consiste à écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à un volume infinitésimal du corps auquel on ajoute la loi de comportement du matériau et les conditions aux limites. L'accélération est obtenue à partir de l'équation

$$\dot{y} = \dot{s} + \dot{R}(x + u) + R\dot{u} \quad . \quad (\text{II.1})$$

Le système ainsi obtenu correspond à la formulation forte de l'équation du mouvement. La forme faible est obtenue en intégrant l'équation aux dérivées partielles sur le volume du corps, pondérée par des fonctions tests.

La deuxième approche est la méthode énergétique. Après avoir écrit les énergies cinétiques et potentielles du corps, la fonction de dissipation de Rayleigh et le travail virtuel des forces volumiques et surfaciques, les équations de Lagrange donnent l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial F_d}{\partial \dot{q}} = 0 \quad , L=T-V \quad (\text{II.2})$$

L : Le lagrangien

F_d : La fonction de dissipation

En utilisant l'équation de Lagrange, nous trouvons l'équation du mouvement du système dans le repère mobile sous forme matricielle

$$M\ddot{q} + (D + G)\dot{q} + (K + P + N)q = r + F \quad (\text{II.3})$$

Où M est la matrice de masse, D la matrice d'amortissement (interne et palier), G la matrice gyroscopique, K la matrice de raideur (interne et palier), P la matrice d'accélération angulaire, N la matrice d'accélération centrifuge (ou assouplissement centrifuge), r le Vecteur des excitations indirectes dues à l'entraînement du système de coordonnées et F le vecteur des excitations par les forces volumiques et surfaciques. [1]

Finalement, en utilisant les équations de Lagrange, nous trouvons l'équation du mouvement vibratoire libre du système dans le repère mobile sous forme matricielle.

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{XX} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{XX} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{W} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega J_{YY} \\ 0 & 0 & \Omega J_{YY} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{W} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XZ} & 0 & 0 \\ C_{ZX} & C_{ZZ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{W} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XZ} & 0 & 0 \\ K_{ZX} & K_{ZZ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U \\ W \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} + \frac{1}{2} EI_X \left[\int_0^l \left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial^2 y} \right)^2 \right) dy \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.4})$$

La première matrice est une matrice de masse et la seconde est une matrice d'effet gyroscopique et la troisième est une matrice d'amortissement des paliers et la quatrième est la matrice de raideur des paliers. Ces matrices sont généralement asymétriques et la dernière expression représente la matrice de l'énergie de déformation de l'arbre.

II.2 Équations fondamentales de mouvement

L'exposition des éléments théoriques étudiés dans le paragraphe précédent concernant l'obtention des équations de mouvements pour un système dynamique quelconque en rotation permet nous à étudier et obtenir de façons détaillée les équations de mouvement d'un rotor flexible [1].

La méthode que doit être utilisée pour l'obtention des équations de mouvement est la suivant :

- ✚ Chaque éléments de rotor a une modélisation spécifique qui ensuite intégrée dans la modélisation complète du rotor ; l'expression de l'énergie cinétique T est nécessaire pour caractériser les disques, l'arbre et le balourd, l'énergie de déformation U est nécessaire pour caractériser l'arbre, les fonctions de déformation sont utilisées pour caractériser l'amortissement.

- ✚ Pour les rotors complexes et pour chaque élément, des calculs des énergies cinétiques élémentaires T_i et des énergies de la déformation élémentaire U_i et des fonctions de dissipation de Rayleigh R_i doivent être effectués.
- ✚ Une méthode de discrétisation est choisie : la méthode de Rayleigh-Ritz est bien adaptée aux systèmes simples et résulte en un faible nombre de degrés de liberté.
- ✚ Les équations de Lagrange sont utilisées pour l'obtention des équations du mouvement soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \right) = F_{qi} \quad (II.5)$$

Avec $1 \leq i \leq N$

N: Le nombre de degrés de liberté pris en compte.

q_i : Les coordonnées indépendantes généralisées.

\dot{q}_i : Les coordonnées généralisées dérivées par rapport au temps.

F_{qi} : Les efforts généralisés.

L'expression de travail virtuel des forces dues aux paliers permet de déterminer ces efforts généralisés.

Expérimentalement, les caractéristiques d'amortissement sont déterminées à partir de la caractérisation des paliers (mesures), l'amortissement de l'arbre étant négligé.

Les matrices d'amortissement sont alors introduites dans les équations de mouvement sans utiliser de fonctions de dissipation. Ainsi, dans un souci de simplification dans la méthode, les fonctions de dissipation de Rayleigh. [1]

II.3 Calcul de l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de rotor

II.3.1 Élément de disque

Le disque est supposé rigide, donc il ne caractérise que par son énergie cinétique.

Le repère $R_0 (X, Y, Z)$ est le repère galiléen et le repère $R(X, Y, Z)$ est lié au disque (figure 15).

On suppose que le disque ne se déplace que dans le plan XZ. Les déplacements suivant

Les axes X et Z sont notés respectivement u et w . Le système de coordonnées (x, y, z) est relié

Au système de coordonnées XYZ par l'intermédiaire des angles Ψ, θ, φ

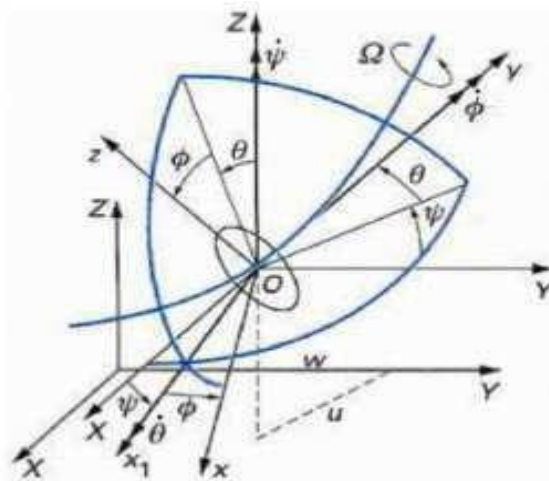


Figure 15 Repère et référence d'un disque monté sur un arbre flexible.

Pour déterminer la position de disque, on tourne initialement d'un angle Ψ autour de l'axe Z, puis d'un angle θ autour de nouvel axe X, noté X_1 ; enfin d'un angle φ autour de l'axe de rotation propre du disque Y. Le vecteur de rotation instantanée traduisant la position de repère XYZ est : [1]

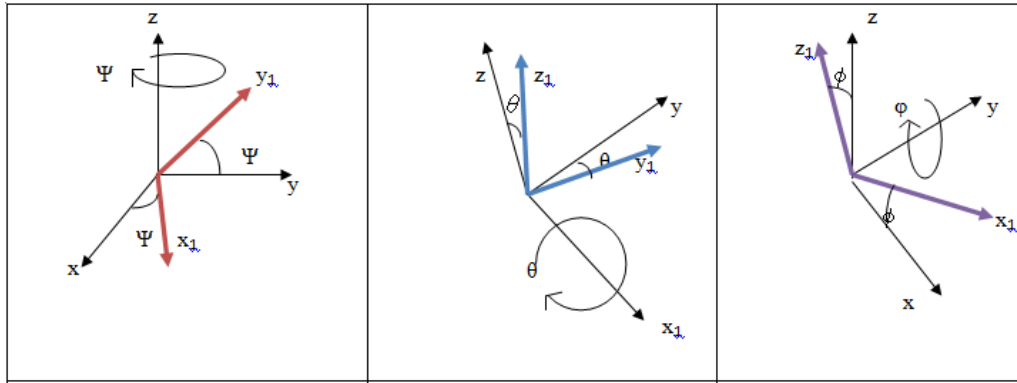


Figure 16 Repère et la rotation de la précession et nutation.

Sachant que (X_1, Y, Z) sont des vecteurs unitaires : $\|X_1\|=1, \|Y\|=1, \|Z\|=1$ [2]

$$\overline{\omega}_{R/R_0} = \dot{\Psi}Z + \dot{\theta}X_1 + \dot{\phi}Y \quad (\text{II.6})$$

Où Z, X_1 et Y sont les vecteurs unitaires des $\overline{OZ}, \overline{OX_1}, \overline{OY}$. L'énergie cinétique du disque correspond à son mouvement autour du centre de masse O est calculée en utilisant le repère R . Dans ce repère, le vecteur de rotation instantanée est :

$$\overline{\omega}_{R/R_0} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\Psi} \cos\theta \sin\phi + \dot{\theta} \cos\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\Psi} \sin\theta \\ \dot{\Psi} \cos\theta \cos\phi + \dot{\theta} \sin\phi \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

$\overline{\overline{I}}_C$ Est le tenseur d'inertie massique principal qui a pour expression dans le repère R :

$$\overline{\overline{I}}_C = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

II.3.1.1 Énergie cinétique

Donc l'expression générale de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (u_c^2 + v_c^2 + w_c^2) + \frac{1}{2} (I_{Dx} \omega_x^2 + I_{Dy} \omega_y^2 + I_{Dz} \omega_z^2) \quad (\text{II.9})$$

L'expression (II.9) peut être simplifiée car le disque est symétrique $I_{Dx} = I_{Dy}$. Donc l'équation devient :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{Dy} (\Omega^2 + 2\dot{\psi}\theta\Omega) \quad (\text{II.10})$$

L'expression (II.10) fait apparaître les termes usuels de la dynamique des rotors :

- ❖ $\frac{1}{2} I_{Dy} \Omega^2$ le terme qui représente l'énergie de rotation de disque et que n'a aucune influence sur les équations de mouvement.
- ❖ $\frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2)$ le terme qui représente l'énergie cinétique d'un élément e translation dans un plan.
- ❖ $\frac{1}{2} I_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)$ le terme représente l'expression de l'énergie cinétique de rotation d'un élément autour des axes x et z.
- ❖ Le terme $\frac{1}{2} I_{Dy} 2\dot{\psi}\theta\Omega$ exprime l'effet gyroscopique (Coriolis).

II.3.2 Élément d'arbre

L'arbre est assimilé comme une poutre déformable de section circulaire. Elle est caractérisée par son énergie cinétique et son énergie potentielle.

II.3.2.1 Énergie cinétique

La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque donc elle est calculée de façon à choisir un élément de l'arbre, considéré comme un disque mince infiniment petit a une épaisseur dy , une section circulaire supposée constante S , une masse volumique ρ ET d'inertie de section I_x et I_y . On calcule son énergie cinétique dT_a .

Enfin on intègre la longueur de l'arbre pour trouver l'expression finale de l'énergie cinétique de l'arbre.

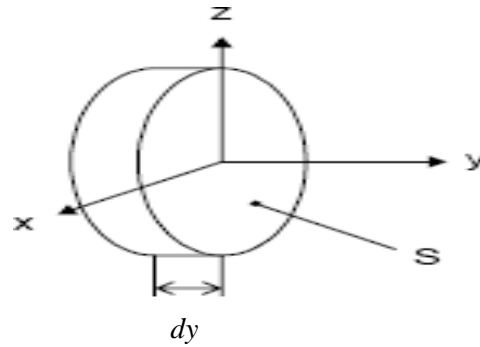


Figure 17 Section élémentaire de l'arbre.

La masse élémentaire et les inerties principales sont calculées de la manière suivante:

$$dM_a = \rho S dy \quad (\text{II.11})$$

$$dI_{Dx} = \iiint_{(V)} (y^2 + z^2) dm = \left(\iint_{(s)} z^2 ds \right) \rho dy = \rho I_x dy$$

$$dI_{Dy} = \iiint_{(V)} (x^2 + z^2) dm = \left(\iint_{(s)} x^2 ds + \iint_{(s)} z^2 ds \right) \rho dy = \rho (I_x + I_y)$$

$$dI_{Dz} = \iiint_{(V)} (y^2 + x^2) dm = \left(\iint_{(s)} x^2 ds \right) \rho dy = \rho I_z dy \quad (\text{II.12})$$

L'énergie cinétique de la section élémentaire de l'arbre est calculée de la manière suivante:

$$dT_a = \frac{1}{2} \rho S (u_c^2 + v_c^2 + w_c^2) + \frac{1}{2} (\rho I_x \omega^2 + \rho (I_x + I_z) \omega_y^2 + \rho I_z \omega^2 z) \quad (\text{II.13})$$

Pour un arbre symétrique on a $I_x = I_y = I$ et pour un élément de longueur L de section droite constante, l'expression de l'énergie cinétique est :

$$T_a = \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\Psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2 \rho I \Omega \int_0^L \dot{\Psi} \theta dy \quad (\text{II.14})$$

L'expression (II.14) fait apparaître les termes usuels de la dynamique des rotors :

- ✚ Le terme $\rho I L \Omega^2$ représente le terme de l'énergie de rotation qui n'a aucune influence sur les équations de mouvement.

- ✚ Le terme $\frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy$ exprime l'énergie cinétique d'une poutre en flexion.
- ✚ Le terme $\frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy$ c'est l'effet secondaire de l'inertie de rotation (poutre de Timoshenko).
- ✚ Le terme $2\rho I \Omega \int_0^L \psi \theta dy$ c'est l'effet gyroscopique.

II.3.2.2 L'énergie de déformation

Pour calculer l'énergie de déformation de l'arbre, il est nécessaire de décrire la déformation longitudinale de la poutre en un point de sa section droite. Soit C le centre

Géométrique de la poutre, B(x, y) est un point de la section droite (figure 18), E est le module de Young ϵ et σ sont les déformations et la contrainte, u^* et w^* sont les déplacements du centre géométrique par rapport aux axes x et z.

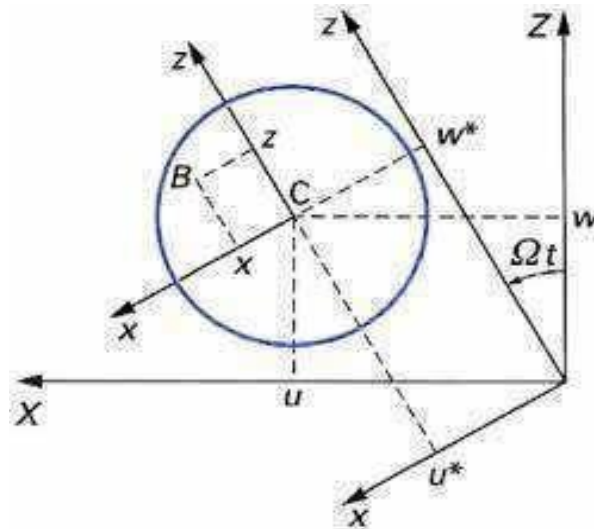


Figure 18 Section droite de l'arbre.

Le passage de u et w à u^* et w^* s'écrit:

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \tag{II.15}$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \tag{II.16}$$

On peut exprimer la déformation d'un point quelconque de l'arbre de coordonnées x et y le repère R par :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_{nl} \quad \text{Avec} \quad \varepsilon_1 = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial^2 y^2}$$

Dans le cas où la déformation est linéaire : $\varepsilon_{ln} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y^2} \right)^2$

Dans le cas où la déformation est non linéaire, l'énergie de déformation a comme expression :

$$U = \frac{E}{2} \int_{\tau} \varepsilon \sigma d\tau$$

Avec τ est le volume de l'arbre et σ est la contrainte de flexion. La relation liée la contrainte et la déformation est : $\sigma = E\varepsilon$ donc :

$$U = \frac{E}{2} \int_{\tau} (\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) d\tau \quad (\text{II.17})$$

A cause de symétrie de l'arbre par rapport aux axes x et z on $\int_{\tau} \varepsilon_{nl} \varepsilon_1 d\tau = 0$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dS \quad (\text{II.18})$$

$$U = \frac{E}{2} \left(\int_0^L \int_S x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right) dS dy \quad (\text{II.19})$$

Par suite de la symétrie de la section de l'arbre, l'intégrale correspondant au troisième terme de l'égalité est nulle et on a $\int_{\tau} \varepsilon_{nl} \varepsilon_1 d\tau = 0$

En introduisant les inerties diamétrales de la section droite par rapport à x et z on a :

$$I_x = \iint_{(S)} Z^2 dS \quad \text{Et} \quad I_z = \iint_{(S)} x^2 dS$$

On trouve :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II.20})$$

On remplace u^* et w^* par leurs valeurs

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left(I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dy \quad (\text{II.21})$$

On peut séparer les termes symétrique et antisymétrique en utilisant l'égalité suivant :

$$\begin{cases} I_m = \frac{I_x + I_z}{2} \\ I_a = \frac{I_x - I_z}{2} \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

On trouve:

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L \left[(I_m - I_a) \left(\cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) + (I_m + I_a) \left(\sin^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \cos^2 \Omega t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right) \right] dy \quad (\text{II.23})$$

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L (I_m) \left[\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) + \frac{E}{2} \int_0^L I_a \left[\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) (\cos^2 \Omega t - \sin^2 \Omega t) + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos \Omega t \sin \Omega t \right] dy \right] dy \quad (\text{II.24})$$

Donc finalement l'énergie de déformation de l'arbre a pour expression :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L (I_m) \left[\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dy + \frac{E}{2} \int_0^L I_a \left[\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) (\cos 2 \Omega t) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin 2 \Omega t \right] dy \quad (\text{II.25})$$

Pour le cas où l'arbre est symétrique $I_x = I_z = I$ on a :

$$U = \frac{E}{2} \int_0^L I \left[\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) \right] dy \quad (\text{II.26})$$

II.3.3 Élément de balourd

Le balourd dont une représentation géométrique est donnée dans la figure 19 peut être assimilé à une masse ponctuelle m_u située à la distance d du centre géométrique de l'arbre.

Son énergie cinétique doit être prise en compte [1].

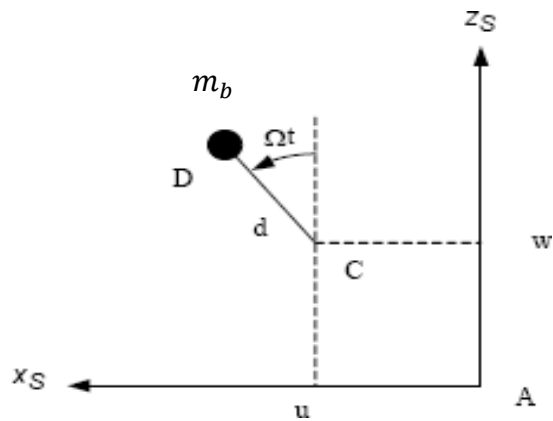


Figure 19 Élément de balourd.

On réalité le balourd se trouve de façon continue et aléatoire dans le rotor

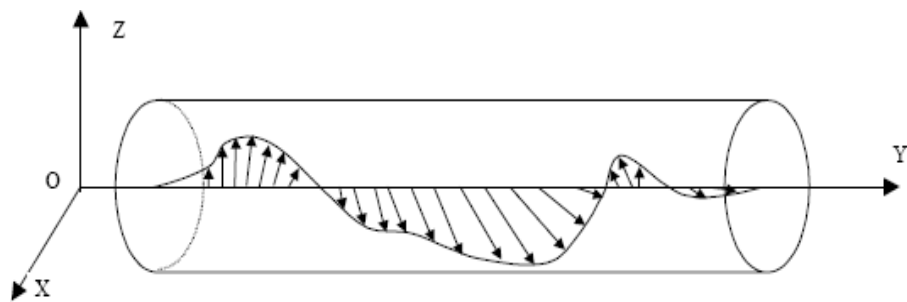


Figure 20 Distribution de balourd sur le rotor.

Pour modéliser simplement le balourd, il est décomposé en masses concentrées situées dans différents plans. Ces masses sont supposées avoir le même effet que le balourd continu sur le comportement dynamique du rotor.

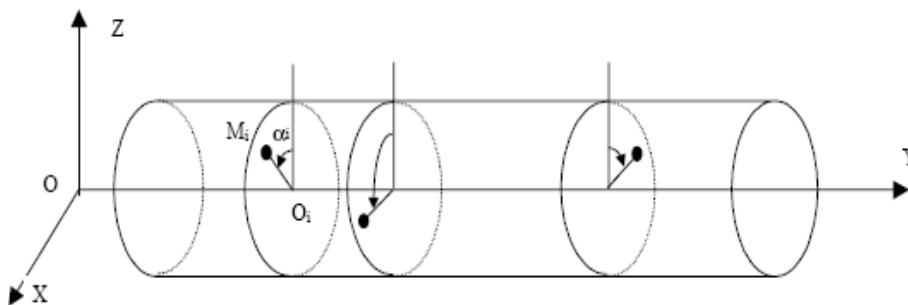


Figure 21 Modélisation de la distribution de balourd.

L'énergie cinétique de balourd a comme expression :

$$T_{b= \frac{m_b}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \cos \Omega t - 2\Omega d \dot{w} \sin \Omega t) \quad (\text{II.27})$$

Le terme $\frac{m_b}{2} \Omega^2 d^2$ est constant et donc sans influence sur l'équation du mouvement. La masse m_b est sans commune mesure avec celle du rotor, alors l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme : [2]

$$T_b = m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \quad (\text{II.28})$$

Donc la force centrifuge est exprimé par :

$$F_{\text{centrifuge}} = m_b \Omega^2 e \quad (\text{II.29})$$

II.4.1 L'énergie de l'amortisseur et palier

L'amortissement tournant structural est introduit par quatre positions à 90° entre les deux extrémités figures 22. Ces amortisseurs symbolisent l'amortissement visqueux longitudinal des fibres lorsque le rotor est sollicité en flexion. Ils sont positionnés à une distance h de la fibre neutre [1].

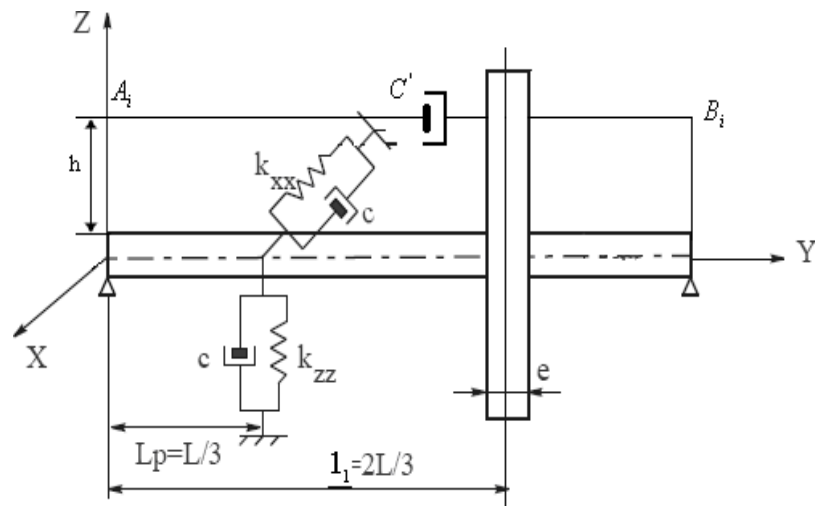


Figure 22 Modélisation de l'amortissement tournant.

Un palier est modélisé par le modèle de kelvin dans chaque direction perpendiculaire à l'axe de l'arbre dont le modèle comporte les caractéristiques de raideur et d'amortisseur (figure 23). Les forces induites par ces paliers sont dues au déplacement de l'arbre.

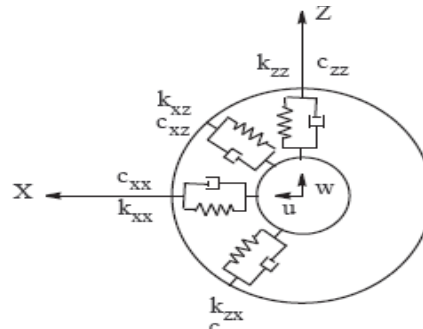


Figure 23 Amortissement et raideur des paliers.

Alors l'énergie potentielle du palier s'écrit :[1]

$$Ep = (u, w) \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{II.30})$$

L'énergie de dissipation d'amortisseur s'écrit :

$$Ed = \frac{1}{2} (\dot{u}, \dot{w}) \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \quad (\text{II.31})$$

La somme des forces s'écrit :

$$\sum F = 0 \quad (\text{II.32})$$

Dans le cas de la Figure 23 (II.33) sont les forces généralisées: [2]

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xz} \\ C_{zx} & C_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

II.5.1 Modèle analytique (modèle simple)

Pour examiner et étudier les phénomènes particuliers en dynamique des rotors, il est préférable de développer un modèle simple dont la modélisation est effectuée à l'aide de la méthode de Rayleigh-Ritz. Le modèle étudié est un rotor flexible composé d'un arbre symétrique de longueur L et un disque symétrique balourdé située à $y = l_1$ (figure 24) [1].

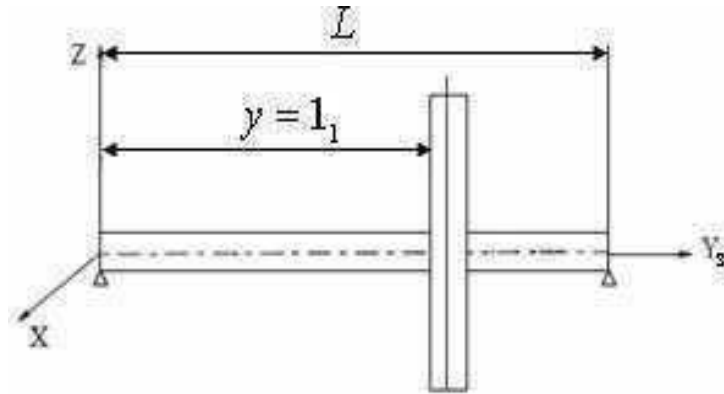


Figure 24 Modèle simple de rotor.

On considère qu'on a un seul ddl

$$\sum F = 0 \quad (\text{II.34})$$

$$F_{\text{centrifuge}} - F_K = 0 \quad (\text{II.35})$$

$$F_{\text{centrifuge}} = M\Omega^2 e \quad (\text{II.36})$$

$$F_K = K_{\text{arbre}}\omega \quad (\text{II.37})$$

Alors

$$M\Omega^2 e = K_{\text{arbre}}\omega - M\Omega^2\omega \quad (\text{II.38})$$

$$\omega = \frac{M\Omega^2 e}{K_{\text{arbre}} - \Omega^2} \quad (\text{II.39})$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{K_{\text{arbre}}}{M}} \quad (\text{II.40})$$

Dans le cas de $\Omega = \omega_{\text{critique}}$ nous avons résonance plus précession

Si $\Omega = \omega$ la précession synchrone figure 25 [2]

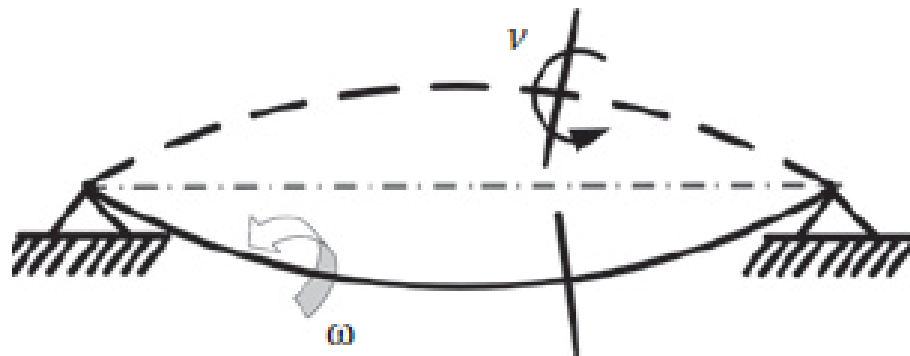
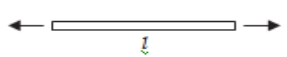
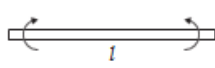

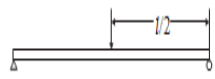


Figure 25 La précession synchrone.

II.6 Les différentes raideurs

S.N. Système	Définitions des variables
<p>1. Extension axiale d'une barre</p>  $k = \frac{EA}{l}$	<p>A est l'aire de la section transversale. L est la longueur de la barre.</p>
<p>2. Torsion d'une tige</p>  $k = \frac{GJ}{l}$	<p>G est le module de rigidité. J est le moment polaire de l'aire de la section.</p>
<p>3. Ressort hélicoïdal</p>  $k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$	<p>R est le rayon moyen de la bobine. d est le diamètre du fil. n est le nombre de tours.</p>
<p>4. Arbre fixe-fixe avec une charge</p>  $k = \frac{192EI}{l^3}$	<p>La flèche verticale vers le bas représente la position de chargement.</p>

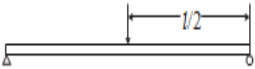
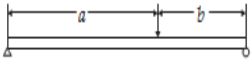
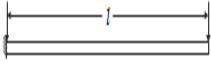
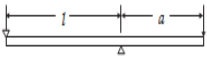
<p>5. Arbre simplement supporté avec une charge</p>  $k = \frac{48EI}{l^3}$	<p>Rigidité à la position de chargement.</p>
<p>6. Arbre simplement supporté avec une charge</p>  $k = \frac{3EI}{a^2b^2}$	<p>Rigidité à la position de chargement.</p>
<p>7. Arbre en porte-à-faux avec une charge</p>  $k = \frac{3EI}{l^3}$	<p>Rigidité à la position de chargement.</p>
<p>8. Tige suspendue-1</p>  $k = \frac{3EI}{(l+a)a^2}$	<p>Rigidité à la position de chargement.</p>
<p>9. Arbre 2 surplombé</p> $k = \frac{2EI}{(3l+8a)a^2}$	<p>Rigidité à la position de chargement.</p>

Tableau II.1 Rigidité équivalente de ressort des systèmes dynamiques simples [3].

II.7 Les équations différentielles partielles

II.7.1 Modèle symétrique (pas de roulement)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{U}_1} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial U_1} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial U_1} \right) + \left(\frac{\partial E_P}{\partial U_1} \right) + \left(\frac{\partial E_d}{\partial U_1} \right) \right\} = 0 \quad (\text{II.41})$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{W}_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{W}_1} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial W_1} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial W_1} \right) + \left(\frac{\partial E_P}{\partial W_1} \right) + \left(\frac{\partial E_d}{\partial W_1} \right) \right\} = 0 \quad (\text{II.42})$$

$$\begin{cases} m\ddot{U}_1 + a\Omega\dot{W}_1 + KU_1 = \ddot{m}_b d \Omega^2 U(l_1) = F_x(t) \\ m\ddot{W}_1 - a\Omega\dot{U}_1 + KW_1 = \ddot{m}_b d \Omega^2 U(l_1) = F_z(t) \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{W}_1 \end{pmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{W}_1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(t) \\ F_z(t) \end{pmatrix} \quad (\text{II.44})$$

La solution sans la prise en compte de second membre (vibration libre)

$$\begin{cases} U_1 = Ae^{\omega t} \\ \dot{U}_1 = A\omega e^{\omega t} \\ \ddot{U}_1 = A\omega^2 e^{\omega t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} W_1 = Be^{\omega t} \\ \dot{W}_1 = B\omega e^{\omega t} \\ \ddot{W}_1 = B\omega^2 e^{\omega t} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

Remplacer (II.48) dans (II.46) ey sans la force d'excitation

$$\begin{bmatrix} K + m\omega^2 & a\Omega\omega \\ a\Omega\omega & K + m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.46})$$

Donc on calculer le $\det \begin{bmatrix} K + m\omega^2 & a\Omega\omega \\ a\Omega\omega & K + m\omega^2 \end{bmatrix} = 0$ et le $\Delta = 0$ [2]

Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution

Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double $\lambda = \omega^2 = -b/2a$.

Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes λ_1 et λ_2 , telles que $\lambda_1 = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a$

et $\lambda_2 = (-b - \sqrt{\Delta}) / 2a$ [4].

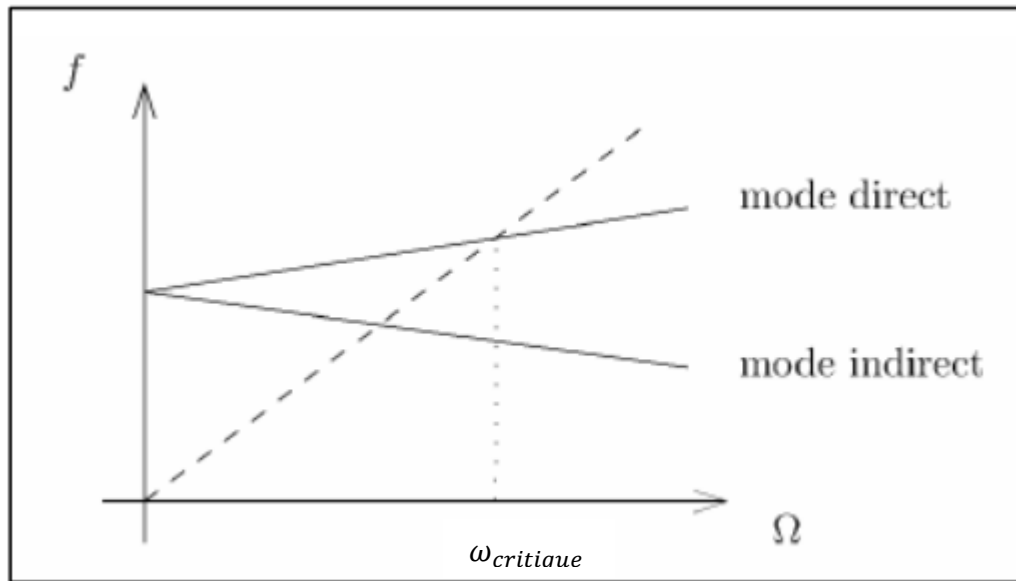


Figure 26 Diagramme de Campbell.

II.7.2 Interprétation du Graphe

Le graphe ci-dessus est le diagramme de Campbell représentant les vibrations de la poutre ou de l'Arbre en rotation, Ces vibrations sont définies par deux branches qui sont :

- 1 /- Courbe croissante c'est la précession directe.
- 2 /- Courbe décroissante c'est la précession indirecte ou rétrogradés [5]

Dans le cas particulier de systèmes non amortis et sans couplage directionnel, il est possible de calculer directement les vitesses critiques (c'est-à-dire sans passer par l'extraction des fréquences propres pour diverses valeurs de la vitesse de rotation). Il suffit d'injecter la relation $\omega = \pm\lambda\Omega$.

Dans l'équation homogène du mouvement, le signe étant positif (négatif) pour les vitesses critiques directes (rétrogrades). La résolution du problème aux valeurs propres alors obtenu fournit d'emblée les vitesses critiques. Le coefficient λ est introduit pour la conversion des recherches les éventuels pics de réponses juste ou sous-harmoniques.

Les structures réelles peuvent être considérées comme une série de plus en plus fines regroupées approximation de masse qui se rapproche d'une distribution de masse

continue. La structure continue a un nombre infini de fréquences naturelles. Chacune avec sa forme caractéristique propre vibration.

Un titre d'exemple. Considérons une structure simple poutre supportée par des joints broches à chaque extrémité. Cette structures assez simple qu'une solution de forme formée pour les fréquences naturelles et les modes sont possibles. Les trois premières formes de mode sont représentées sur la figure 27.

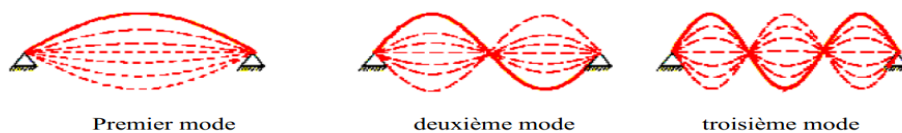


Figure 27 Les trois premières formes de flexion d'une poutre appuyée Aux deux extrémités [6].

II.8 Problème

Le système de la figure 1 représente un rotor déformable posé sur deux paliers rigides, le disque est rigide avec comme propriétés $J_{xx} = 0.1225 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_{yy} = 0.2450 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, la masse du disque $M = 7.85 \text{ kg}$. L'arbre a une longueur $L = 0.4 \text{ m}$ et le moment d'inertie surfacique $I_x = I_z = 0.49 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$. Le module de Young est $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. La masse de l'arbre est négligeable.

N est la vitesse de rotation du rotor en tours/second (tr/s), la vitesse de rotation de rotor en radian/second (rad/s) est, telle que $\Omega = 2\pi N$.

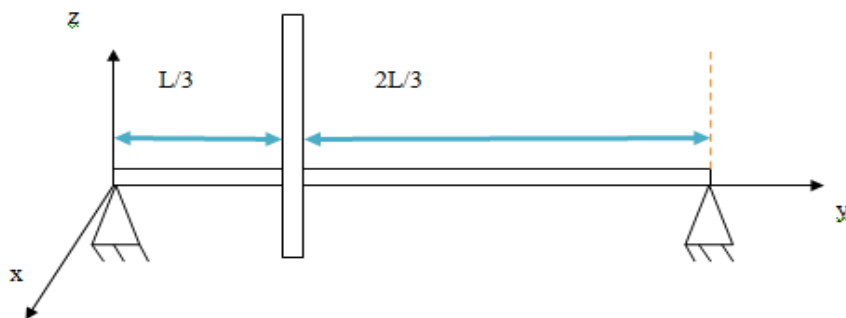


Figure 28 Modèle d'un rotor déformable.

On donne :

$U(y, t) = \sin \frac{\pi y}{L} U_1(t) = U(y) \cdot U_1(t)$: déplacement suivant x

$W(y, t) = \sin \frac{\pi y}{L} W_1(t) = W(y) \cdot W_1(t)$: déplacement suivant y

- 1) Sachant que $U(y) = W(y)$, Déterminer les degrés de libertés de ce rotor.
- 2) Déterminer les équations du mouvement qui décrivent le mouvement vibratoire du rotor.

Si les équations différentielles qui régissent le mouvement vibratoire du rotor décrit précédemment sont données par :

$$\begin{cases} 7,777\ddot{U}_1 + 3,778\Omega\dot{W}_1 + 7,458 \cdot 10^4 U_1 = 0 \\ 7,777\ddot{W}_1 - 3,778\Omega\dot{U}_1 + 7,458 \cdot 10^4 W_1 = 0 \end{cases}$$

- 3) Résoudre alors ce système d'équations différentielles.
- 4) Déterminer les paramètres fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation du rotor N (0, 10, 30 et 50 tr/s).
- 5) Tracer le diagramme de Campbell qui représente les premières fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation du rotor N.
- 6) Déterminer les fréquences de résonance de ce rotor.

II.8.1 La Solution du problème

- 1) Les degrés de libertés de ce rotor est : 2 DDL.
- 2) Équations de mouvement vibratoire du rotor:

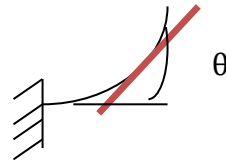
$$T_T = T_D + T_a + T_b$$

$$T_a = 0; T_b = 0$$

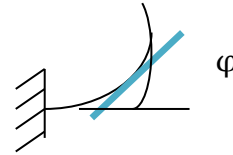
$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} J_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} J_{Dy} (\Omega^2 + 2\dot{\psi}\theta\Omega)$$

Sachant que :

Plan 1 $\tan \theta = \frac{\partial W}{\partial y} \simeq \theta$



Plan 2 $\tan \varphi = \frac{\partial U}{\partial y} \simeq \varphi$



$$\begin{cases} U(y, t) = \sin \frac{\pi y}{L} U_1(t) & \Rightarrow \dot{U}(y, t) = \frac{\partial U}{\partial t} = \sin \frac{\pi y}{L} \dot{U}_1 \\ W(y, t) = \sin \frac{\pi y}{L} W_1(t) & \Rightarrow \dot{W}(y, t) = \frac{\partial W}{\partial t} = \sin \frac{\pi y}{L} \dot{W}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta(y, t) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi y}{L} W_1(t) \\ \varphi(y, t) = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi y}{L} U_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \dot{W}_1(t) \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi y}{L} \dot{U}_1(t) \end{cases}$$

On calcul l'énergie cinétique du disque :

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} J_{Dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} J_{Dy} (\Omega^2 + 2\dot{\psi}\theta\Omega)$$

Applications numériques :

Avec $y = \frac{L}{3}$ donc

$$\dot{U} = 0.8666 \dot{U}_1$$

$$\dot{U}^2 = 0.75 \dot{U}_1^2$$

$$\dot{W} = \dot{U} \Rightarrow \dot{W}^2 = \dot{U}^2 = 0.75 \dot{W}_1^2$$

Donc

$$\dot{\theta} = 3.925 \dot{W}_1$$

$$\dot{\theta}^2 = 15.4 \dot{W}_1^2$$

$$\dot{\phi} = 3.925 \dot{U}_1$$

$$\dot{\phi}^2 = 15.4 \dot{U}_1^2$$

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (0.75)(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} J_{Dx} (15.4)(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} J_{Dy} (\Omega^2 + 2(3.93)^2 \dot{U}_1 \Omega)$$

On remplace la masse et le moment d'inertie avec ces valeurs on trouve :

$$T_D = 3.88(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + (0.122\Omega^2 + 3.76\dot{U}_1 W_1 \Omega)$$

On calcul l'énergie déformation du l'arbre :

$$E_{déf} = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) dy$$

$$E_{déf} = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy$$

$$W = \sin \frac{\pi y}{L} W_1 \Rightarrow \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \left(-\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi y}{L} W_1$$

$$U = \sin \frac{\pi y}{L} U_1 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \left(-\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi y}{L} U_1$$

$$E_{déf} = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left[\left(\frac{\pi}{L} \right)^4 \left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{L} \right) (W_1^2 + U_1^2) \right) \right] dy$$

$$E_{déf} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{L^4} EI (W_1^2 + U_1^2) \int_0^l \left(\sin^2 \frac{\pi y}{L} \right) dy$$

$$\int_0^l \left(\sin^2 \frac{\pi y}{L} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^l \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi y}{L} \right) \right] dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[y - \frac{L}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi y}{L} \right) \right]_0^l$$

$$= \frac{L}{2}$$

$$E_{d\acute{e}f} = \frac{\pi^4}{2L^4} EI (W_1^2 + U_1^2) \left[\frac{L}{2} \right]$$

$$E_{d\acute{e}f} = \frac{\pi^4}{4L^3} EI (W_1^2 + U_1^2)$$

$$E_{d\acute{e}f} = 3,72 \cdot 10^4 (W_1^2 + U_1^2)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{U}_1} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial U_1} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial U_1} \right) + \left(\frac{\partial E_P}{\partial U_1} \right) + \left(\frac{\partial E_d}{\partial U_1} \right) \right\} = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{W}_1} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{W}_1} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial W_1} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial W_1} \right) + \left(\frac{\partial E_P}{\partial W_1} \right) + \left(\frac{\partial E_d}{\partial W_1} \right) \right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{U}_1} \right) + \left(\frac{\partial E_{d\acute{e}f}}{\partial U_1} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial U_1} \right) = 0 \Rightarrow 7,77\ddot{U}_1 + 3,78\Omega\dot{W}_1 + 7,44 \cdot 10^4 U_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{W}_1} \right) + \left(\frac{\partial E_{d\acute{e}f}}{\partial W_1} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial W_1} \right) = 0 \Rightarrow 7,77\ddot{W}_1 - 3,78\Omega\dot{U}_1 + 7,44 \cdot 10^4 W_1$$

3-Le système des équations différentielles:

$$\begin{cases} U_1 = Ae^{\omega t} \\ \dot{U}_1 = A\omega e^{\omega t} \\ \ddot{U}_1 = A\omega^2 e^{\omega t} = U_1\omega^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} W_1 = Be^{\omega t} \\ \dot{W}_1 = B\omega e^{\omega t} \\ \ddot{W}_1 = B\omega^2 e^{\omega t} = W_1\omega^2 \end{cases}$$

Remplacer dans l'équation d'écrit :

$$\begin{cases} 7,77A\omega^2 e^{\omega t} + 3,78\Omega B\omega e^{\omega t} + 7,44 \cdot 10^4 Ae^{\omega t} \\ 7,77B\omega^2 e^{\omega t} - 3,78\Omega A\omega e^{\omega t} + 7,44 \cdot 10^4 Be^{\omega t} \end{cases}$$

On simplifier donc

$$\begin{cases} (7,77\omega^2 + 7,44 \cdot 10^4)A + (3,78\Omega\omega)B = 0 \\ (-3,78\Omega)A + (7,77\omega^2 + 7,44 \cdot 10^4)B = 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{bmatrix} 7,77\omega^2 + 7,44 \cdot 10^4 & 3,78\Omega\omega \\ -3,78\Omega & 7,77\omega^2 + 7,44 \cdot 10^4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 7.77\omega^2 + 7.44.10^4 & 3.78\Omega\omega \\ -3.78\Omega & 7.77\omega^2 + 7.44.10^4 \end{bmatrix} = 0$$

$$(7.77\omega^2 + 7.44.10^4)^2 + (3.78\Omega\omega)^2 = 0$$

$$\omega^4 + (0.23\Omega + 1.92.10^4)\omega^2 + 0.92.10^8 = 0$$

On pose que $\lambda = \omega^2$

$$\lambda^2 + (0.23\Omega + 1.92.10^4)\lambda + 0.92.10^8 = 0$$

N (tr/s)Hz	0	10	30	50
$\Omega = 2\pi N$	0	62,8	188,5	314
$(0.23\Omega^2 + 1.92.10^4)\lambda + 0.92.10^8 = 0$	$\lambda^2 + (0.23*\Omega^2 + 1.92.10^4)\lambda + 0.92.10^8 = 0$			
Δ	0,000E+0	0,364E+8	3,910E+8	14,32
$\sqrt{\Delta}$	0,000E+0	0,603E+4	0,198E+5	0,378
$\lambda_1 = \omega_A^2$	9600,00	6566,19	388,06	2290
ω_A	97,98	81,03	62,33	47,8
$f_{rA} = \omega_A / 2\pi$	15,60	12,90	9,92	7,6
$\lambda_2 = \omega_A^2$	9600,00	16611,29	23669,43	40120
ω_A	97,98	112,30	153,00	200,
$f_{rB} \omega_B / 2\pi$	15,60	17,88	24,49	31,9

Tableau II.2 Résultats de la variation des fréquences propres en fonction des fréquences de rotation.

4. Diagramme de Campbell :

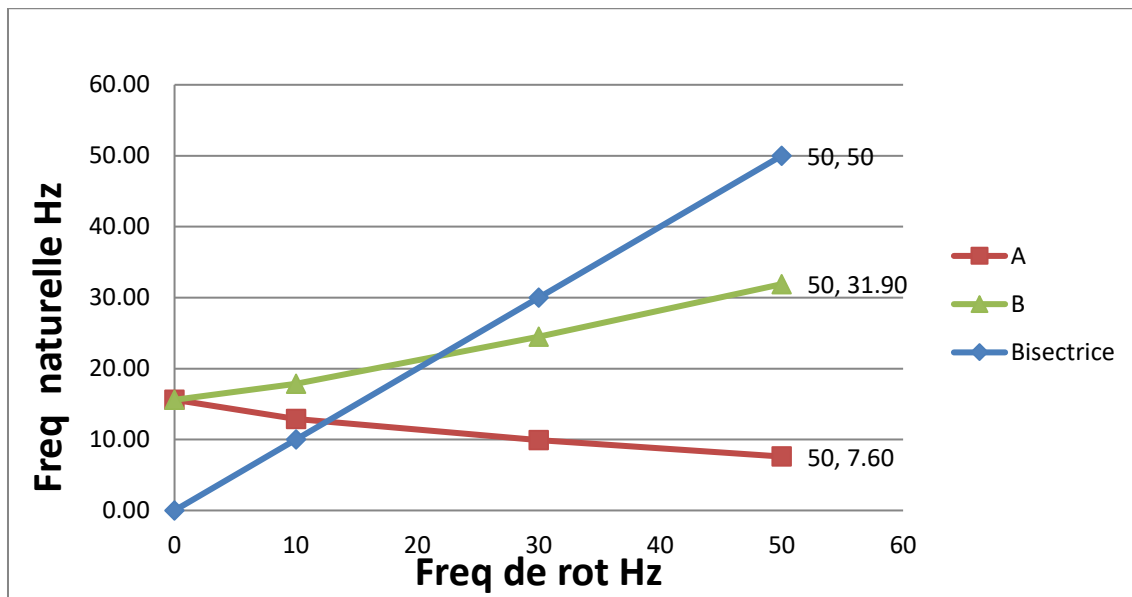


Figure 29 Diagramme de Campbell obtenu.

Interprétation du diagramme :

Les fréquences critiques sont calculées par l'intersection entre la bissectrice et les deux courbes A et B, donc la première fréquence de résonance est $fr_1 = 13.44Hz$ et la deuxième est $fr_2 = 23.14Hz$.

II.9 Conclusion

Les équations de mouvement de rotor ont été bien développées dans ce chapitre à partir d'un développement analytique des équations de mouvement qui régissent un système déformable quelconque en rotation, enfin on a focalisé notre étude sur un rotor simple en déterminant leurs énergies cinétiques et énergies potentielles ; ainsi, les équations de Lagrange sont bien adaptées pour trouver les équations de mouvement.

Référence

- [1] Mémoire En vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER EN GENIE MECANIQUE de Mr. Brahimi Hamza, Université de Boumerdès, Année universitaire 2009 /2010. <http://dlibrary.univ-boumerdes.dzBrahmiHamza.pdf>
- [2] Cours de Dynamique des Machines Tournantes, Dr Beloufa Amine, centre universitaire Ain Témouchent 2018/2019.
- [3] Rajiv Tiwari - Rotor Systems_ Analysis and Identification, Ed CRC Press, 2018.
- [4] <https://www.mathematiquesfaciles.com/correspondants/contribuer>.
- [5] Mémoire En vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER EN GENIE MECANIQUE de Mr. ASSEM Hassan Université de Tlemcen, Année universitaire 2009/2010.
- [6] Mémoire En vue de l'obtention du diplôme de MAGISTER EN GENIE MECANIQUE de Mr. SAIMI Ahmed. Université de Tlemcen, Année universitaire 2012/2013.

CHAPITRE III
MODELISATION
ELEMENTS FINIS DU
ROTOR

Introduction

La simulation numérique a connue depuis longtemps, l'une des utiles les plus importants pour le calcul en dynamique des structures et vibration.

Ce chapitre présente la partie de modélisation et simulation de notre mémoire c'est la partie la plus importante de notre travail, l'objet de ce chapitre est de faire une étude des vibrations par éléments finis du rotor rigide et flexible.

Pour mener notre étude par une simulation numérique, on utilise le code de calcul numérique ANSYS.

Donc, on commence par le dimensionnement et la conception du rotor rigide composé d'un disque rigide posé sur deux paliers rigides à l'aide du logiciel en suite nous allons entamer la partie de simulation numérique on WORKBENCH, où on va faire l'analyse modale pour déterminer les modes propres du rotor après nous allons faire à la fin de ce chapitre l'analyse harmonique pour déterminer les vitesses critiques de rotation.

III.1 La conception du rotor sous logiciel WORKBENCH

Comme il a été mentionné au début de ce chapitre, nous avons utilisé le logiciel de modélisation WORKBENCH pour la conception de notre rotor voir figure29.

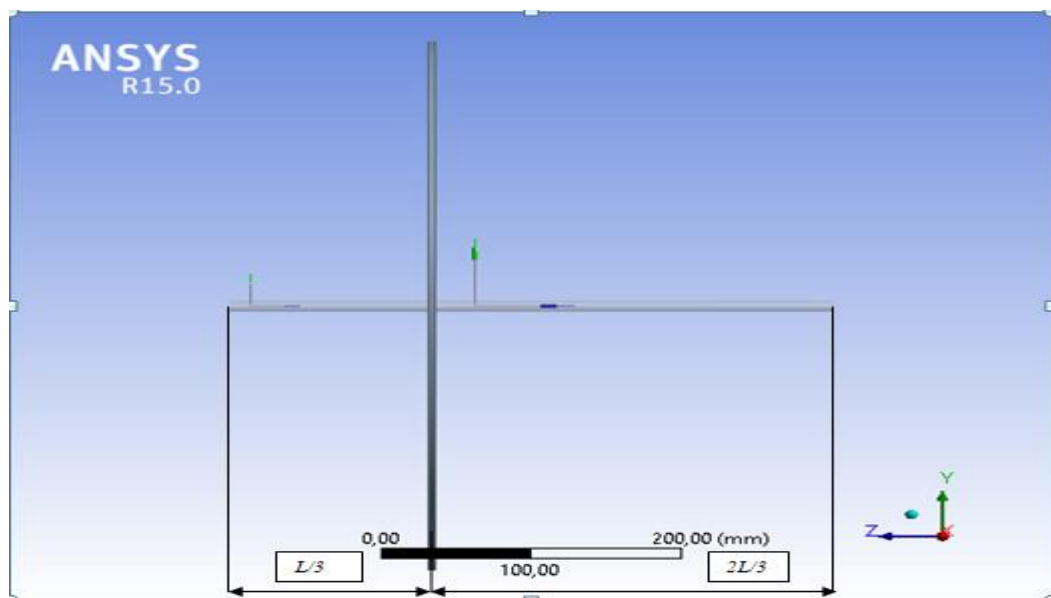


Figure 30 Conception du rotor sous logiciel WORKBENCH.

III.2 Simulation du Rotor en ANSYS 15.0 (workbench)

Le code d'éléments finis ANSYS 15.0 (workbench) (3D) est utilisé dans cette partie pour simuler le comportement vibratoire de notre rotor. Voir figure30.

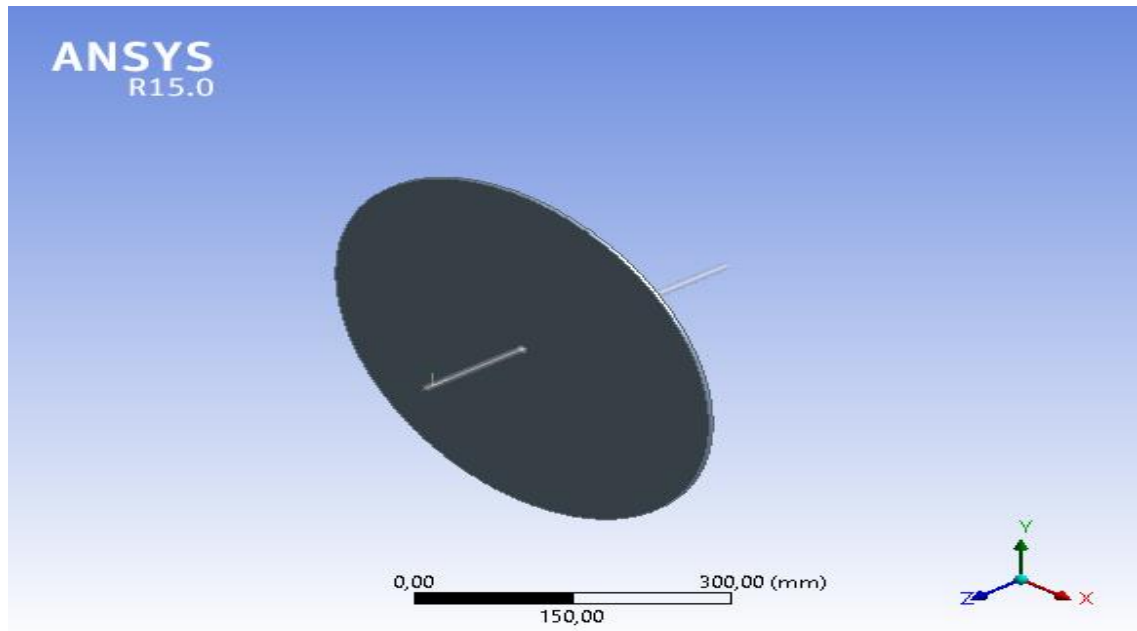


Figure 31 La Simulation du rotor.

III.2.1 Dimensionnement et géométrie du rotor

Dans cette étude, le modèle montré (voir figure 31) est un rotor simplifié, avec des caractéristiques suivantes :

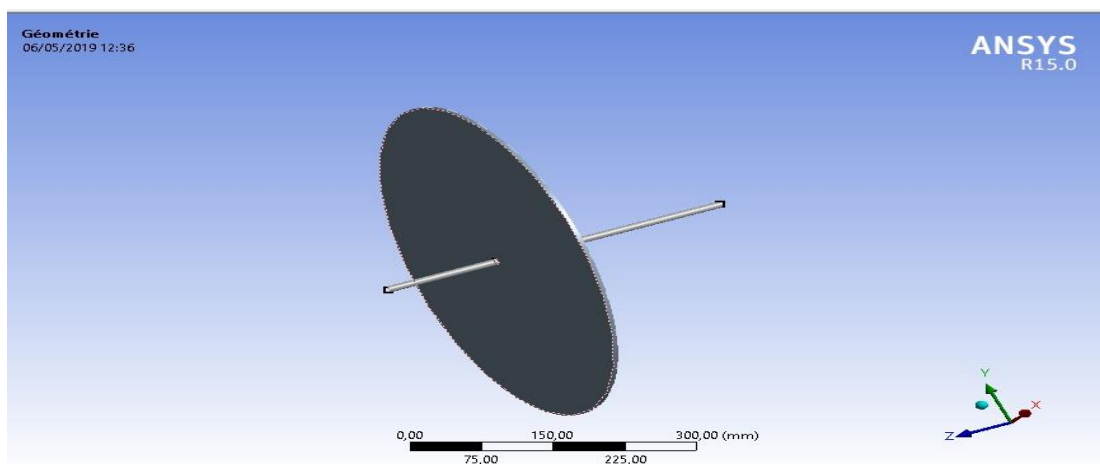


Figure 32 La géométrie du rotor.

<i>Les propriétés géométriques du rotor</i>	<i>Valeur numérique</i>
<i>longueur de l'arbre</i>	<i>400 mm</i>
<i>Le diamètre de l'arbre</i>	<i>10 mm</i>
<i>la masse de l'arbre</i>	<i>0,2466 kg</i>
<i>La masse de disque</i>	<i>7.85 kg</i>
<i>Le diamètre de disque</i>	<i>500 mm</i>
<i>l'épaisseur de disque</i>	<i>5 mm</i>

Tableau III.1 Les propriétés géométriques du rotor.

III.2.2 Matériaux utilisés pour la simulation

<i>Propriété du matériau</i>	<i>Valeur numérique</i>
<i>Matériau</i>	<i>Acier</i>
<i>Module de Young (E) en (Pa)</i>	<i>2e11</i>
<i>Coefficient de Poissons</i>	<i>0.3</i>
<i>Moment d'inertie surfacique de l'arbre $I_{xx}=I_{zz}$</i>	<i>0.49.10e-9 m²</i>
<i>Moment d'inertie massique du disque $J_{xx}=J_{zz}$</i>	<i>0.1225 kg.m²</i>
<i>Moment d'inertie massique du disque J_{yy}</i>	<i>0.2450 kg.m²</i>

Tableau III.2 Les propriétés du matériau du rotor.

III.2.3 Maillage :

1III.2.3.1 CAS 1 : Disque Rigide

La création de la géométrie ainsi que le maillage se font sous le logiciel "ANSYS". Celui-ci propose des solutions étendues pour les géométries les plus compliquées.

La qualité du maillage joue un rôle significatif dans la précision et la stabilité du calcul numérique. Pour cette étude, l'élément quadrilatère était convenable en raison de son effet quadratique, le model rotor a été maillé avec un maillage "fin" (voir la figure 32).

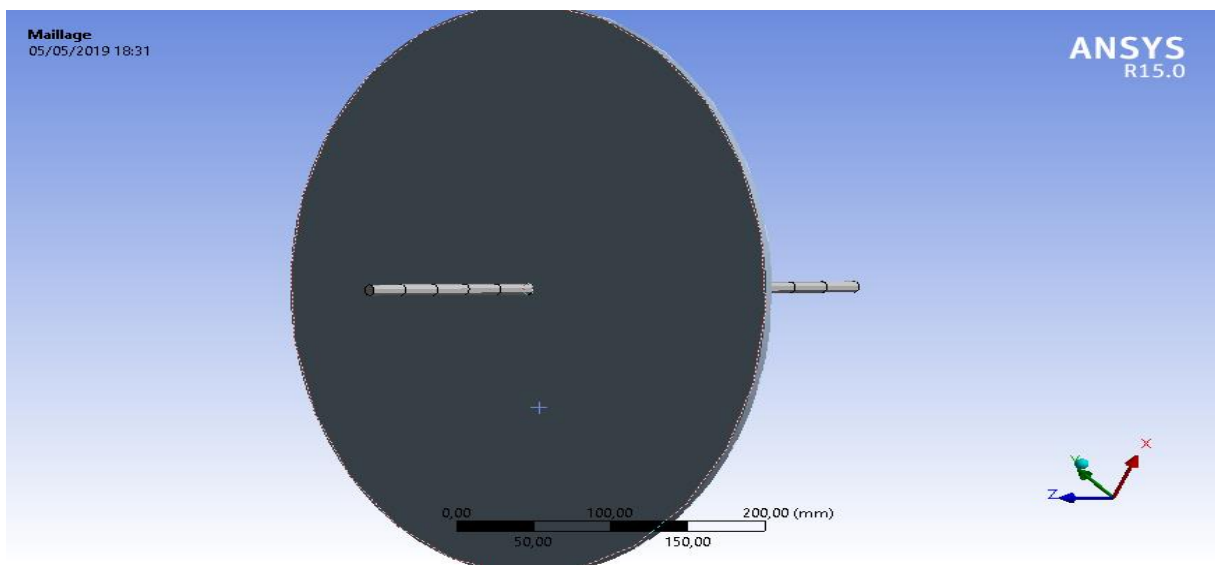


Figure 33 Maillage quadrilatère de l'arbre.

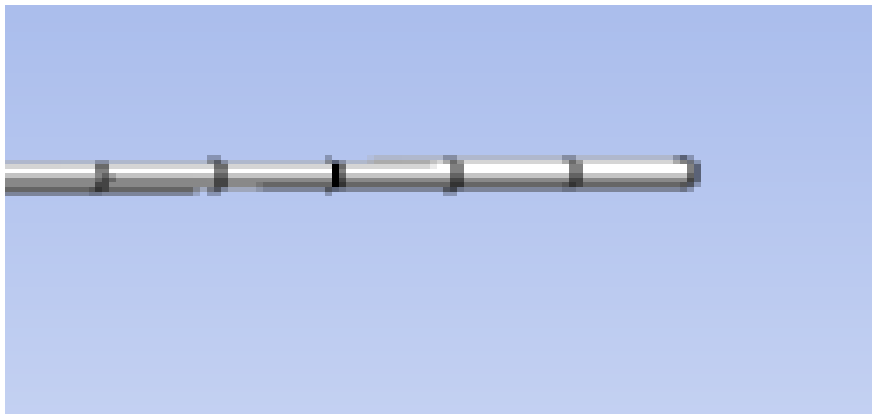


Figure 34 Maillage du rotor par l'élément quadrilatère.

 **Remarque 1**

On a pris en compte l'effet Coriolis (gyroscopique) et l'amortissement structural du rotor.

III.2.3.2 Éléments utilisés

Les deux tableaux suivants représentent les éléments utilisés dans la simulation du rotor.

<i>Éléments types</i>	<i>Maillage</i>	<i>Type</i>	<i>Nbr DDL</i>	<i>DDL</i>	<i>Élément</i>
<i>Masse 21</i>	<i>Disque</i>	<i>Ponctuelle</i>	<i>6</i>	<i>Ux, Uy, Uz Rotx, Roty , Rotz</i>	<i>1</i>
<i>Arbre (beam188)</i>	<i>Arbre</i>	<i>Poutre Quadratique</i>	<i>6</i>	<i>Ux, Uy, Uz Rotx, Roty , Rotz</i>	<i>16</i>
<i>Contact175</i>	<i>Surface de contact</i>	<i>Nœud</i>	<i>6</i>	<i>Ux, Uy, Uz, Rotx, Roty ,Rotz</i>	<i>2</i>
<i>Targe170</i>	<i>Surface de contact</i>	<i>Surface</i>	<i>6</i>	<i>Ux, Uy, Uz Rotx, Roty , Rotz</i>	<i>9</i>
<i>Combi214</i>	<i>Palier</i>	<i>Ressort + amortisseur</i>	<i>6</i>	<i>Ux, Uy, Uz Rotx, Roty , Rotz</i>	<i>2</i>

Tableau III.3 Les éléments utilisés et leur DDL.

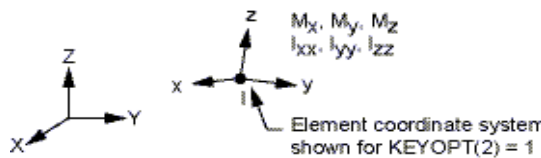
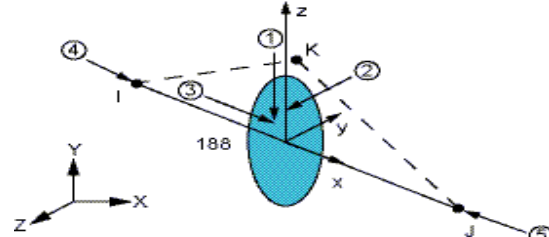
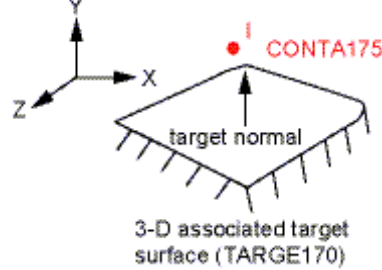
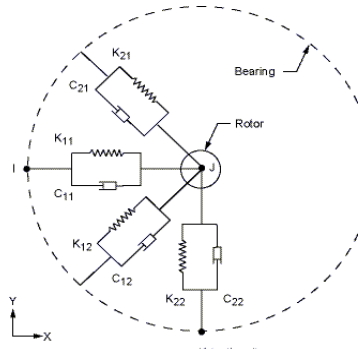
Éléments types	Illustrations des éléments
<p>Masse 21</p>	
<p>Arbre (beam188)</p>	
<p>Contact175 et Targe170</p>	
<p>Combi214</p>	<p>Palier rigide</p> <p>$K_{11}=K_{22}=K_{21}=K_{12}=1E+10N/mm$</p> <p>$C_{11}=C_{22}=C_{21}=C_{12}=0$ (Ns/mm ou kg/s)</p> 

Tableau III.4 Illustration des éléments.

III.2.5 Les conditions aux limites:

- **Vitesse de rotation :**

<i>Vitesse (rad/s)</i>	<i>Vitesse (Hz)</i>
0	0
62,8	10
188,5	30
314,2	50

Tableau III.5 Les vitesses appliquées sur le rotor.

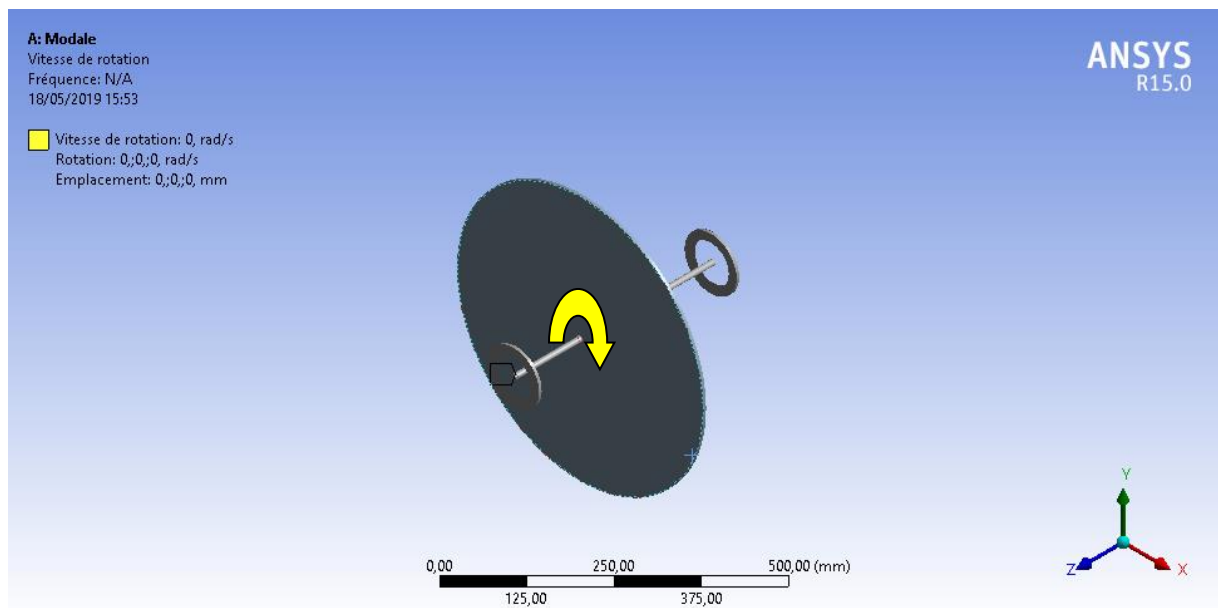


Figure 35 La vitesse de rotation.

- **Les déplacements distants :**

Pour les nœuds des deux paliers on annule tous les degrés de libertés de déplacements U_x , U_y , U_z (appui triple).

Les deux figures (34,35) suivantes représentent les déplacements distants et leurs degrés de libertés.

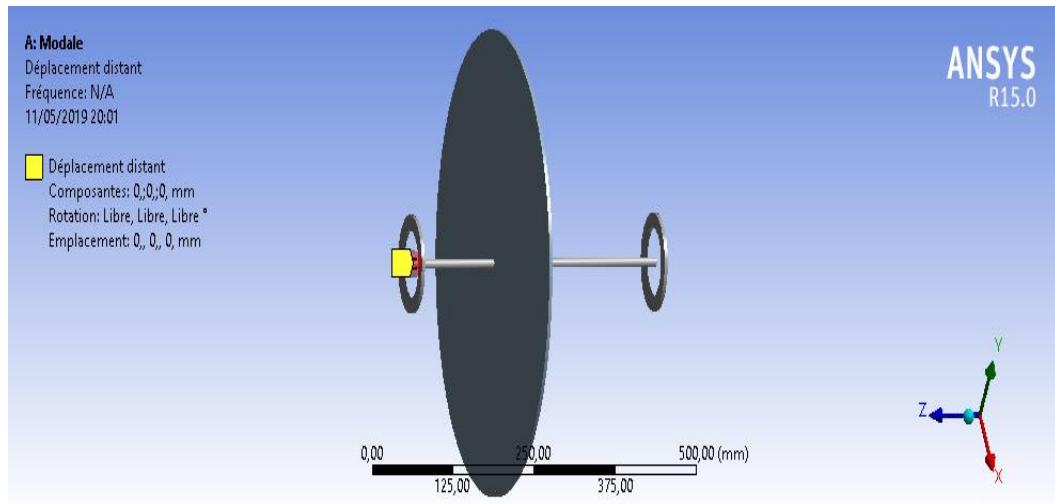


Figure 36 Le déplacement distant 1.

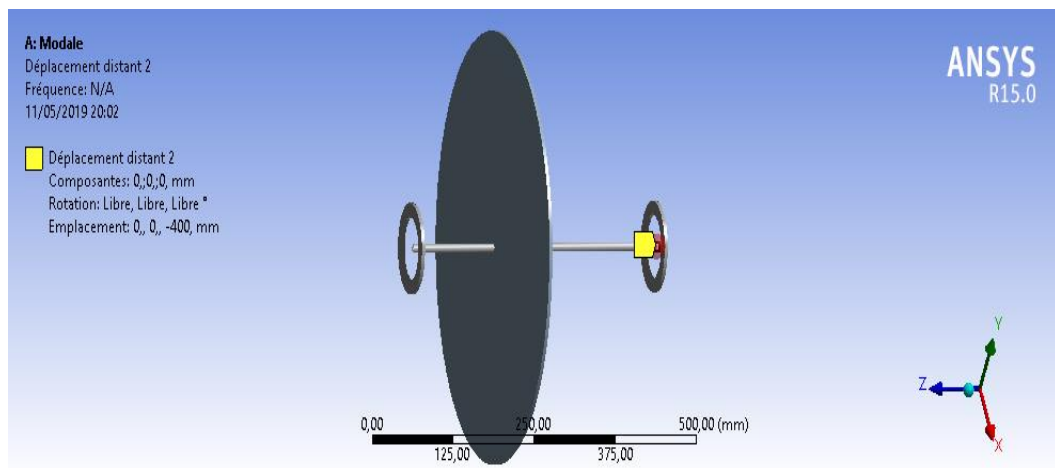


Figure 37 Le déplacement distant 2.

III.2.3.3 Contact

Le contact entre l'arbre et le disque est lié totalement voir la figure 36 les deux nœuds de la surface de contact de la poutre ont été modalisés par Conta175 et la surface de contact du disque par Targe170.

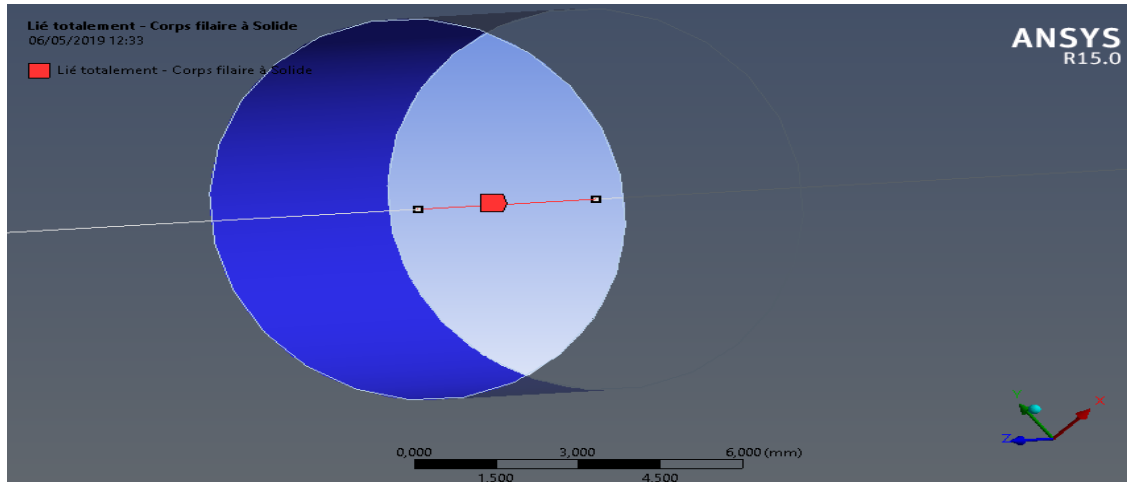


Figure 38 Le contact collé l’arbre et le disque.

III.2.3.4 CAS 2 : Disque Flexible

Remarque 2

On a gardé les mêmes étapes pour le contact et les conditions aux limites dans les deux cas du rotor avec un disque rigide et flexible.

III.2.3.5 Maillage cas disque flexible

Pour cette étude, l’élément quadrilatère était convenable en raison de son effet quadratique, le model rotor a été maillé avec un maillage "fin" (voir la figure 37).

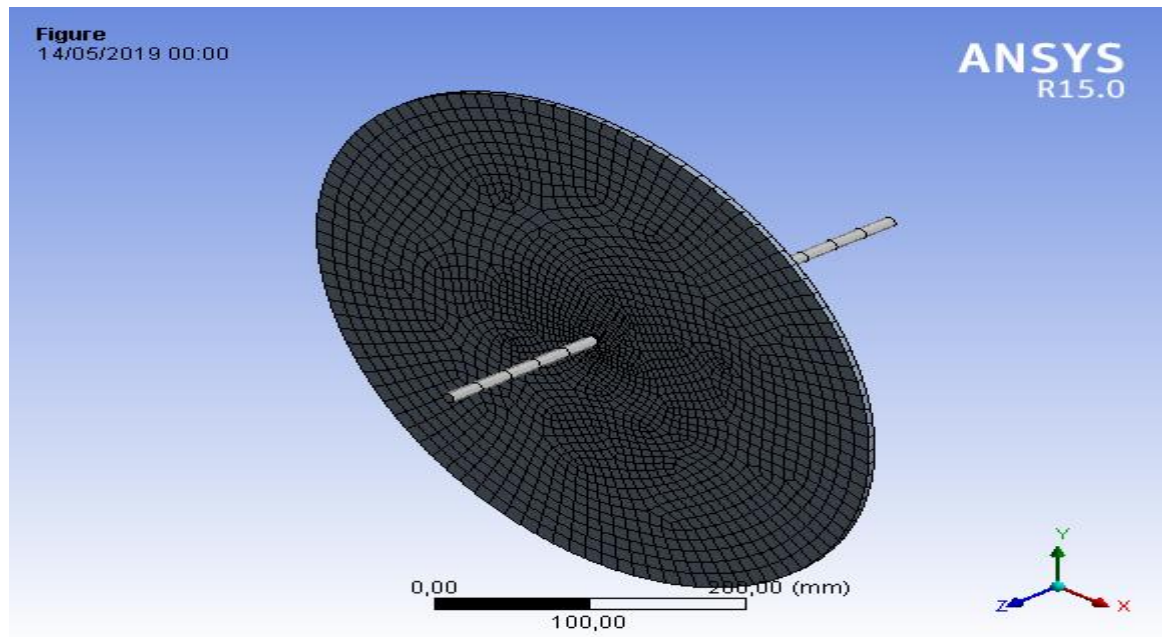


Figure 39 Maillage quadrilatère de la géométrie.

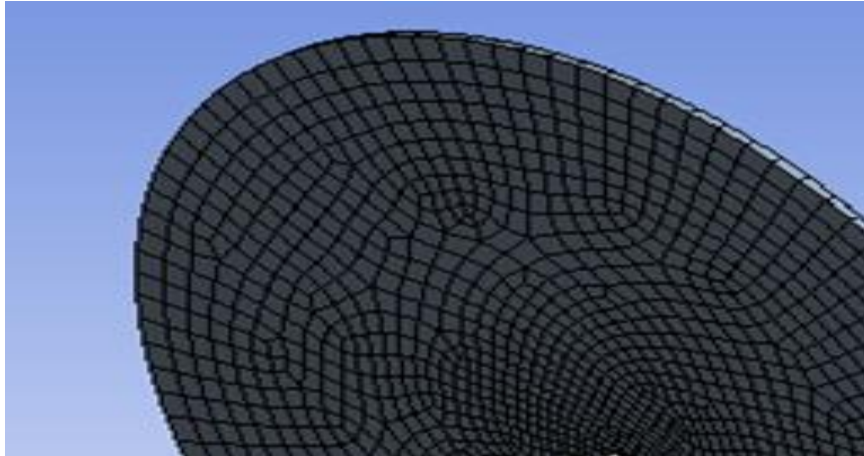


Figure 40 Maillage du disque flexible par l'élément quadrilatère.

<i>Éléments types</i>	<i>Maillage</i>	<i>Type</i>	<i>Nbr DDL</i>	<i>DDL</i>	<i>Élément</i>
<i>Solide186</i>	<i>Disque</i>	<i>Brique Quadratique</i>	<i>3</i>	<i>Ux, Uy, Uz</i>	<i>2007</i>
<i>Arbre (beam188)</i>	<i>Arbre</i>	<i>Poutre Quadratique</i>	<i>6</i>	<i>Ux, Uy, Uz Rotx, Roty , Rotz</i>	<i>16</i>
<i>Contact175</i>	<i>Surface de contact</i>	<i>Nœud</i>	<i>6</i>	<i>Ux, Uy, Uz Rotx, Roty , Rotz</i>	<i>2</i>
<i>Targe170</i>	<i>Surface de contact</i>	<i>Surface</i>	<i>6</i>	<i>Ux, Uy, Uz Rotx, Roty , Rotz</i>	<i>8</i>
<i>Combi214</i>	<i>Palier</i>	<i>Ressort + amortisseur</i>	<i>6</i>	<i>Ux, Uy, Uz Rotx, Roty , Rotz</i>	<i>2</i>

Tableau III.6 Les éléments utilisés et leur DDL.

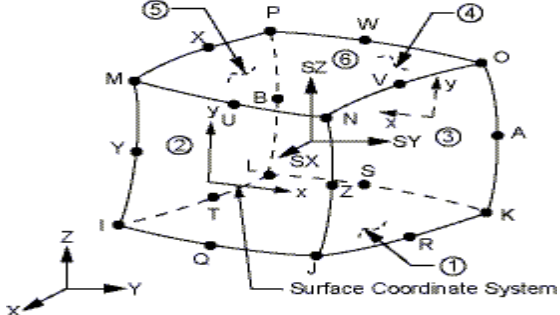
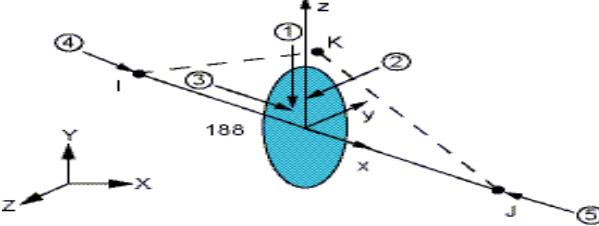
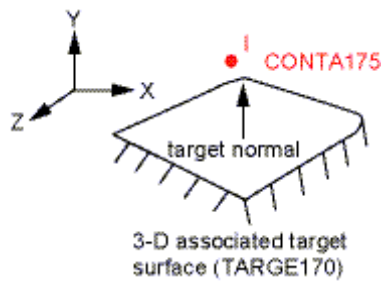
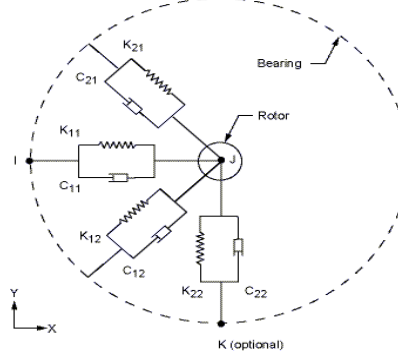
Éléments types	Illustrations des éléments
<p><i>Solide 186</i></p>	
<p><i>Arbre (beam188)</i></p>	
<p><i>Contact175 et Targe170</i></p>	
<p><i>Combi214</i></p>	<p>Palier rigide</p> <p>$K_{11}=K_{22}=K_{31}=K_{12}=1E$ $+10N/mm$</p> <p>$C_{11}=C_{22}=C_{31}=C_{12}=0$ (Ns/mm ou kg/s)</p> 

Tableau III.7 Illustration des éléments.

III.3 Analyse Modale

L'analyse modale a pour principe de déduire des matrices vibratoires, des paramètres "fréquences de résonance" et "déformées de la structure" réelle ou du prototype en maquette donc, pour cette étude nous avons calculé les modes propres à l'aide du logiciel "ANSYS Workbench" qui calcul les fréquences propres à l'aide de la formule suivante :

$$([\mathbf{K}] - \omega_1^2 [\mathbf{M}])\{\phi_1\} = \mathbf{0}$$

Où:

K : est la matrice de rigidité qui dépend des propriétés du matériau et de la géométrie.

M : est la matrice masse.

ω_1 : est la pulsation propre du mode I.

ϕ_1 : est le vecteur qui représente la déformation du mode I.

Nous avons supposés que le système est non amorti et on a fait une analyse modale pour déterminer deux (2) premiers modes propres.

CHAPITR IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

Introduction

Dans ce chapitre nous allons faire une comparaison entre les résultats numérique et théorique du diagramme de Campbell d'un rotor à disque rigide et à disque flexible, en suite nous allons procéder aux calculs des modes propres du rotor à disque flexible pour autres matériaux et pour des paliers flexibles dans le but de vérifier la marge de la vitesse critique ; à la fin nous allons terminer par une conclusion.

IV.1 La schématisation des modes propres du rotor en acier

Dans cette partie nous allons voir les deux modes qu'on a trouvés, schématisés dans le tableau suivant :

- La figure ci-dessous (mode 1) représente la flexion autour de l'axe Y suivant X le degré de liberté de ce mode est le déplacement U.
- La figure ci-dessous (mode 2) représente la flexion autour de l'axe X suivant Y le degré de liberté de ce mode est le déplacement W.

➤ Cas d'un rotor flexible ou à paliers rigides, le disque est considéré rigide

N° de mode	Fréquence initiale (Hz)	Schéma de la Déformation
1	14,985	<p>A: Modale Déplacement total 3 Type: Déplacement total Fréquence: 14,985 Hz Balayage de phase: 0, ° Unité: mm 18/05/2019 15:57</p> <p>10,638 Max 9,4556 8,2736 7,0917 5,9097 4,7278 3,5458 2,3639 1,1819 0 Min</p> <p>ANSYS R15.0 0,00 125,00 250,00 375,00 500,00 (mm) Y Z X Active Windows</p>
2	14,993	<p>A: Modale Déplacement total 4 Type: Déplacement total Fréquence: 14,993 Hz Balayage de phase: 0, ° Unité: mm 18/05/2019 15:58</p> <p>10,643 Max Automatique 8,2781 7,0955 5,9129 4,7304 3,5478 2,3652 1,1826 0 Min</p> <p>ANSYS R15.0 0,00 75,00 150,00 225,00 300,00 (mm) Y Z X Active Windows</p>

Tableau IV. 1 Les déplacements initiaux du rotor à disque rigide.

➤ Cas d'un rotor flexible ou à paliers rigides, le disque est considéré flexible

N° de mode	Fréquence (Hz)	Schéma de la Déformation
1	12,986	<p>A: Modale Déplacement total 3 Type: Déplacement total Fréquence: 12,986 Hz Balayage de phase: 0 Unité: mm 20/05/2019 00:38</p> <p>21,028 Max 18,691 16,355 14,018 11,682 9,3456 7,0092 4,6728 2,3364 0 Min</p> <p>total 3 ment total 12,986 Hz phase: 0, ° 00:38 x</p> <p>ANSYS R15.0</p> <p>0,00 100,00 (mm) 50,00</p>
2	13,434	<p>A: Modale Déplacement total 4 Type: Déplacement total Fréquence: 13,434 Hz Balayage de phase: 0, ° Unité: mm 20/05/2019 00:38</p> <p>19,866 Max 17,658 15,451 13,244 11,036 8,8292 6,6219 4,4146 2,2073 0 Min</p> <p>total 4 ment total 13,434 Hz phase: 0, ° 00:38 x</p> <p>ANSYS R15.0</p> <p>0,00 100,00 (mm) 50,00</p>

Tableau IV. 2 Les déplacements initiaux du rotor à disque flexible.

IV.2 Résultats du diagramme de Campbell

➤ Cas d'un rotor flexible ou à paliers rigides, le disque est considéré rigide

N(HZ)	0	10	30	50
BW(Théo)	15,6	12,9	9,92	7,6
FW(Théo)	15,6	17,88	24,49	31,9
BW(num)	14,985	11,964	7,9187	5,6527
FW(num)	14,983	18,779	28,373	39,784
Erreur	3,94230769	7,25581395	20,1743952	25,6223684
Erreur	3,95512821	5,02796421	15,8554512	24,7147335

Tableau IV. 3 Les fréquences propres théoriques et numériques du rotor à disque rigide.

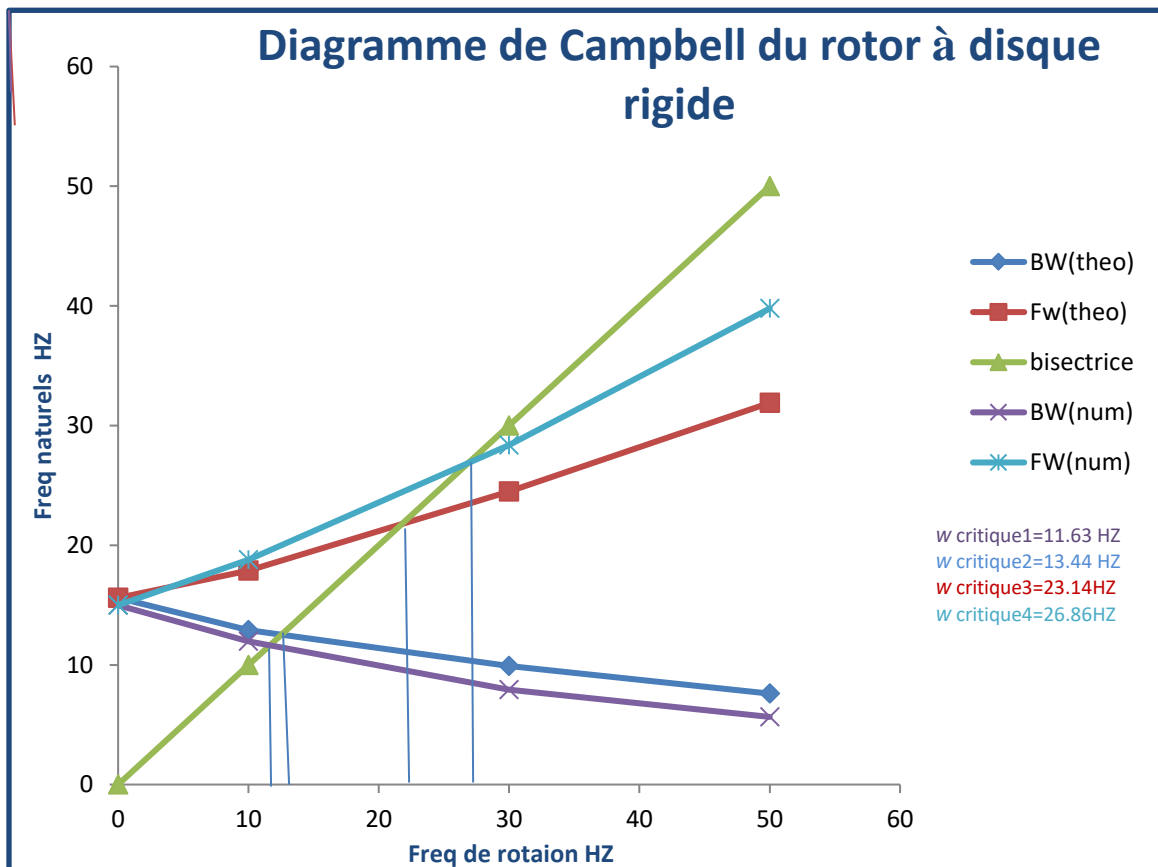


Figure 41 Comparaison entre les diagrammes de Campbell du rotor théorique à disque rigide et du rotor numérique à disque rigide.

❖ **Interprétation du premier diagramme**

Le graphe ci-dessus représente le diagramme de Campbell du rotor à disque rigide (numérique et théorique), les deux courbes pour chaque cas représentent :

1 /- Courbe croissante c'est la Précession directe (Fw).

2 /- Courbe décroissante C'est la Précession indirecte (Bw).

Les vitesses critiques sont situées aux points d'intersection de la ligne bissectrice avec les lignes des modes indirectes .les points de départ de chaque mode sont les fréquences propres de système à l'état repos, leurs valeurs sont présentées dans le tableau IV.3.

On remarque dans le tableau IV.3 que les erreurs entre les résultats théorique et numérique sont faibles pour les petites vitesses de rotation et elles augmentent pour les vitesses supérieures à 188,5 rad/s (30 Hz) car l'effet gyroscopique sur l'énergie cinétique augmente (voir équation ci-dessous)

❖ Le terme $\frac{1}{2}I_{Dy}2\dot{\Psi}\theta\Omega$ exprime l'effet gyroscopique (Coriolis).

Si Ω augmente, le terme de l'énergie $\frac{1}{2}I_{Dy}2\dot{\Psi}\theta\Omega$ augmente et donc l'erreur augmente

En effet, dans le cas théorique ce phénomène gyroscopique n'est pas pris en compte, ce qui explique que l'erreur est trop faible pour une vitesse de rotation Ω nulle, notre modèle numérique est fiable et il est proche du modèle théorique pour les faibles vitesses de rotation du rotor.

➤ Cas d'un rotor flexible ou à paliers rigides, le disque est considéré flexible

N(HZ)	0	10	30	50
BW (Théo)	15,6	12,9	9,82	7,6
FW (Théo)	15,6	17,88	24,49	31,9
BW (num)	12,986	7,7553	3,6039	2,2633
FW (num)	13,434	18,08	18,661	18,703
Erreur	16,7564103	39,8813953	63,3004073	70,2197368
Erreur	13,8846154	1,11856823	23,8015517	41,369906

Tableau IV. 4 Les fréquences propres du rotor à disque rigide théorique et à disque flexible numérique.

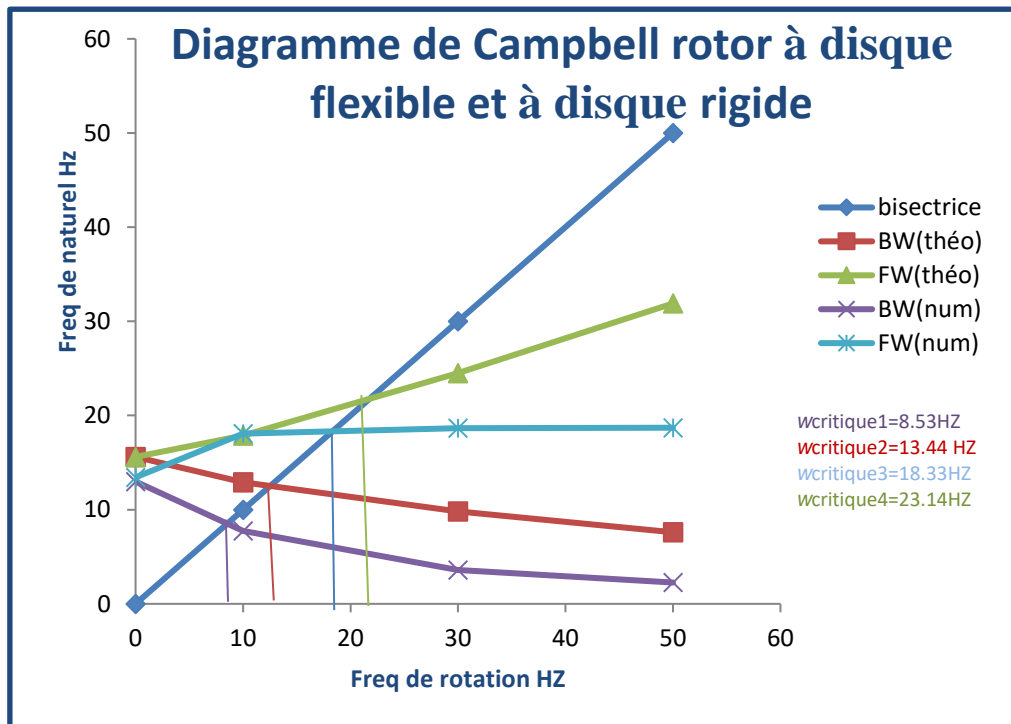


Figure 42 Diagramme de Campbell du rotor à disque rigide théorique et rotor numérique à disque flexible.

❖ Interprétation du deuxième diagramme

Le graphe ci-dessus est le diagramme de Campbell du rotor à disque flexible. Nous avons modélisé le rotor à disque flexible puisque il est proche de la réalité.

Nous remarquons que les erreurs entre la théorie et le calcul numérique sont très élevées, ces erreurs sont encore trop larges par rapport aux erreurs du premier cas. En effet, le disque flexible présente des déformations gyroscopiques plus grandes que le disque rigide.

En comparant les résultats obtenus de la vitesse critique pour le cas d'un rotor à disque rigide et le cas d'un disque flexible (voir les deux tableaux ci-dessus IV.1 et IV.2), nous pouvons conclure que le cas d'un disque flexible présente une fréquence ou une vitesse critique légèrement inférieure à celle obtenue pour le cas d'un disque rigide car celui-ci dans le cas réel se déforme légèrement (son épaisseur est de 5 mm et il se déforme comme une plaque), ainsi, l'effet gyroscopique a une influence légèrement supérieure dans le cas d'un disque flexible.

Notons que le disque rigide ne présente aucune déformation.

IV.3 Influence du matériau utilisé (alliage d'aluminium)

Dans le but d'augmenter la marge de la vitesse critique, nous proposons d'utiliser un autre matériau pour les éléments du rotor, le matériau choisi est l'alliage d'aluminium.

Pour la simulation du rotor en alliage d'aluminium on garde les mêmes étapes de la conception, de la modélisation et les mêmes conditions aux limites qu'on a vues précédemment, En effet, seulement le matériau qui change et notre rotor est *un rotor flexible ou à paliers rigides, le disque est considéré flexible.*

<i>Propriété du matériau</i>	<i>Valeur numérique</i>
<i>Matériau</i>	<i>Alliage aluminium</i>
<i>Module de Young (E) en (Pa)</i>	<i>71000</i>
<i>Coefficient de poisson</i>	<i>0,33</i>
<i>Masse volumique</i>	<i>2,77e-006 kg mm⁻³</i>

Tableau IV. 5 Les propriétés de l'alliage d'aluminium.

IV.4.2 La schématisation des modes propres du rotor en alliage d'aluminium

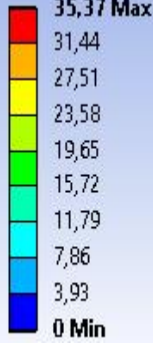
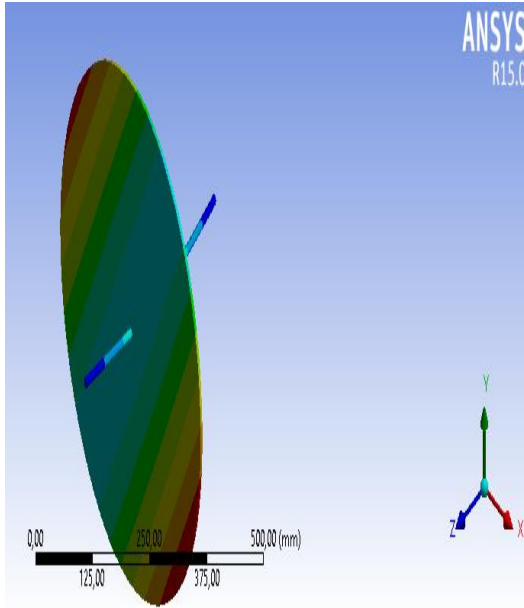

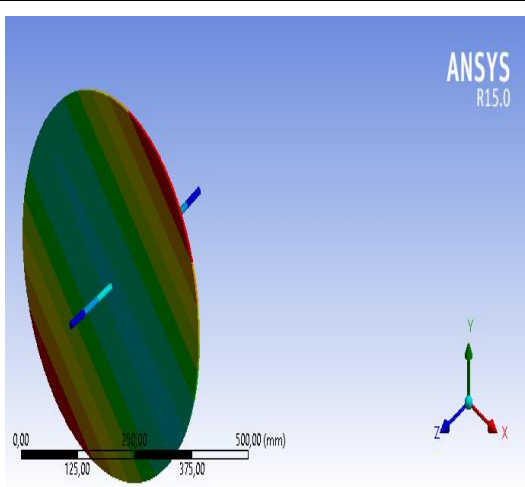
N° de mode	Fréquence (Hz)	Schéma de la déformation
1	13,042	<div data-bbox="549 539 852 1178"> <p>A: Modal Déplacement total 3 Type: Déplacement total Fréquence: 13,042 Hz Balayage de phase: 0, ° Unité: mm 09/06/2019 11:58</p>  <p>35,37 Max 31,44 27,51 23,58 19,65 15,72 11,79 7,86 3,93 0 Min</p> </div> <div data-bbox="868 539 1394 1144">  </div>
2	13,533	<div data-bbox="549 1370 791 1883"> <p>A: Modal Déplacement total 4 Type: Déplacement total Fréquence: 13,533 Hz Balayage de phase: 0, ° Unité: mm 09/06/2019 11:59</p>  <p>33,335 Max 29,631 25,927 22,223 18,519 14,815 11,112 7,4077 3,7039 0 Min</p> </div> <div data-bbox="823 1370 1350 1854">  </div>

Tableau IV. 6 Les déplacements initiaux du rotor à disque flexible en alliage d'aluminium.

IV.4.2.1 Résultats du diagramme de Campbell

N(HZ)	0	10	30	50
BW (num) (acier)	12,986	7,7553	3,6039	2,2633
FW (num) (acier)	13,434	18,08	18,661	18,703
BW (num) (alum)	13,033	7,8159	3,6417	2,2883
FW (num) (alum)	13,499	18,13	18,717	18,76
Erreur	0,3619282	0,7814011	1,0488637	1,1045818
Erreur	0,483847	0,2765487	0,3000911	0,3047639

Tableau IV. 7 Les fréquences propres du rotor à disque flexible numérique en acier et en alliage d'aluminium.

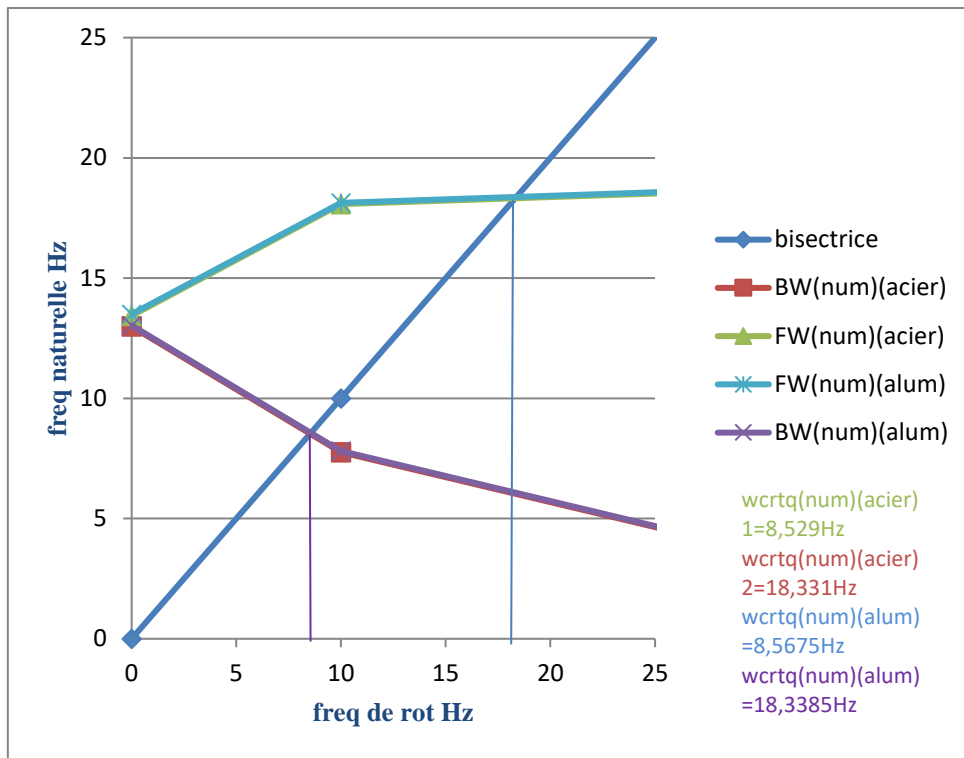


Figure 43 Diagramme de Campbell du rotor à disque flexible en acier et en alliage d'aluminium.

❖ **Interprétation du troisième diagramme**

Le graphe ci-dessus est le diagramme de Campbell du rotor à disque flexible en alliage d'aluminium.

Comme première solution pour augmenter la marge de vitesse critique nous avons proposé d'étudier un rotor à disque flexible en alliage d'aluminium.

Nous avons trouvé que les valeurs numériques des vitesses critiques du rotor en acier et les valeurs numériques du rotor en alliage d'aluminium sont très proches.

Donc, nous pouvons conclure que changer le matériau ne suffit pas pour augmenter la marge de vitesse critique.

IV.3 Influence de l'amortissement et de la raideur des paliers

Pour augmenter la marge de la vitesse critique, nous proposons de rajouter l'effet de l'amortissement des paliers, nous choisissons un coefficient de 10^{-6} N.S/mm et une raideur de 10^{-6} N/mm pour les deux paliers (voir figure 41).

$$K_{11}=K_{22}=K_{21}=K_{12}=1E-06 \text{ N/mm}$$

$$C_{11}=C_{22}=C_{21}=C_{12}=1E-06 \text{ (Ns/mm ou kg/s)}$$

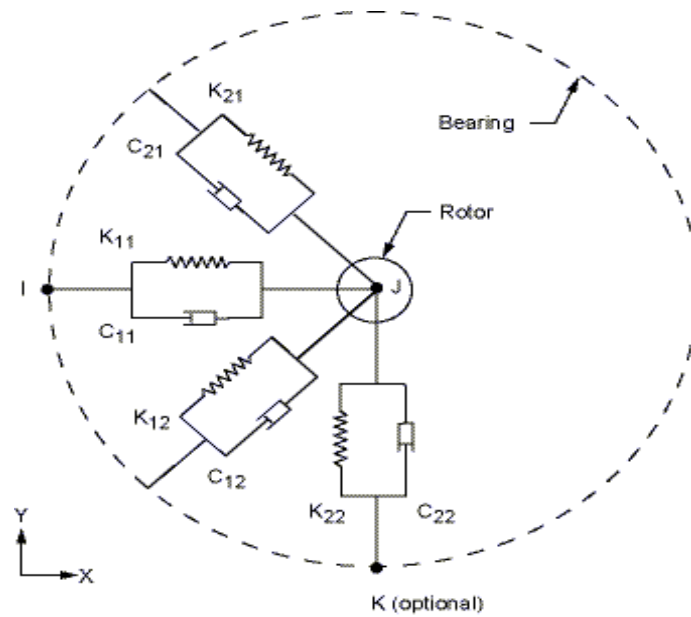


Figure 44 Palier amorti.

- Rotor en alliage d'aluminium rigide ou à paliers flexibles, le disque est considéré flexible

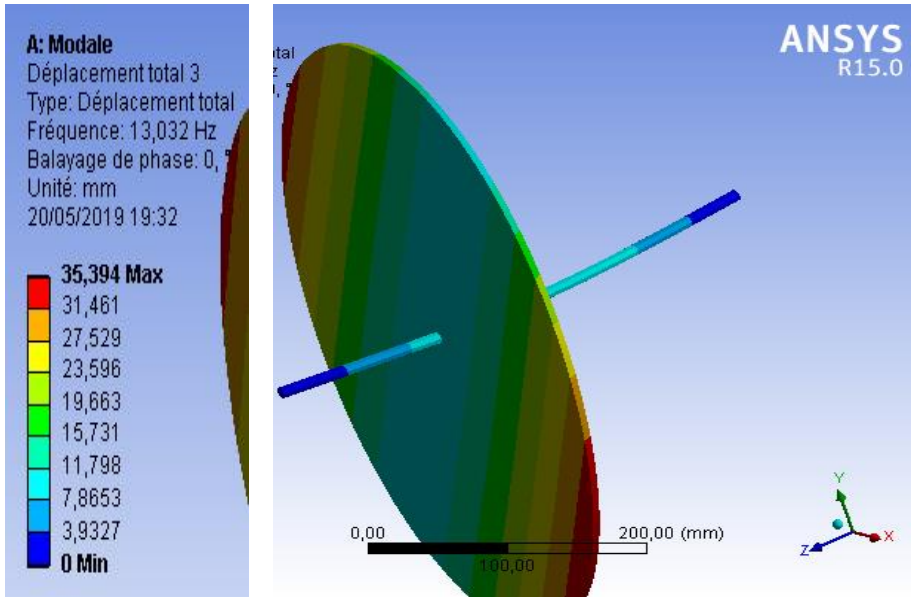
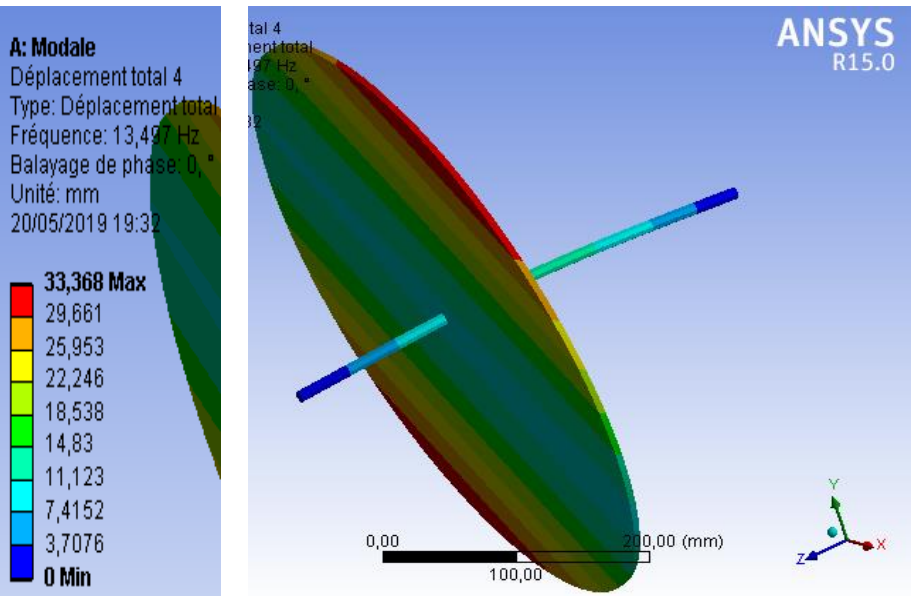
N° de mode	Fréquence (Hz)	Schéma de la déformation
1	13,032	 <p>A: Modale Déplacement total 3 Type: Déplacement total Fréquence: 13,032 Hz Balayage de phase: 0, * Unité: mm 20/05/2019 19:32</p> <p>35,394 Max 31,461 27,529 23,596 19,663 15,731 11,798 7,8653 3,9327 0 Min</p>
2	13,497	 <p>A: Modale Déplacement total 4 Type: Déplacement total Fréquence: 13,497 Hz Balayage de phase: 0, * Unité: mm 20/05/2019 19:32</p> <p>33,368 Max 29,661 25,953 22,246 18,538 14,83 11,123 7,4152 3,7076 0 Min</p>

Tableau IV. 8 Les déplacements initiaux du rotor à paliers flexibles ou amortis et à disque flexible en alliage d'aluminium

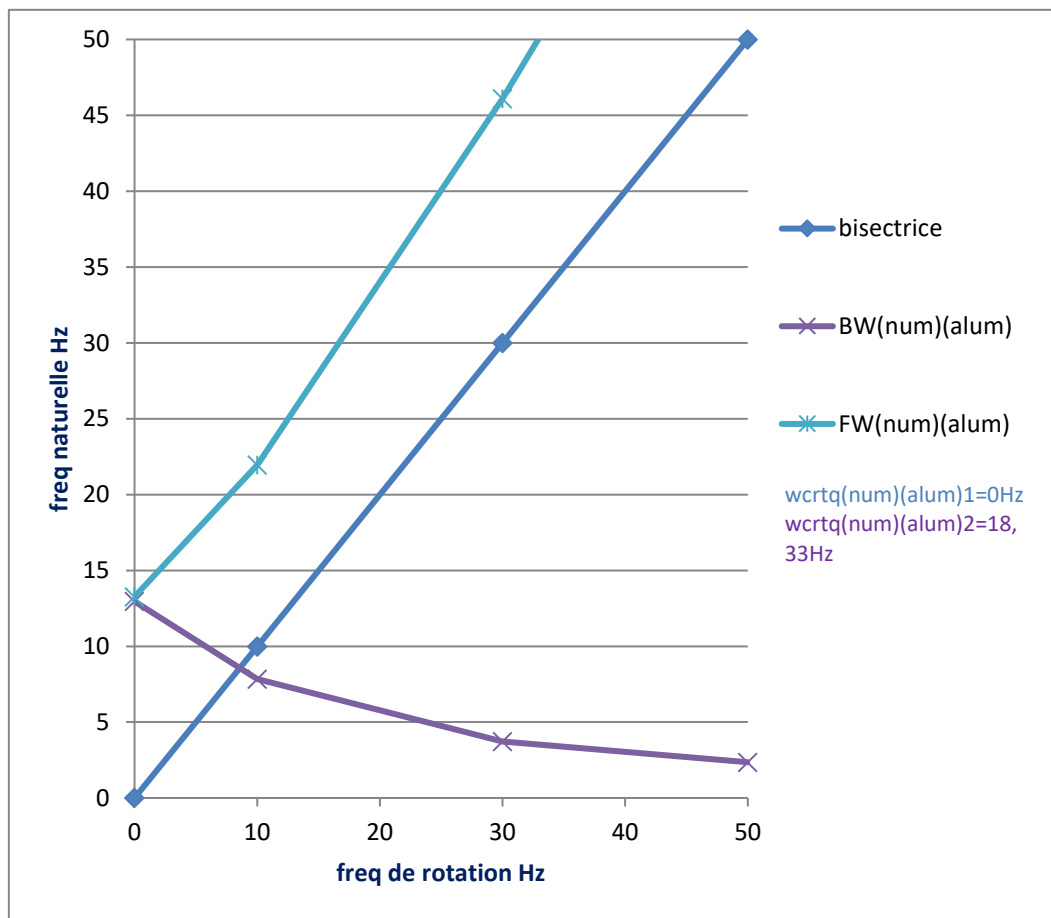


Figure 45 Diagramme de Campbell numérique du rotor en alliage d'aluminium avec des paliers flexibles et amortis.

❖ **Interprétation du quatrième diagramme**

Le graphe ci-dessus est le diagramme de Campbell du rotor à disque flexible en alliage d'Aluminium supporté sur deux paliers flexible. Comme deuxième solution pour augmenter la marge de vitesse critique nous avons proposé le rotor à disque flexible en alliage d'Aluminium posé sur deux paliers flexible avec des valeurs des coefficients d'amortissements identiques égal à 10^{-6} N.S/mm et les valeurs des raideurs identiques égal à 10^{-6} N/mm.

Donc, nous avons trouvé des résultats très satisfaisants pour le cas de précession directe (ou le mode directe FW) car il n'y'a plus d'intersection entre la bissectrice et la courbe de diagramme de Campbell.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire nous avons modélisé un rotor, nous avons effectué une simulation du comportement vibratoire d'un rotor rigide et flexible possédant un disque flexible et rigide.

L'étude a été faite théoriquement et numériquement grâce au logiciel «ANSYS, Workbench», nous avons aussi étudié l'influence de plusieurs paramètres sur la marge de vitesse critique du ce rotor, parmi ces paramètres le matériau du rotor, de l'arbre, du disque et le type des paliers flexible ou rigide. Nous avons constaté que le matériau n'a aucune influence sur l'amélioration de la marge de la vitesse critique, par contre quand nous avons utilisé un palier souple avec des rigidités de l'ordre de 10^{-6} N/mm, et des coefficients d'amortissements de 10^{-6} kg /s, nous avons trouvé des résultats très satisfaisants pour le cas de précession directe (FW) car il n'y'a plus d'intersection entre la bissectrice et la courbe de diagramme de Campbell. Au contraire le mode précession indirecte (BW) ne présente aucune amélioration car la marge de vitesse critique reste quasiment stable.

Ces résultats sont très satisfaisants pour les machines tournantes industrielles, car garce au calcul numérique, nous avons pu augmenter la marge de sécurité de la vitesse critique.