République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Faculté des Sciences et Technologie

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

Chaina Baghdad

Oscillation de la solution d'une équation aux dérivées partielles sur les échelles de temps

---

Encadreur :

Beniani Abderrahmane

Maitre Conférence "A" à U.B.B.A.T.

Soutenu le 13/07/2021

Devant le jury composé de :

Président :	Mami Toufik	M.C.A	U.B.B.A.T
Examinateurs :	Ladrani Fatima	M.C.A	E.N.S.O.
Encadreur :	Beniani Abderrahmane	M.C.A	U.B.B.A.T

Année Universitaire : 2020 – 2021

Table des matières

Dédicaces

Je dédie ce modèste travail à mes chers parents ,

à ma femme,

mes adorables soeurs, et frère ;

à ceux et celles qui m'ont honorés

Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier notre encadreur Mr : Beniani Abderrahman directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

remerciement vont également aux membres du jury Mrs. M.Toufik et Mdm.F.Ladrani pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail, et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublies aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Introduction générale

La théorie des échelle de temps a été introduit par le mathématicien Allemand STEFAN HILGER en 1988 dans sa thèse de doctorat, il a des applications dans tous les domaines nécessitant la modélisation simultanée de données discrètes et continues, où une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un sous-ensemble non vide fermé de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
Beaucoup de résultats que l'on rencontre dans l'étude des équations différentielles et de différence restent valable dans le cas des échelles de temps.
Actuellement,l'étude des équations dynamiques est un champ large dans les mathématiques pures et appliquées sur l'existence et l'unicité des solutions.
Les théorie de l'oscillation est une branche importante de la théorie des équations dynamiques appliquée ,liée á l'étude des phénomènes oscillantes en technologie et sciences naturelles et sociales.
Par exemple en électricité (oscillations libres d'un circuit LC^2) et en chimie (réactions oscillantes ,ondes chimiques), etc.
Ce mémoire se compose de trois chapitres.
• Premier chapitre :
Dans ce chapitre , nous présentons quelques préliminaires concernant les calculs sur les échelles de temps,puis nous introduisons des résultat principaux sur la différentiabilité et l'intégration.
• Deuxième chapitre :
Il s'agit dans ce chapitre d'étudier les critères d'oscillation pour la résolution d'équations dynamiques partielles sur échelles de temps.

- Troisième chapitre :

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux Théorèmes d'oscillation pour la résolution d'équations dynamiques partielles sur échelles de temps et nous étudions le comportement asymptotique de cette équation.

Ces résultats seront illustrés par des exemples.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les échelles de temps et nous présentons également des résultats principaux sur la différentiabilité et l'intégration. De plus, nous définissons la fonction exponentielle sur les échelles de temps, en fin rappelons quelques théorèmes et définitions.
La plupart de ces résultats seront énoncés sans preuve. pour plus de détails on peut consultées [5] et [6].

1.1 La Théorie des échelles de temps

Une échelle de temps est un sous-ensemble fermé non vide de l'ensemble des nombres réels. La théorie des équations dynamiques unifie les théories des équations différentielles et des équations aux différences.

1.1.1 Calculs sur les échelles de temps

Définition 1.1.1. *[5, 6] Une échelle de temps* $\mathbb{T}$ *est un ensemble non vide fermé de l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.1.1. *Les ensembles* $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{N}$ *sont des exemples des échelles de temps.*

Exemple 1.1.2. *Soit* h *un nombre réel positif fixé, on définit l'échelle de temps par* $h\mathbb{Z}$:

$$h\mathbb{Z} := \{hz : z \in \mathbb{Z}\} = \{..., -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h...\}.$$

Exemple 1.1.3. *Soit* q *un nombre réel positif fixé. On définit l'échelle de temps* $\overline{q^{\mathbb{Z}}}$ *par :*

$$\overline{q^{\mathbb{Z}}} = \{q^z : z \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} = \{...q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, q^3, ...\} \cup \{0\}.$$

Exemple 1.1.4. *Les ensembles suivantes :* $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$,$[0,1[$,$]0,1]$ *ne sont pas des échelle de temps.*

Définition 1.1.2. *[5, 6] Soit* $\mathbb{T}$ *une échelle de temps. Pour* $t \in \mathbb{T}$, *on définit l'opérateur de saut-avant* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par*

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} \ : \ s > t\},$$

et l'opérateur de saut-arrière $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par*

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Par convention, on supposera que :

- $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$, *i.e* $\sigma(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un maximum* t, *dense adroite.*

- $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$, *i.e* $\rho(t) = t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un minimum* t.

Définition 1.1.3. *[5, 6] La fonction de granulation* $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ *par*

$$\mu(t) := \sigma(t) - t.$$

Exemple 1.1.5. *Soit* $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *, alors on a :*
$\sigma(0) = 1$, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 4$.
$\sigma(4) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > 4\} = \inf \emptyset = \sup \mathbb{T} = 4.$
$\rho(1) = 0, \rho(2) = 1, \rho(3) = 2, \rho(4) = 3.$
$\rho(0) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < 0\} = \sup \emptyset = \inf \mathbb{T} = 0.$
$\mu(0) = 1 - 0 = 1, \mu(1) = 2 - 1 = 1, \mu(2) = 3 - 2 = 1,$
$\mu(3) = 4 - 3 = 1, \mu(4) = 4 - 4 = 0.$

Les définitions ci-dessus pour l'opérateur de saut avant et l'opérateur de saut arrière prêtent à la classifications des points dans une échelle de temps.

Définition 1.1.4. *[5, 6] Soit $\mathbb{T}$ échelle de temps, $t \in \mathbb{T}$. On dira que :*

1. *Si $\sigma(t) > t$, on dit que t est un point dispersé à droite.*
2. *Si $\sigma(t) = t$ et $t < \sup \mathbb{T}$, on dit que t est un point dense à droite.*
3. *Si $\rho(t) < t$, on dit que t est un point dispersé à gauche.*
4. *Si $\rho(t) = t$ et $t > \inf \mathbb{T}$, on dit que t est un point dense à gauche.*
5. *Si un point est dispersé à droite et à gauche,(i.e $\rho(t) < t < \sigma(t)$), on dit qu'il est isolé.*
6. *Si un point est dense à droite et à gauche (i.e $t = \sigma(t) = \rho(t)$), on dit qu'il est dense.*

Exemple 1.1.6. *Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps, $t \in \mathbb{T}$.*

· *Si $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on a $\sigma(t) = \rho(t) = t$ et $\mu(t) = 0$, donc, chaque point de $\mathbb{R}$ est dense.*

· *Si $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, avec $h > 0$, alors*

$$\sigma(t) = t + h, \quad \rho(t) = t - h, \quad \mu(t) = h.$$

Donc, chaque point de $h\mathbb{Z}$ est isolé.

Table 1.1 – Exemple d'échelles de temps

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	0	t	t
$\mathbb{Z}$	1	$t+1$	$t-1$
$h\mathbb{Z}$	h	$t+h$	$t-h$
$q^{\mathbb{N}}$	$(q-1)t$	qt	$\frac{t}{q}$
$2^{\mathbb{N}}$	t	$2t$	$\frac{t}{2}$

Définition 1.1.5. *[5, 6] Soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps.*

• *Si $\mathbb{T}$ admet un maximum M dispersé à gauche, alors on pose $\mathbb{T}^k := \mathbb{T} - \{M\}$, sinon $\mathbb{T}^k := \mathbb{T}$.*

• *Si $\mathbb{T}$ admet un minimum m dispersé à droit, alors on pose $\mathbb{T}_k := \mathbb{T} - \{m\}$, sinon $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.*

Définition 1.1.6. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction, on définit la fonction $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :*

$$f^\sigma(t) := (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

1.1.2 Différentiabilité sur les échelles de temps

Maintenant nous considérons une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et on définit la delta dérivée de f en un point $t \in \mathbb{T}^k$ de la façon suivante.

Définition 1.1.7. *[5, 6] Soientt $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$. On dit que f est Δ-différentiable en t s'il existe un nombre réel $f^{\Delta}(t) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de t (i.e, $\mathcal{U} = (t-\delta, t+\delta) \bigcap \mathbb{T}$ pour certain $\delta > 0$) tel que*

$$|f^{\sigma}(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \qquad \textit{pour tout } s \in \mathcal{U}.$$

On appelle $f^{\Delta}(t)$ la Δ-dérivée de f en t.
Si f est Δ-différentiable en tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ est appelée la Δ-dérivée de f sur $\mathbb{T}^k$.

Rappelons quelques propriétés de la delta dérivée qui sont utilisées dans ce travail.

Théorème 1.1.1. *[5, 6] Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction et $t \in \mathbb{T}^k$.*

1. *Si f est Δ-différentiable en t, alors f est continue en t.*
2. *Si t est dispersé à droite et f est une fonction continue en t, alors f est différentiable en t et*
$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$
3. *Si t est dense à droite alors f est Δ-différentiable en t, si seulement si $\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ existe et finie. Dans ce cas on a*
$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$
4. *Si f est différentiable en t, alors*
$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Théorème 1.1.2. *[5, 6] Soient f, g :$\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonction Δ-différentiables en $t \in \mathbb{T}^k$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *$f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et*

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

2. *Pour tout constante $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et*

$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

3. *$f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t et*

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) \\ &= f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)). \end{aligned}$$

4. *Si $f(t)f^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est Δ-différentiable en t et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

5. *Si $g(t)g^{\sigma}(t) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est Δ-différentiable en t et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Exemple 1.1.7. *Soit $f(t) = t^2$, la dérivée de f est :*
$f^{\Delta}(t) = t + \sigma(t) = 2t + \mu(t)$.
• *Si$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alors $\mu(t) = 0$ et on trouve $f^{\Delta}(t) = 2t = f'(t)$.*
• *Si$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alors $\mu(t) = 1$ et on a $f^{\Delta}(t) = 2t + 1$.*
• *Si$\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ tel que h>0 alors $\mu(t) = h$ et on a $f^{\Delta}(t) = 2t + h$.*

Enfin, nous présentons la propriété de la composée $(f \circ g)^{\Delta}$, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Elle a été démontrée par Christian Pötzsche en 1988.

Théorème 1.1.3. *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction Δ-différentiable.*
Alors $f \circ g$ est Δ-différentiable et on a la formule suivante :

$$[f \circ g]^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t) \left[\int_0^1 f' \left[hg(t) + (1-h) g^{\sigma}(t) \right] dh \right].$$

1.1.3 Intégration sur les échelles de temps

Pour introduire la notion de la Δ-intégrabilité sur les échelles de temps, nous avons besoin tout d'abord de décrire les fonctions qui sont intégrables et pour cela nous présentons les concepts suivants :

Définition 1.1.8. *[5, 6] Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est **régulière** si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Théorème 1.1.4. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, alors il existe une fonction F qui est **pré-différentiable** avec de domaine $\mathcal{D}$ telle que :*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathcal{D}.$$

Toute fonction F s'appelle pré-antidérivée de f.

Définition 1.1.9. *[5, 6] Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, on définit l'intégrale indéfinie par :*

$$\int f(t)\Delta t := F(t) + C,$$

où C est une constante arbitraire et F est la primitive de f.

Définition 1.1.10. *[5, 6] Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, on définit l'intégrale de Cauchy par*

$$\int_a^b f(t)\Delta t := F(b) - F(a), \qquad \textit{pour tout } a, b \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.1.11. *[5, 6] La fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelée antidérivée de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, si*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.1.12. *[5, 6] Une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*
On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-continue sur $\mathbb{T}$ par :

$$\mathcal{C}_{rd} = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable et ses dérivées rd-continue sur $\mathbb{T}^k$ par :

$$\mathcal{C}^1_{rd} = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

Théorème 1.1.5 (Existence d'Antidérivées[5, 6])**.** *Chaque fonction rd-continue a une antidérivée. En particulier si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors F défini par :*

$$F(t) := \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

est une antidérivée de f.

Théorème 1.1.6. *[5, 6] Soient $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, on a :*

1. *Si f est continue, alors f est rd-continue.*
2. *Si f est rd-continue, alors f est régulière.*
3. *L'opérateur de saut avant σ est rd-continue.*
4. *Si f est rd-continue ou régulière, alors $f \circ \sigma$ c'est ainsi.*
5. *Si f est continue et g est rd-continue ou régulière, alors $f \circ g$ est également rd-continue ou régulière respectivement.*

Le théorème suivant fournit plusieurs propriétés élémentaires de la delta intégrale.

Théorème 1.1.7. *[5, 6] Si $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors*

1. $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(t) + g(t)]\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$

4. $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t.$

5. $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$

6. Si $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a,b) \cap \mathbb{T}$, *alors*

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t.$$

7. Si $f(t) \geq 0$, *pour tout* $a \leq t \leq b$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$

8. Pour tout $t \in \mathbb{T}$, *alors* $\displaystyle\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta(\tau) = \mu(t)f(t).$

1.1.4 L'intégrale de Lebesgue sur les échelles de temps

Dans cette section, , nous définissons une théorie de la mesure et l'intégration pour définir la Δ-mesure et la Δ-intégrabilité sur les échelles de temps $\mathbb{T}$ bornées où $a := \min \mathbb{T}$ et $b := \max \mathbb{T}$.

Définition 1.1.13. *[8] Soit $\mathcal{F}_1$ une famille d'intervalles fermés à gauche et ouverts à droite de $\mathbb{T}$ de la forme*

$$[c,d) = \{t \in \mathbb{T} : c \leq t < d\}.$$

où $c, d \in \mathbb{T}$ et $c \leq d$.

Définition 1.1.14. *[8] On définit une mesure additive $m_1 : \mathcal{F}_1 \to \mathbb{R}$ par*

$$m_1([c,d)) = d - c.$$

Une mesure extérieure $m_1^* : \mathcal{P}(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ est définie par :
pour un ensemble arbitraire $E \subset \mathbb{T}$

$$m_1^*(E) = \begin{cases} \inf\left\{\sum_{k=1}^{k=n} m(A_k) : E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{k=m} A_k \ \textit{avec}\ A_k \in \mathcal{F}_1\right\} & si \quad b \notin E, \\ +\infty & si \quad b \in E. \end{cases}$$

Définition 1.1.15. *[8] Un ensemble $A \subset T$ est Δ-mesurable si la relation*

$$m_1^*(E) = m_1^*(E \cap A) + m_1^*(E \cap (\mathbb{T} \backslash A)),$$

est vérifiée pour tout ensemble $E \subset \mathbb{T}$.

Maintenant, on considère la famille

$$\mathcal{M}(m_1^*) = \{A \subset \mathbb{T} : A \text{ est } \Delta - \text{mesurable}\},$$

et la mesure μ_Δ comme étant la restriction de m_1^* sur l'ensemble $\mathcal{M}(m_1^*)$.

Nous présentons plusieurs concepts de la mesure générale et de l'intégration, appliqués à l'espace mesurable complet avec le triplet $(\mathbb{T}, \mathcal{M}(m_1^*), \mu_\Delta)$. Cet espace mesuré est utilisé pour définir la Δ-mesurabilitéé et la Δ-intégrabilité des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

Lemme 1.1.1. *[8] L'ensemble de tous les points dispersés à droit de $\mathbb{T}$ est dénombrable, c'est-à-dire, il existe $I \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$ tels que*

$$\mathcal{R} := \{t \in \mathbb{T} : \sigma(t) > t\} = \{t_i\}_{i \in I}. \tag{1.1}$$

Pour $E \subset \mathbb{T}$, nous définissons

$$I_E := \{i \in I : t_i \in E \cap \mathcal{R}\},$$

avec $I \subset \mathbb{N}$ et $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$.

Voici une correspondance intéressante qui existe entre la mesure μ_Δ sur $\mathbb{T}$ et la mesure de Lebesgue μ_L sur $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.8. *[8] Soit $A \subset \mathbb{T}$. Alors A est Δ-mesurable si et seulement si A est mesurable pour la mesure de Lebesgue. Dans ce cas, si $b \notin A$, nous avons la propriété suivante*

$$\mu_\Delta(A) = \sum_{i \in I_E} (\sigma(t_i) - t_i) + \mu(A).$$

Définition 1.1.16. *Soit une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, nous avons besoin d'une fonction auxiliaire qui prolonge $\widetilde{f}$ à l'intervalle $[a, b]$, $\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$\widetilde{f}\,(t) := \begin{cases} f\,(t) & si\ t \in \mathbb{T}, \\ f\,(t_i) & si\ t \in (t_i, \sigma\,(t_i))\ ,\ pour\ i \in I. \end{cases} \tag{1.2}$$

Proposition 1.1.1. *[8] Soient $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ et $\widetilde{f}$ son extention sur $[a, b]$. Alors, f est $\Delta-$mesurable si et seulement si, $\widetilde{f}$ est mesurable au sens de Lebesgue.*

Théorème 1.1.9. *[8] Soient $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble $\Delta-$mesurable tel que $b \notin E$ et $\widetilde{E} = E \cup (\cup_{i \in I_E}(t_i, \sigma(t_i)))$. Si $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction $\Delta-$ intégrable, alors*

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_E f(s)ds + \sum_{i \in I_E} \mu\,(t_i)\, f\,(t_i)\,.$$

Définition 1.1.17 (Espace de Lebesgue sur les échelles de temps)**.** *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et soit $E \subseteq \mathbb{T}$ un ensemble Δ-mesurable ; on pose*

$$L^p_\Delta\,(E, \mathbb{R}) := \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{R};\ f\ est\ \Delta - mesurable\ et\ \int_E |f|^p\,\Delta t < \infty \right\}.$$

On note la norme sur $L^p_\Delta\,(E, \mathbb{R})$

$$\|f\|_{L^p_\Delta(E,\mathbb{R})} := \left(\int_E |f\,(t)|^p\,\Delta t \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.1.5 Fonction exponentielle

Définition 1.1.18. *[12] Soit $h > 0$, on définit les nombres complexes de Hilger par :*

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{h} \right\}.$$

et l'axe imaginaire de Hilger

$$\mathbb{Z}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} \leq Imz \leq \frac{\pi}{h} \right\}.$$

Pour $h = 0$, on pose par définition $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Définition 1.1.19. *[12] On dit que la fonction $P : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est régressive si*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \qquad \textit{pourtout} \qquad t \in \mathbb{T}^k.$$

On note l'espace des fonctions rd-continues régressives par :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

On munit cet ensemble de l'addition définie pour tous $p, q \in \mathcal{R}$ par :

$$(p \bigoplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t); \qquad \textit{pourtout} \quad t \in \mathbb{T}^k$$

Le groupe $(\mathcal{R}, \bigoplus)$ est dit groupe régressif. Le conjugué de chaque élément p du groupe $\mathcal{R}$ noté par $\ominus p$ est donnée par :

$$(\ominus p)(t) = \frac{-p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}, \qquad \textit{pourtout} \quad t \in \mathbb{T}^k$$

Définition 1.1.20. *[12] On munit $\mathcal{R}$ de soustraction définie pour tous $p, q \in \mathcal{R}$ par : $(p \ominus q)(t) = (p \bigoplus (\ominus q))(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}^k$.*
Pour $p, q \in \mathcal{R}$ nous avons :

$$\begin{aligned} p \ominus q &= p \bigoplus (\ominus q) \\ &= \frac{p - q}{1 + \mu q}. \end{aligned}$$

Théorème 1.1.10. *[12] Soient $p, q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, alors :*

1. $p \ominus p = 0$.
2. $\ominus(\ominus p) = p$.
3. $p \ominus q \in \mathcal{R}$.
4. $\ominus(p \ominus q) = q \ominus p$.
5. $\ominus(p \bigoplus q) = (\ominus p) \bigoplus (\ominus q)$.
6. $p \bigoplus \dfrac{q}{1 + \mu p} = p + q$.

Définition 1.1.21. *[12] Pour $h \geq 0$, la transformation cylindrique $\xi_h : \mathbb{C}_h \longrightarrow \mathbb{Z}_h$ est définie par :*

$$\xi_h(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{h}\ln(1+hz) & si\ h > 0, \\ z & si\ h = 0. \end{cases}$$

L'inverse de transformation cylindrique $\xi_h^{-1} : \mathbb{Z}_h \longrightarrow \mathbb{C}_h$ est définie par :

$$\xi_h^{-1}(z) := \begin{cases} \dfrac{\exp(hz)-1}{h} & si\ h > 0, \\ z & si\ h = 0. \end{cases}$$

Définition 1.1.22. *[12] Soit $p \in \mathcal{R}$, la fonction exponentielle généralisée*

$$e_p : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est donnée par la formule :

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta(\tau)\right),$$

pour tout $t, s \in \mathbb{T}$.

Théorème 1.1.11. *[12] Soient $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ et $t_0 \in \mathbb{T}$. Alors la solution unique du problème a valeur initiale*

$$\begin{cases} y^{\Delta}(t) = p(t)y(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

est donné par y(t)=$y_0 e_{p(t)}(t, t_0)$.

Proposition 1.1.2. *[12] Soient $p, q \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, et $s, t, \tau \in \mathbb{T}^k$,la fonction exponentielle généralisée de l'échelle de temps vérifie les propriétés suivantes :*

1. $e_p(t,s) = e_p(t,\tau)e_p(\tau,s)$(*Propriété de semi-groupe*).
2. $e_p^{\sigma}(t,s)e_p(\sigma(t),s) = (1+\mu(t)p(t))e_p(t,s)$.
3. $e_p(s,t) = \dfrac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t,s)$.
4. $e_p(t,s)e_q(t,s) = e_{p\oplus q}(t,s)$.
5. $\dfrac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p\ominus q}(t,s)$.
6. $(e_p(.,s))^{\Delta}(t) = p(t)e_p(t,s)$ ($e_p(.,s)$ *est* Δ*-différentiable en t*) .

Exemple 1.1.8. *Soit $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ pour $h > 0$: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante, i.e.*

$$\alpha \in \mathbb{C} - \left\{-\frac{1}{h}\right\}.$$

Tous les point dans l'échelle de temps $h\mathbb{Z}$ sont dispersés á droite et nous avons

$$\begin{aligned} e_p(t,0) &= \exp\left(\tfrac{1}{h}\int_0^t \ln(1+\alpha h)\Delta\tau\right) \\ &= \exp\tfrac{1}{h}\ln(1+\alpha h)t \\ &= (1+hz)^{\frac{t}{h}} \end{aligned}$$

1.1.6 Polynômes généralisés

Définition 1.1.23. *Soit $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions $h_k : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$h_k(t,s) := \begin{cases} 1 & si\ k = 0, \\ \displaystyle\int_s^t h_{k-1}(\tau,s)\Delta(\tau) & si\ k \geq 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Exemple 1.1.9. *pour $k = 1$*

$$h_1(t,s) := \int_s^t h_0(\tau,s)\Delta(\tau) = \int_s^t 1\Delta(\tau) = t - s.$$

pour une échelle de temps $\mathbb{T}$ quelconque.

Exemple 1.1.10. *Si $\mathbb{T} = [0,1] \bigcup [3,4]$, on trouve que :*

$$h_0(t,0) = 1,$$

$$h_1(t,0) := \begin{cases} t & si\ 0 \leq t \leq 1, \\ t-2 & si\ 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

$$h_2(t,0) := \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & si\ 0 \leq t \leq 1, \\ \dfrac{t^2}{2} - 2 & si\ 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

$$h_3(t,0) := \begin{cases} \dfrac{t^3}{6} & si\ 0 \leq t \leq 1, \\ \dfrac{t^3}{6} - 2t + \dfrac{8}{3} & si\ 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Nous considérons également les monômes de Taylor $g_k : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, qui sont définis de manière récursive.

Définition 1.1.24. *Soit $k \in \mathbb{N}$, on définis les fonctions $g_k : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :*

$$g_k\,(t,s) := \begin{cases} 1 & si\ k = 0, \\ \displaystyle\int_s^t g_{k-1}(\sigma(\tau), s)\Delta(\tau) & si\ k \geq 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2 Théorie de l'oscillation

Ces dernières années, il y a eu un intérêt croissant pour étudier l'oscillation et non oscillation des solutions d'équations dynamiques sur des échelles de temps .
Son objectif principal est de présenter quelques concepts de base de la théorie des oscillations des équations différentielles et d'esquisser quelques résultats préliminaires qui seront utilisés tout au long de ce mémoire.

1.2.1 Fonction éventuellement positive

Définition 1.2.1. *[19] Une fonction $f : [a; +\infty\,)_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite éventuellement positive , s'il existe $t_0 \in [a; +\infty\,)_{\mathbb{T}}$ tel que : $f(t) > 0$ pour tout $t \in [t_0; +\infty\,)_{\mathbb{T}}$.*

1.2.2 Fonction éventuellement négative

Définition 1.2.2. *[19]*

Une fonction $f : [a; +\infty)_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite éventuellement négative , s'il existe $t_0 \in [a; +\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que : $f(t) < 0$ pour tout $t \in [t_0; +\infty)_{\mathbb{T}}$.

1.2.3 Fonction et équation oscillante

Définition 1.2.3. *On dit qu'une fonction $f : [a; +\infty\,)_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}$ est oscillante sur $[a; +\infty\,)$ si elle ni éventuellement positive ni éventuellement négative, c'est á dire pour $T \in [a; +\infty\,)$ assez grand , l'équation $f(t) = 0$ admet une infinité des zéros au voisinage de l'infini sur $T \in [a; +\infty\,)$. Elle est dite non oscillante dans le cas contraire.*

Définition 1.2.4. *On dit que l'équation différentielle est oscillante si et seulement si toute solution de l'équation est oscillante.*

Exemple 1.2.1. *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$x^{''}(t) - x(-t) = 0$$

cette équation admet une solution oscillante $x_1(t) = \sin(t)$ *et une solution non oscillante* $x_2(t) = e^t + e^{-t}$.

Lemme 1.2.1. *[17] Soient* A , λ , B *des constants strictement positives .*
Nous avons alors l'intégralité suivante

$$Bx - Ax^{1+\frac{1}{\lambda}} \leq \frac{\lambda^\lambda B^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^{\lambda+1} A^\lambda} \quad \textit{pour } x \geq 0. \tag{1.5}$$

Chapitre 2

Critères d'oscillation pour la résolution d'équations dynamiques partielles sur échelles de temps

2.1 introduction

La théorie des oscillations est une branche importante de la théorie appliquée des équations dynamiques liées à l'étude des phénomènes oscillatoires en technologie et en sciences naturelles et sociales.
Par exemple en physique (la théorie des dynamiques des fluides en astrophysique).
Dans ce chapitre, nous étudions l'oscillation de toute solution de l'équation dynamique partielle de la forme :

$$\left(\alpha\left(t\right)y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t}+p(x,t)y(x,t)=\beta(t)\nabla_x^2 y\left(x,t\right)\quad (x,t)\in G\times[t_0,\infty)_{\mathbb{J}}\,,\quad (2.1)$$

pour tous $(x,t)\in\partial G\times[t_0,\infty)_{\mathbb{J}}$,
avec la condition aux limites de Neumann

$$y_N\left(x,t\right)=0,\qquad \text{pour tout }\ (x,t)\in\partial G\times[t_0,\infty)_{\mathbb{J}}\,,\quad (2.2)$$

ou la condition aux limites de Dirichlet

$$y\left(x,t\right)=0,\qquad \text{pour tout }\ (x,t)\in\partial G\times[t_0,\infty)_{\mathbb{J}}\,.\quad (2.3)$$

soit G un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière par morceaux ∂G , Δ_t est l'opérateur dynamique partiel par rapport à t , $\nabla_x^2 y = \sum_{i=1}^{i=n} \partial_{x_i x_i}^2 y$, et N est le vecteur normal extérieur unitaire à ∂G . Les coefficients $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont des fonctions rd -continues et réelles sur $[0, \infty)_{\mathbb{J}}$, $\alpha(t)$ est positive et delta dérivable avec $\alpha(t)^{\Delta_t}$ continue, $p \in C\left(G \times [t_0, \infty)_{\mathbb{J}}, \mathbb{R}\right)$.

Définition 2.1.1. *Soit $f : \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \times ... \times \mathbb{T}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $t = (t_1, t_2, ..., t_i, ..., t_n) \in \mathbb{T}^k$. Définissez ensuite $f^{\Delta_i}(t)$ comme étant le nombre (à condition qu'il existe), avec la propriété que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage U de t_i avec $U = (t_i - \delta, t_i + \delta) \cap \mathbb{T}_i$ pour $\delta > 0$ tel que*

$$\left|\left[f\left(t_1, ..., \sigma(t_i), ...t_n\right) - f(t_1, ..., s, ...t_n)\right] - f^{\Delta_i}(t)\left[\sigma(t_i) - s\right]\right| \leq \epsilon \left|\sigma_i(t) - s\right|$$

pour tout $s \in U$.
On désigne par f^{Δ_i} la Δ dérivée partielle de f en t par rapport à la variable t_i.
Par une solution (classique) de (2.1), on définit une fonction $y(x,t) : G \times [t_0, \infty)_{\mathbb{J}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $y, y^{\Delta_t}, (y^{\Delta_t})^{\Delta_t}, \partial_{x_i} y$, et $\partial_{x_i, x_j}^2 y$ sont continues sur $\overline{G} \times [t_0, \infty)_{\mathbb{J}} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $i, j \in 1, ...n$. La solution doit également satisfaire (2.1) avec la condition aux limites (2.2) ou (2.3).

Définition 2.1.2. *La fonction $y(x,t)$ est dite éventuellement positive (éventuellement négative) si il existe $t_1 \geq t_0$ tel que $y \geq 0$ et $\int_G y dx > 0$ pour tout $t \geq t_1$ (resp.$y \leq 0$ et $\int_G y dx < 0$ pour tout $t \geq t_1$)*

2.2 Oscillation avec condition aux limites de Neumann

Supposons que

$$P(t) := \min_{x\in G} p(x,t) \geq 0. \tag{2.4}$$

Lemme 2.2.1. *Soit $y(x,t)$ une solution éventuellement positive de l'équation (2.1),(2.2). Alors il existe $t_1 \geq t_0$ tel que $Y(t) := \int_G y dx > 0$ et*

$$\left(\alpha\left(t\right)Y^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} + P(t)Y(t) \leq 0 \qquad \forall t \geq t_1, \tag{2.5}$$

également si $y(x,t)$ une solution éventuellement négative alors $Y(t) < 0$ et

$$(\alpha(t)Y^{\Delta}(t))^{\Delta} + P(t)Y(t) \geq 0 \quad \forall t \geq t_1, \tag{2.6}$$

Démonstration. D'après la définition de la fonction éventuellement positive, il existe $t_1 \geq t_0$ tel que $Y > 0$ pour $t \geq t_1$
nous avons

$$\left(\alpha\left(t\right)y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} + p(x,t)y(x,t) = \beta(t)\nabla_x^2 y\left(x,t\right).$$

Par intégration de la dernière égalité sur G, nous obtenons

$$\int_G \left(\alpha\left(t\right)y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} dx + \int_G p(x,t)y(x,t)dx = \beta(t)\int_G \nabla_x^2 y\left(x,t\right)dx, \tag{2.7}$$

d'après le théorème de Green et (2.2) on a

$$\int_G \nabla_x^2 y\left(x,t\right)dx = \int_{\partial G} \frac{\partial y(x,t)}{\partial N} dS = 0. \tag{2.8}$$

Alors

$$\int_G \left(\alpha\left(t\right)y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} dx + \int_G p(x,t)y(x,t)dx = 0,$$

on a les conditions du théorème [5],[Théorème 1.117] sont satisfait alors en peut dire que

$$\left(\int_G y(x,t)dx\right)^{\Delta_t} = \int_G y^{\Delta_t}(x,t)dx.$$

Par conséquent,

$$\left(\int_G \alpha\left(t\right) y^{\Delta_t}\left(x,t\right) dx\right)^{\Delta_t} + p(x,t)\int_G y(x,t)dx = 0,$$

nous obtenons

$$\left(\alpha\left(t\right) Y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} + P(x,t)Y(x,t) \leq 0. \quad pour t \geq t_1.$$

Donc la formule (2.5) est vérifiée. □

Lemme 2.2.2. *Supposons que y est une solution éventuellement positive de (2.1)-(2.2) et $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)}\Delta t = \infty$. Si $Y(t) := \int_G ydx > 0$ et $t_1 \geq t_0$, Alors*

$$0 \leq Y^{\Delta}(s), \qquad 0 \leq \frac{Y^{\Delta}(s)}{Y(s)} \leq \frac{1}{\alpha(s)\int_{t_1}^{s}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v} \qquad \forall s \geq t_1. \tag{2.9}$$

Démonstration. De (2.5) on obtient

$$\left(\alpha\left(t\right) Y^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} \leq -P(t)Y(t) \qquad \forall t \geq t_1,$$

comme $P(t) \geq 0$ et $Y(t) > 0$ nous avons

$$\left(\alpha\left(t\right) Y^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} \leq -P(t)Y(t) \leq 0 \qquad \forall t \geq t_1. \tag{2.10}$$

Montrons que

$$0 \leq Y^{\Delta}(s); \qquad pour\ tout\ t \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}\,.$$

En effet on suppose le contraire c'est-a-dire, il existe $t_2 \in [t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ tel que

$$Y^{\Delta}(s) < 0.$$

Puisque la fonction $\alpha(t)Y^{\Delta}(t)$ est une fonction décroissante sur $[t_1,\infty)_{\mathbb{T}}$ alors il existe une constante $c < 0$, tel que $c = \alpha(t)Y^{\Delta}(t)$ d'où

$$Y^{\Delta}(t_2) < \frac{c}{\alpha(t_2)}.$$

Par intégration entre t_2 à t, on trouve

$$\int_{t_2}^{t} Y^{\Delta}(s)\Delta s \leq \int_{t_2}^{t} \frac{c}{\alpha(s)}\Delta s,$$

d'où

$$Y(t) = Y(t2) + \int_{t_2}^{t} Y^{\Delta}(s)\Delta s \leq Y(t_2) + c\int_{t_2}^{t} \frac{1}{\alpha(s)}\Delta s.$$

lorsque t tend vers $+\infty$ la partie droit de l'intégrale

$$Y(t_2) + c\int_{t_2}^{t} \frac{1}{\alpha(s)}\Delta s \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty.$$

D'où la contradiction, car $Y(t) := \int_G ydx > 0$ pour $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$.

Alors $c \geq 0$ on divise par $\alpha(t)$ on trouve $\dfrac{\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{\alpha(t)} \geq 0$ alors $Y^{\Delta}(t) \geq 0$, on obtient la partie gauche de l'inégalité (2.9)

On a Y est positive et puisque la fonction αY^{Δ} est décroissante

$$Y(t) \geq Y(t) - Y(t_1) = \int_{t_1}^{t} \frac{\alpha(v)Y^{\Delta}(v)}{\alpha(v)}\Delta v \geq \alpha(t)Y^{\Delta}(t)\int_{t_1}^{t} \frac{1}{\alpha(v)}\Delta v, \forall t > t_1.$$

Divisons par $Y(t) > 0$ nous obtenons

$$1 \geq 1 - \frac{Y(t_1)}{Y(t)} = \frac{1}{Y(t)}\int_{t_1}^{t} \frac{\alpha(v)Y^{\Delta}(v)}{\alpha(v)}\Delta_v \geq \frac{\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{Y(t)}\int_{t_1}^{t} \frac{1}{\alpha(v)}\Delta v, \forall t > t_1.$$

Divisons encore par $\alpha(t)\int_{t_0}^{t} \dfrac{1}{\alpha(s)}\Delta s > 0$, nous obtenons la partie droit de l'inégalité (2.9).

$$\frac{1}{Y(t)\alpha(t)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}\int_{t_1}^{t} \frac{\alpha(v)Y^{\Delta}(v)}{\alpha(v)}\Delta v \geq \frac{\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{Y(t)\alpha(t)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}\int_{t_1}^{t} \frac{1}{\alpha(v)}\Delta v, \forall t > t_1.$$

ce qui implique que

$$\frac{Y^{\Delta}(t)}{Y(t)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}\int_{t_1}^{t} \frac{1}{\alpha(v)}\Delta v \leq \frac{1}{\alpha(s)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}, \forall t > t_1.$$

Ainsi

$$\frac{Y^{\Delta}(t)}{Y(t)}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v \leq \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}, \forall t > t_1.$$

D'où , on obtient (2.9)

$$\frac{Y^{\Delta}(t)}{Y(t)} \leq \frac{1}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_1}^{s}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v}, \forall s > t_1.$$

□

Lemme 2.2.3. *Supposons que y est une solution éventuellement négative de (2.1)-(2.2) et $\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{\alpha(t)}\Delta t = \infty$. Si $Y(t) := \int_G y dx < 0$ et $t_1 \geq t_0$, alors*

$$Y^{\Delta}(s) \leq 0, \qquad 0 \leq \frac{Y^{\Delta}(s)}{Y(s)} \leq \frac{1}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_1}^{s}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v} \qquad \forall s \geq t_1. \tag{2.11}$$

Théorème 2.2.1. *Supposons que $\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{\alpha(t)}\Delta t = \infty$ et soit*

$$I(t) = \frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)P(t)}{1+\dfrac{\mu(t)}{\alpha(t)\displaystyle\int_{t_0}^{s}\frac{1}{\alpha(\tau)}\Delta\tau}} - \frac{\alpha(t)e_{\gamma}^2(t,t_0)\gamma^2(t)}{4e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)}\left(1+\frac{\mu(t)}{\alpha(t)\int_{t_0}^{s}\frac{1}{\alpha(\tau)}\Delta\tau}\right). \tag{2.12}$$

S'il existe $\gamma \in \omega^{+}$ tel que

$$\lim_{t\to\infty}\sup\int_{t_0}^{t}I(s)\Delta s = \infty. \tag{2.13}$$

Alors toute solution de (2.1)-(2.2) est oscillante

Démonstration. Supposons le contraire, c'est-a-dire l'équation (2.1) admet une solution Y non oscillante. Alors Y est éventuellement positive ou éventuellement négative, on prouve le théorème pour le premier cas.

On définit Y dans le Lemme 2.2.1 et en utilisant la transformation de Ricatti . Supposons que

$$w(t) = e_{\gamma}(t,t_0)\frac{\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{Y(t)}.$$

D'après les Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, $Y > 0$ et $Y^{\Delta} \geq 0$, alors $w(t) \geq 0$ pour $t \geq t_1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) &= e_{\gamma}^{\Delta}(t,t_0)\left(\frac{\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{Y(t)}\right) + e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)\left(\frac{\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{Y(t)}\right)^{\Delta} \\ &= \gamma(t)e_{\gamma}(t,t_0)\left(\frac{\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{Y(t)}\right) + e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)\left(\frac{(\alpha(t)Y^{\Delta}(t))^{\Delta}Y(t) - Y(t)^{\Delta}\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{Y(\sigma(t))Y(t)}\right) \\ &= \gamma(t)w(t) + \frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)(\alpha(t)Y^{\Delta}(t))^{\Delta}}{Y(\sigma(t))} - \frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)\alpha(t)(Y^{\Delta}(t))^2}{Y(\sigma(t))Y(t)} \end{aligned}$$

Par la définition de w , on obtient

$$Y^{\Delta}(t) = \frac{w(t)Y(t)}{\alpha(t)e_{\gamma}(t,t_0)}$$

On remplace le carre de $Y^{\Delta}(t)$ dans la dernière formule,on obtient

$$w^{\Delta}(t) = \gamma(t)w(t) + \frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)(\alpha(t)Y^{\Delta}(t))^{\Delta}}{Y(\sigma(t))} - \frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)\alpha(t)(\frac{w(t)Y(t)}{\alpha(t)e_{\gamma}(t,t_0)})^2}{Y(\sigma(t))Y(t)}$$

Par conséquent ,

$$w^{\Delta}(t) = -\frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)Y(t)}{\alpha(t)e_{\gamma}^2(t,t_1)Y(\sigma(t))}w(t)^2 + \gamma(t)w(t) + \frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)(\alpha(t)Y^{\Delta}(t))^{\Delta}}{Y(\sigma(t))}$$

En utilisant l'inégalité, $Bx - Ax^2 \leq \frac{B^2}{4A}$, nous avons

$$-\frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)Y(t)}{\alpha(t)e_{\gamma}^2(t,t_1)Y(\sigma(t))}w(t)^2 + \gamma(t)w(t) \leq \frac{\gamma(t)^2}{4\left(-\frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)Y(t)}{\alpha(t)e_{\gamma}^2(t,t_1)Y(\sigma(t))}\right)} \tag{2.14}$$

Alors

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) = \quad & -\frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)Y(t)}{\alpha(t)e_{\gamma}^2(t,t_1)Y(\sigma(t))}w(t)^2 + \gamma(t)w(t) + \frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)(\alpha(t)Y^{\Delta}(t))^{\Delta}}{Y(\sigma(t))} \\ & -\frac{\alpha(t)e_{\gamma}^2(t,t_0)Y(\sigma(t))}{4e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)Y(t)}\gamma^2(t) + \frac{\alpha(t)e_{\gamma}^2(t,t_0)Y(\sigma(t))}{4e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)Y(t)}\gamma^2(t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

En utilisant (2.14) et (2.10) nous obtenons

$$w^{\Delta}(t) \leq \frac{\alpha(t)e_{\gamma}^{2}(t,t_0)Y(\sigma(t))}{4e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)Y(t)}\gamma^{2}(t) - \frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)P(t)Y(t)}{Y(\sigma(t))}$$

Donc par (2.9) ,nous obtenons

$$Y^{\Delta}(t) = \frac{Y(\sigma(t)) - Y(t)}{\mu(t)},$$

Ce qui donne

$$\frac{Y(\sigma(t))}{Y(t)} = 1 + \frac{\mu(t)Y^{\Delta}(t)}{Y(t)} \leq 1 + \frac{\mu(t)}{\alpha(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}.$$

Alors

$$w^{\Delta}(t) \leq \frac{\alpha(t)e_{\gamma}^{2}(t,t_0)\gamma^{2}(t)}{4e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)}\left(1 + \frac{\mu(t)}{\alpha(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}\right) - \frac{e_{\gamma}(\sigma(t),t_0)P(t)}{1 + \frac{\mu(t)}{\alpha(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}} = -I(t).$$

Où $I(t)$ défini par (2.12).En intégrons l'inégalité ci dessus t_1 à t, nous obtenons

$$w(t) \leq w(t_1) - \int_{t_1}^{t} I(s)\Delta s.$$

En utilisant le fait que $I(s)$ est continue sur $[t_0, t_1]$ nous obtenons

$$w(t) \leq w(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} I(s)\Delta s - \int_{t_0}^{t} I(s)\Delta s.$$

Donc par(2.13), nous avons

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = -\infty$$

Ce qui donne la contradiction avec $w(t) \geq 0$. Donc $y(x,t)$ ne peut pas être une solution éventuellement positive.

Ceci complète la preuve de théorème 2.2.1. □

Corollaire 2.2.1. *Supposons que* $\gamma(t)=0$ *et* $\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{\alpha(t)}\Delta t=\infty$.
Si

$$\lim_{t\to\infty}\sup\int_{t_0}^{t}\frac{P(s)}{1+\dfrac{\mu(s)}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(\tau)}\Delta\tau}}\Delta s=\infty. \tag{2.16}$$

Alors (2.1),(2.2) est oscillante.

Lemme 2.2.4. *Soit* $\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{\alpha(t)}\int_{t_0}^{t}P(s)\Delta s\Delta t=\infty$ *et* y *une solution éventuellement positive de (2.1),(2.2) .Si* $Y(t)=\int_G ydx<0$ *et* $t_1>t_0$ *, alors*

$$0\leq Y^{\Delta}(s),\qquad 0\leq\frac{Y^{\Delta}(s)}{Y(s)}\leq\frac{1}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_1}^{s}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v}\qquad\forall s\geq t_1. \tag{2.17}$$

De plus,

$$\lim_{t\to\infty}Y(t)=0.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.2.2 , et Par l'inégalités (2.10) nous avons $\alpha(t)Y^{\Delta}(t)$ est une fonction décroissante et de signe constant.Alors en distingue deux cas.

Cas 1 : Soit $\alpha(t)Y^{\Delta}(t)\geq 0$ pour $\forall t\geq t_1$. Puisque $\alpha(t)>0$ alors $Y^{\Delta}(t)\geq 0$
Comme Y est positive et puisque la fonction $\alpha(t)Y^{\Delta}(t)$ est décroissante, on trouve

$$Y(t)\geq Y(t)-Y(t_1)=\int_{t_1}^{t}\frac{\alpha(s)Y^{\Delta}(s)}{\alpha(s)}\Delta s\geq\alpha(t)Y^{\Delta}(t)\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s,\forall t>t_1. \tag{2.18}$$

On divisons(2.18) par $Y(t)>0$, nous obtenons

$$1\geq 1-\frac{Y(t_1)}{Y(t)}=\frac{1}{Y(t)}\int_{t_1}^{t}\frac{\alpha(s)Y^{\Delta}(s)}{\alpha(s)}\Delta_s\geq\frac{\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{Y(t)}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s,\forall t>t_1.$$

Divisons encore par $\alpha(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s>0$,nous obtenons

$$\frac{1}{Y(t)\alpha(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}\int_{t_1}^{t}\frac{\alpha(v)Y^{\Delta}(v)}{\alpha(v)}\Delta v\geq\frac{\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{Y(t)\alpha(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v,\forall t>t_1.$$

Ce qui implique que

$$\frac{Y^{\Delta}(t)}{Y(t)\int_{t_0}^{t}\dfrac{1}{\alpha(s)}\Delta s}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v\leq\frac{1}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s},\forall t>t_1.$$

Donc

$$\frac{Y^{\Delta}(t)}{Y(t)}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v\leq\frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s},\forall t>t_1.$$

D'où,

$$\frac{Y^{\Delta}(t)}{Y(t)}\leq\frac{1}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_1}^{s}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v},\forall s>t_1.$$

Cas 2 : Soit $\alpha(t)Y^{\Delta}(t)<0$ et $\forall t\geq t_1$. Puisque $\alpha(t)Y^{\Delta}(t)$ est une fonction décroissante et $\alpha(t)>0$ alors $Y^{\Delta}(t)<0$ pour tout $t\geq t_1$. Donc $Y(t)>0$ et décroissante, ceci implique que $\lim_{t\to\infty}Y(t)=c\geq 0$.

Supposons le contraire , $c>0$ on obtient $Y(t)\geq c>0$ pour tout $t\geq t_1$.

Alors d'après (2.10) on trouve

$$\left(\alpha(t)\,Y^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}\leq -P(t)Y(t)\leq -cP(t)\qquad\forall t\geq t_1,$$

En intégrant l'inégalité ci dessus de t_1 à t , on trouve

$$\alpha(t)\,Y^{\Delta}(t)\leq\alpha(t_1)\,Y^{\Delta}(t_1)-c\int_{t_1}^{t}P(s)\Delta s\leq -c\int_{t_1}^{t}P(s)\Delta s\qquad\forall t\geq t_1,\tag{2.19}$$

On divisons (2.19) par $\alpha(t)>0$ et on l'intégré l'inégalité obtenue par rapport à t_1 à t , on trouve

$$Y(t)\leq Y(t_2)-c\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\int_{t_1}^{s}P(\tau)\Delta\tau\Delta s\qquad\forall t\geq t_1,$$

Ce qui implique que

$$\lim_{t\to\infty}Y(t)\leq\lim_{t\to\infty}Y(t_2)-c\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\int_{t_1}^{s}P(\tau)\Delta\tau\Delta s=-\infty\qquad\forall t\geq t_1,$$

Contradiction car $Y(t)$ est supposé éventuellement positive,donc $\lim_{t\to\infty}Y(t)=c=0$.

$\square$

Lemme 2.2.5. *Soit* $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)} \int_{t_0}^{t} P(s)\Delta s \Delta t = \infty$ *et* Y *une solution éventuellement négative de (2.1),(2.2) . Si* Y *et* t_1 *sont défini par le Lemme 2.2.1 alors soit*

$$Y^{\Delta}(s) \leq 0, \qquad 0 \leq \frac{Y^{\Delta}(s)}{Y(s)} \leq \frac{1}{\alpha(s) \int_{t_1}^{s} \frac{1}{\alpha(v)} \Delta v} \qquad \forall s \geq t_1. \tag{2.20}$$

Ou alors $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$.

La preuve du Lemme 2.2.5 est identique au Lemme 2.2.4

Théorème 2.2.2. *Supposons que* $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)} \int_{t_0}^{t} P(s)\Delta s \Delta t = \infty$ *et soit* $I(t)$ *est définie dans le théorème 2.2.1. S'il existe* $\gamma \in \omega^{+}$ *tel que*

$$\lim_{t\to\infty} \sup \int_{t_0}^{t} I(s)\Delta s = \infty. \tag{2.21}$$

Alors toute solution de(2.1),(2.2) est oscillante ou alors tend vers 0 lorsque t tend vers ∞.

Démonstration. Supposons que $Y(t)$ est une solution éventuellement positive. Alors en distingue deux cas dans le Lemme 2.2.4. Pour le premier cas la démonstration est identique au théorème 2.2.1

Pour le deuxième cas également la démonstration est identique au Lemme 2.2.4 .

□

2.3 Oscillation avec condition aux limites de Dirichlet

Dans cette section nous utilisons les valeurs propres du Laplacien

$$\begin{cases} -\nabla^2\phi(x) & = & \lambda\phi(x) & dans & G, \\ \phi(x) & = & 0 & sur & \partial G. \end{cases}$$

Soit $\lambda_1 > 0$ une valeur propre principale et soit $\phi_1 > 0$ sur G [10, theorem2 , page356] . De plus, nous normalisons ce vecteur propre tel que $\int_G \phi_1 = 1$.
Supposons que

$$P + \lambda_1\beta \geq 0, \qquad tel\ que \qquad P(t) = \min_{x\in G} p(x,t). \tag{2.22}$$

Lemme 2.3.1. *Supposons que $y(x,t)$ est une solution éventuellement positive de (2.1),(2.3). Alors $\exists t_1 \geq t_0$ tel que $Y(t) = \int_G y(x,t)\phi_1(x)dx > 0$ et*

$$\left(\alpha\left(t\right)Y^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} + \left(P(t) + \lambda_1\beta(t)\right)Y(t) \leq 0 \qquad \forall t \geq t_1. \tag{2.23}$$

De plus, si $y(x,t)$ est une solution éventuellement négative alors $Y(t) < 0$ et

$$\left(\alpha\left(t\right)Y^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} + \left(P(t) + \lambda_1\beta(t)\right)Y(t) \geq 0 \qquad \forall t \geq t_1. \tag{2.24}$$

Démonstration. D'après la définition de la fonction éventuellement positive , il existe $t_1 \geq t_0$ tel que $Y(x,t) \geq 0$ et $\int_G y(x,t)dx > 0$ pour $t \geq t_1$. Nous avons $\phi_1(x) > 0$ dans G on obtient

$$Y(t) = \int_G y(x,t)\phi_1 dx > 0.$$

On multiplie l'équation (2.1) par ϕ_1 et par passage à l'intégration tel que $x \in G$, nous avons

$$\int_G \phi_1(x)\left(\alpha\left(t\right)y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} dx + \int_G \phi_1(x)p(x,t)y(x,t)dx = \int_G \phi_1(x)\beta(t)\nabla_x^2 y\left(x,t\right)dx \quad (x,t) \in G\times[t_0,\infty)_{\mathbb{J}},$$

Par conséquent

$$\int_G \left(\alpha\left(t\right) y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} \phi_1(x)dx + \int_G p(x,t)y(x,t)\phi_1(x)dx = \beta(t)\int_G \phi_1(x)\nabla_x^2 y\left(x,t\right)dx. \tag{2.25}$$

D'autre part,

$$\beta(t)\int_G \phi_1(x)\nabla_x^2 y\left(x,t\right)dx = -\lambda_1\beta(t)\int_G y(x,t)\phi_1(x)dx. \tag{2.26}$$

Par le Lemme 2.2.1 , nous avons

$$\left(\int_G y(x,t)dx\right)^{\Delta_t} = \int_G y^{\Delta_t}(x,t)dx$$

Il s'ensuit que

$$\int_G \left(\alpha\left(t\right) y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} \phi_1(x)dx + \int_G p(x,t)y(x,t)\phi_1(x)dx = -\lambda_1\beta(t)\int_G y(x,t)\phi_1(x)dx.$$

Donc

$$\left(\int_G \alpha\left(t\right) y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\phi_1(x)dx\right)^{\Delta_t} + P(t)\int_G y(x,t)\phi_1(x)dx \leq -\lambda_1\beta(t)\int_G y(x,t)\phi_1(x)dx.$$

Ce qui implique que

$$\left(\alpha\left(t\right) Y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} + P(t)Y(x,t) \leq -\lambda_1\beta(t)Y(x,t),$$

$$\left(\alpha\left(t\right) Y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} + P(t)Y(x,t) + \lambda_1\beta(t)Y(x,t) \leq 0,$$

D'où

$$\left(\alpha\left(t\right) Y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} + \left(P(t) + \lambda_1\beta(t)\right)Y(x,t) \leq 0.$$

□

Lemme 2.3.2. *Soit* $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)} \Delta t = \infty$ *et* y *une solution éventuellement positive (2.1),(2.3) . Si* $Y(t) = \int_G y(x,t)\phi_1(x)dx$ *, et* $\exists t_1 \geq t_0$ *, alors*

$$0 \leq Y^{\Delta}(s), \qquad 0 \leq \frac{Y^{\Delta}(s)}{Y(s)} \leq \frac{1}{\alpha(s) \int_{t_1}^{s} \frac{1}{\alpha(v)} \Delta v} \qquad \forall s \geq t_1. \tag{2.27}$$

Démonstration. Par l'équation (2.23), on obtient

$$\left(\alpha\left(t\right) Y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t} \leq -\left(P(t) + \lambda_1 \beta(t)\right) Y(x,t) \leq 0.$$

Montrons que $0 \leq Y^{\Delta}(s)$, pour tout $t \in G$.

Supposons le contraire c'est-a-dire, il existe $t_2 \in G$ tel que $Y^{\Delta}(s) < 0$. Puisque $\alpha(t)Y^{\Delta}(t)$ est une fonction décroissante sur G alors il existe une constante $c < 0$ tel que $c = \alpha(t)Y^{\Delta}(t)$ d'où

$$Y^{\Delta}(t_2) < \frac{c}{\alpha(t_2)}.$$

Par intégration entre t_2 à t, on trouve

$$\int_{t_2}^{t} Y^{\Delta}(s)\Delta s \leq \int_{t_2}^{t} \frac{c}{\alpha(s)} \Delta s,$$

d'où

$$Y(t) = Y(t2) + \int_{t_2}^{t} Y^{\Delta}(s)\Delta s \leq Y(t_2) + c\int_{t_2}^{t} \frac{1}{\alpha(s)} \Delta s$$

par passage à la limite

$$Y(t_2) + c\int_{t_2}^{t} \frac{1}{\alpha(s)} \Delta s \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty.$$

On trouve une contradiction , car $Y(t) := \int_G y\phi_1 dx > 0.$

On divise par $\alpha(t)$, on trouve

$$\frac{\alpha(t)Y^{\Delta}(t)}{\alpha(t)} \geq 0.$$

Alors

$$Y^{\Delta}(t) \geq 0.$$

D'autre part , on a Y est positive et puisque la fonction αY^Δ est décroissante, nous obtenons

$$Y(t) \geq Y(t) - Y(t_1) = \int_{t_1}^{t} \frac{\alpha(v)Y^\Delta(v)}{\alpha(v)}\Delta v \geq \alpha(t)Y^\Delta(t)\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v, \forall t > t_1. \quad (2.28)$$

On divise l'équation (2.28) par $Y(t) > 0$, nous obtenons

$$1 \geq 1 - \frac{Y(t_1)}{Y(t)} = \frac{1}{Y(t)}\int_{t_1}^{t}\frac{\alpha(v)Y^\Delta(v)}{\alpha(v)}\Delta v \geq \frac{\alpha(t)Y^\Delta(t)}{Y(t)}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v, \forall t > t_1. \quad (2.29)$$

Divisons encore l'équation (2.29) par $\alpha(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s > 0$, on trouve

$$\frac{1}{Y(t)\alpha(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}\int_{t_1}^{t}\frac{\alpha(v)Y^\Delta(v)}{\alpha(v)}\Delta v \geq \frac{\alpha(t)Y^\Delta(t)}{Y(t)\alpha(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v, \forall t > t_1.$$

Ce qui implique que

$$\frac{Y^\Delta(t)}{Y(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v \leq \frac{1}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}, \forall t > t_1.$$

D'où

$$\frac{Y^\Delta(t)}{Y(t)}\int_{t_1}^{t}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v \leq \frac{\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\alpha(s)}\Delta s}, \forall t > t_1.$$

Ceci complète la preuve de Lemme 2.3.2 □

Lemme 2.3.3. *Soit* $\displaystyle\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{\alpha(t)}\Delta t = \infty$ *et* y *une solution éventuellement négative* *(2.1),(2.3) . Si* $Y(t) = \displaystyle\int_G y(x,t)\phi_1(x)dx$ *, et* $\exists t_1 \geq t_0$ *, alors*

$$Y^\Delta(s) \leq 0, \qquad 0 \leq \frac{Y^\Delta(s)}{Y(s)} \leq \frac{1}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_1}^{s}\frac{1}{\alpha(v)}\Delta v} \qquad \forall s \geq t_1. \quad (2.30)$$

Démonstration. La démonstration est identique au Lemme (2.3.2). □

Théorème 2.3.1. *Supposons que la condition (2.22) est vérifié et* $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)}\Delta t = \infty$ *et*

$$J(t) = \frac{e_\gamma(\sigma(t), t_0)\left(P(t) + \lambda_1\beta(t)\right)}{1 + \frac{\mu(t)}{\alpha(t)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\alpha(\tau)}\Delta\tau}}\Delta s - \frac{\alpha(t)e_\gamma^2(s, t_0)\gamma^2(t)}{4e_\gamma(\sigma(t), t_0)}\left(1 + \frac{\mu(t)}{\alpha(t)\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\alpha(\tau)}\Delta\tau}\right).$$

S'il existe $\gamma \in \omega^+$ *tel que*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} J(s)\Delta s = \infty.$$

Alors toute solution de (2.1),(2.3) est oscillante .

Démonstration. La démonstration est identique aux démonstration du théorème 2.2.1 . En remplace $P(t)$ par $P(t) + \lambda_1\beta(t)$. □

Corollaire 2.3.1. *Supposons que* $\gamma(t) = 0$ *et* $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)}\Delta t = \infty$.
Si

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{P(s) + \lambda_1\beta(t)}{1 + \frac{\mu(s)}{\alpha(s)\int_{t_0}^{s} \frac{1}{\alpha(\tau)}\Delta\tau}}\Delta s = \infty. \tag{2.31}$$

Alors(2.1),(2.3) est oscillante .

Lemme 2.3.4. *Supposons que* $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)}\int_{t_0}^{t}\left(P(s) + \lambda_1\beta(t)\right)\Delta s\Delta t = \infty$ *et y une solution éventuellement positive (2.1),(2.3) . Si* $Y(t) = \int_G y(x,t)\phi_1(x)dx$ *, et* $\exists t_1 \geq t_0$ *, alors*

$$0 \leq Y^\Delta(s), \qquad 0 \leq \frac{Y^\Delta(s)}{Y(s)} \leq \frac{1}{\alpha(s)\int_{t_1}^{s} \frac{1}{\alpha(v)}\Delta v} \qquad \forall s \geq t_1. \tag{2.32}$$

De plus $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$.

Théorème 2.3.2. *Supposons que* $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)}\int_{t_0}^{t}\left(P(s) + \lambda_1\beta(t)\right)\Delta s\Delta t = \infty$ *et soit* $J(t)$ *définie dans le théorème 2.3.1. S'il existe* $\gamma \in \omega^+$ *tel que*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} J(s)\Delta s = \infty.$$

Alors toute solution de(2.1)-(2.3) est oscillante où tends vers 0 lorsque t tend vers ∞.

Exemple 2.3.1. *On considère l'équation dynamique*

$$\left(\frac{1}{t}y^{\Delta_t}\right)^{\Delta_t} + t^2 y = t\nabla_x^2 y, \quad (x,t) \in (0,\pi) \times [1,\infty)_{\mathbb{J}}\,, \tag{2.33}$$

et

$$y_x\,(0,t) = y_x\,(\pi,t) = 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [1,\infty)_{\mathbb{J}}\,, \tag{2.34}$$

On a $\alpha(t) = \dfrac{1}{t}$, $\beta(t) = t$, $p(x,t) = t^2$, $P(t) = t^2$.
Soit $\mathbb{J} = \{q^n : q > 1, n \in \mathbb{N} \bigcup \{o\}\}$ *et* $\gamma(t) = 0$.
Alors

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)}\Delta t = \lim_{t\to\infty} \int_1^t s\Delta s = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2-1}{1+q} = \infty$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \sup \int_{t_0}^{t} \frac{P(s) + \lambda_1\beta(t)}{1 + \dfrac{\mu(s)}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_0}^{s}\frac{1}{\alpha(\tau)}\Delta\tau}}\Delta s = \lim_{t\to\infty} \sup \int_1^t \frac{s^{2(s^2-1)}}{q^2s^2-1}\Delta s = \infty. \tag{2.35}$$

Alors les conditions du corollaire 2.2.1 sont vérifiées.Donc on conclut que l'équation 2.33 admet une solution oscillante.

Exemple 2.3.2. *On considère l'équation dynamique*

$$\left(ty^{\Delta_t}\right)^{\Delta_t} + t^2 y = t^2\nabla_x^2 y, \quad (x,t) \in (0,\pi) \times [1,\infty)_{\mathbb{J}}\,, \tag{2.36}$$

et

$$y\,(0,t) = y\,(\pi,t) = 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [1,\infty)_{\mathbb{J}}\,, \tag{2.37}$$

On a $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = t^2$, $p(x,t) = t^2$, $P(t) = t^2$.
La valeur propre principale $\lambda_1 = 1$ *et* $\phi_1 = \dfrac{\sin(x)}{2}$.
Soit $\mathbb{J} = \{q^n : q > 1, n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{0\}$ *et* $\gamma(t) = 0$.
Alors

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(t)} \int_{t_0}^{t} \left(P(s) + \lambda_1\beta(s)\right)\Delta s\Delta t = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{s}\left(\frac{2(s^3-1)}{1+q+q^2}\right)\Delta s = \infty$$

et

$$\lim_{t\to\infty}\sup\int_{t_0}^{t} J(s)\Delta s = \lim_{t\to\infty}\sup\int_{t_0}^{t}\frac{P(s)+\lambda_1\beta(s)}{1+\dfrac{\mu(s)}{\alpha(s)\displaystyle\int_{t_0}^{s}\frac{1}{\alpha(\tau)}\Delta\tau}}\Delta s = \lim_{t\to\infty}\sup\int_{1}^{t} 2s^2\log(s-qs)\Delta s = \infty. \tag{2.38}$$

Donc, on conclut que l'équation 2.36 admet une solution oscillante .

Chapitre 3

Théorèmes d'oscillation pour la résolution d'équations dynamiques partielles sur échelles de temps

Dans ce chapitre, nous établions quelques critères d'oscillation pour les équations dynamiques fonctionnelles non linéaires sur les échelles de temps de la forme :

$$\left(r(t)\left(u^{\Delta}(x,t)\right)\right)^{\Delta}+q(t)u^{\Delta}(x,t)+p(x,t)f\left(t,x,u(x,t)\right)=a(t)\Delta_{x}u(x,t), \quad (3.1)$$

pour tout $(x,t)\in\Omega\times J_{t_0}$, avec la condition aux limites de Neumann

$$\nabla_x u\left(x,t\right)=0, \qquad \text{pour tout } (x,t)\in\Gamma\times J_{t_0}, \quad (3.2)$$

Ou la condition aux limites de Dirichlet

$$u\left(x,t\right)=0, \qquad \text{pour tout } (x,t)\in\Gamma\times J_{t_0}. \quad (3.3)$$

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière par morceaux $\Gamma=\partial\Omega$, $\mathbb{T}$ est une échelle de temps $\mathbb{T}$, avec $\sup\mathbb{T}=\infty$ et $J_{t_0}=[t_0,\infty)\cap\mathbb{T}$, Δ_t est l'opérateur dynamique partiel par rapport à t . On suppose les conditions suivantes :

(C_1) La fonction $f:J_{t_0}\times\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que $f\in\mathcal{C}\left(J_{t_0}\times\Omega\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$, $uf\left(t,x,u\right)>0$, pour tout $(t,x,u) \in J_{t_0} \times \Omega \times \mathbb{R}- \{0\}$ et soit $b \in \mathcal{C}(J_{t_0},[0,\infty))$ tel que

$$\frac{f(t,x,u)}{u} \geq b(t), \qquad \text{pour tout } (t,x,u) \in J_{t_0} \times \Omega \times \mathbb{R}- \{0\}. \tag{3.4}$$

(C_2) Les fonctions $r,q,a : J_{t_0} \to [0,\infty)$ et $p : J_{t_0} \times \Omega \to \mathbb{R}$, tel que $r,q,a \in \mathcal{C}(J_{t_0},[0,\infty))$, $p \in \mathcal{C}(J_{t_0} \times \Omega, \mathbb{R})$, et

$$r(t) - \mu(t)\,q(t) \neq 0, \qquad \text{pour tout } t \in J_{t_0}.$$

3.1 Oscillation avec condition aux limites de Neumann

Dans cette section, nous établissons quelques conditions suffisantes pour l'oscillation de la solution u de l'équation (3.1)-(3.2) sur J_{t_0}. Pour la simplification , on note

$$P(t) := \min\{p(t,x) : x \in \Omega\} > 0, \quad \text{pour tout } t \in J_{t_0}. \tag{3.5}$$

Théorème 3.1.1. *Supposons que les conditions* $(C_1)-(C_2)$ *sont vérifiés. S'il existe une fonction positive* $\delta \in C^1_{rd}(J_{t_0},\mathbb{R})$, *tel que*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \frac{e_{\ominus - \frac{q(t)}{r(t)}}(s,t)}{r(s)} \Delta s = \infty, \tag{3.6}$$

et

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \Lambda_\delta(s,t_0)\,\Delta s = \infty, \tag{3.7}$$

alors

$$\Lambda_\delta(t,t_0) := \delta(t)\, e_{\ominus\left[-\frac{q}{r}\right]}(\sigma(t),t_0)\, b(t)\, P(t) - e_{\ominus\left[-\frac{q}{r}\right]}(t,t_0)\, \frac{r(t)\left[\delta^{\Delta}(t)\right]^2}{4\delta(t)}.$$

Alors l'équation (3.1)-(3.2) *admet une solution oscillante.*

Démonstration. Supposons le contraire , que (3.1)-(3.2) admet une solution non oscillante u sur J_{t_0} . Alors il existe $t_1 \in J_{t_0}$ tel que $u(t,x) \geq 0$ et $v(t) = \int_\Omega u(t,x)\,dx >$ Ω, sur $t \in J_{t_0}$. Soit u une solution éventuellement positive (3.1)-(3.2). Par le théorème de Green (3.2), nous obtenons

$$\int_{\Omega} \Delta_x u(x,t)dx = \int_{\Gamma} \nabla_x u\left(x,t\right).dS = 0.$$

En intégrant (3.1) par rapport a x sur Ω, on obtient

$$\int_{\Omega} \left(r(t)\left(u^{\Delta}\left(x,t\right)\right)\right)^{\Delta} + q(t)u^{\Delta}(x,t) + p(x,t)f\left(t,x,u(x,t)\right)dx = \int_{\Omega} a(t)\Delta_x u(x,t)dx.$$

Alors

$$\int_{\Omega} \left(r(t)\left(u^{\Delta}\left(x,t\right)\right)\right)^{\Delta} dx + q(t)\int_{\Omega} u^{\Delta}(x,t)dx + \int_{\Omega} p(x,t)f\left(t,x,u(x,t)\right)dx = 0.$$

Par la condition (3.4), nous avons

$$\int_{\Omega} \left(r(t)\left(u^{\Delta}\left(x,t\right)\right)\right)^{\Delta} dx + q(t)\int_{\Omega} u^{\Delta}(x,t)dx + P(t)b\left(t\right)\int_{\Omega} u\left(x,t\right)dx \le 0.$$

En utilisant le théorème [5][Théorème 1.117],nous obtenons

$$\left(r(t)\left(\int_{\Omega} u\left(x,t\right)dx\right)^{\Delta}\right)^{\Delta} + q\left(t\right)\left(\int_{\Omega} u(x,t)dx\right)^{\Delta} + b\left(t\right)P\left(t\right)\int_{\Omega} u(x,t)dx \le 0.$$

Soit $v\left(t\right) = \int_{\Omega} u\left(x,t\right)dx$, pour tout $t \in J_{t_0}$,Donc

$$\left(r(t)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} + q\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right) + b\left(t\right)P\left(t\right)v\left(t\right) \le 0, \qquad \text{pour tout } t \in J_{t_1}. \tag{3.8}$$

D'autre part,

Soit $\alpha\left(t\right) = \ominus - \frac{q(t)}{r(t)}$, pour $t \in J_{t_0}$, nous avons

$$e_{\alpha(t)}(\sigma(t),s) = e^{\sigma}_{\alpha(t)}(t,s),$$

alors

$$e^{\sigma}_{\alpha(t)} = (1+\mu(t)\alpha(t))e_{\alpha(t)}(t,s),$$

Par conséquent,

$$\frac{e^{\sigma}_{\alpha(t)}}{(1+\mu(t)\alpha(t))} = e_{\alpha(t)}(t,s),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}
\left(e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} &= e^{\sigma}_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)\left(r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} + \alpha\left(t\right)e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right) \\
&= e^{\sigma}_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)\left(r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} + \alpha\left(t\right)\frac{e^{\sigma}_{\alpha(t)}}{(1+\mu(t)\alpha(t))}r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right) \\
&= e^{\sigma}_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)\left[\left(r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} - \ominus\alpha\left(t\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right] \\
&= e^{\sigma}_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)\left[\left(r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} + q\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right] \\
&\leq -e^{\sigma}_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)b\left(t\right)P\left(t\right)v\left(t\right), \text{ pour tout } t\in J_{t_1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)$ est une fonction décroissante sur J_{t_1}. Nous affirmons maintenant que $e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)>0$, pour $t\in J_{t_1}$. Sinon, alors il existe $t_2\in J_{t_1}$, tel que

$$e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\leq -e_{\alpha(t)}\left(t_2,t_0\right)b\left(t_2\right)v^{\Delta}\left(t_2\right)=-c<0, \text{ pour tout } t\in J_{t_2}.$$

Ce qui donne que

$$v^{\Delta}\left(t\right)\leq\frac{-c}{e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)}, \text{ pour tout } t\in J_{t_2}.$$

$$v^{\Delta}\left(t\right)\leq -c\frac{e_{\ominus\alpha(t)}\left(t,t_0\right)}{r\left(t\right)}, \text{ pour tout } t\in J_{t_2}.$$

En intégrant de t_2 à t ,

$$\int_{t_2}^{t}v^{\Delta}\left(t\right)\Delta s\leq\int_{t_2}^{t}-c\frac{e_{\ominus\alpha(t)}\left(t,t_0\right)}{r\left(t\right)}\Delta s, \text{ pour tout } t\in J_{t_2}.$$

nous obtenons

$$v\left(t\right)\leq v\left(t_2\right)-c\int_{t_2}^{t}\frac{e_{\ominus\alpha(t)}\left(s,t_0\right)}{r\left(s\right)}\Delta s\to-\infty \text{ quand } t\to+\infty,$$

On trouve une contradiction avec $v\left(t\right)>0$ pour $t\in J_{t_2}$.

On définie la fonction w par la substitution de Riccati généralisée

$$w(t) = \delta(t) e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t) \frac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}, \text{ pour tout } t \in J_{t_2}. \tag{3.9}$$

Alors $w(t) > 0$ pour $t \in J_{t_2}$. En différenciant (3.9) et en utilisant (3.8), nous avons

$$w^{\Delta}(t) = \left(\delta(t) e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t) \frac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}\right)^{\Delta}$$

$$\text{w}^{\Delta}(t) = \delta(t)^{\Delta}\left(e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t) \tfrac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}\right) + \delta(t)^{\sigma}\left(e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t) \tfrac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}\right)^{\Delta}$$

$$\text{w}^{\Delta}(t) = \delta(t)^{\Delta}\left(e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t) \tfrac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}\right) + \delta(t)^{\sigma} \alpha(t) e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t) \tfrac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}$$

$$+ \quad \delta(t)^{\sigma} e^{\sigma}_{\alpha(t)}(t, t_0)\left[\frac{(r(t) v^{\Delta}(t))^{\Delta} v(t) - (r(t) v^{\Delta}(t) v^{\Delta}(t)}{v(t) v^{\sigma}(t)}\right]$$

$$\text{w}^{\Delta}(t) = \tfrac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)} w(t) + \tfrac{\delta(t)}{v(t)}\left(e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t) v^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} - \delta(t) e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t) \tfrac{\left(v^{\Delta}(t)\right)^2}{v(t) v^{\sigma}(t)}$$
$$\leq -\delta(t) e^{\sigma}_{\alpha(t)}(t, t_0) b(t) P(t) + \tfrac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)} w(t) - \tfrac{w(t)^2}{\delta(t) e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t)}.$$

En utilisant l'inégalité, $Bx - Ax^2 \leq \frac{B^2}{4A}$, nous avons

$$\frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)} w(t) - \frac{w(t)^2}{\delta(t) e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t)} \leq \frac{\left[\frac{\delta^{\Delta}(t)}{\delta(t)}\right]^2}{\frac{4}{\delta(t) e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t)}},$$

alors

$$w^{\Delta}(t) \leq -\delta(t) e^{\sigma}_{\alpha(t)}(t, t_0) b(t) P(t) + \frac{1}{4} e_{\alpha(t)}(t, t_0) r(t) \frac{\left[\delta^{\Delta}(t)\right]^2}{\delta(t)}.$$

Par passage à l'intégration de t_2 a t et on trouve

$$\int_{t_2}^{t} w^{\Delta}(s) \Delta s \leq \int_{t_2}^{t} -\delta(s) e^{\sigma}_{\alpha(s)}(s, t_0) b(s) P(t) + \frac{1}{4} e_{\alpha(s)}(s, t_0) r(s) \frac{\left[\delta^{\Delta}(s)\right]^2}{\delta(s)} \Delta s.$$

D'où

$$w^{\Delta}(t) - w^{\Delta}(t_2) \leq \int_{t_2}^{t} -\delta(s) e^{\sigma}_{\alpha(s)}(s, t_0) b(s) P(t) + \frac{1}{4} e_{\alpha(s)}(s, t_0) r(s) \frac{\left[\delta^{\Delta}(s)\right]^2}{\delta(s)} \Delta s.$$

En introduisant la $\limsup$ dans l'inégalité ci -dessus , on trouve

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_2}^{t}\delta(s)\,e^{\sigma}_{\alpha(t)}(s,t_0)\,b(s)\,P(s)-\frac{1}{4}e_{\alpha(t)}(s,t_0)\,r(s)\,\frac{\left[\delta^{\Delta}(s)\right]^2}{\delta(s)}\Delta s\leq w(t_2),$$

On trouve une contradiction avec (3.7). La preuve du théorème est complète. □

Théorème 3.1.2. *Supposons que les conditions (C_1)-(C_2) sont vérifiées, tel que pour tout $t_1\in J_{t_0}$ suffisamment assez grand,*

$$\int_{t}^{\infty}\frac{1}{\pi(s,t_1)}\left(\int_{t_1}^{s}b(\tau)\,P(\tau)\,\Delta\tau\right)\Delta s>1,\quad \textit{pour tout } t\in J_{t_1},\tag{3.10}$$

alors

$$\pi(t,t_1)=r(t)+e_{\ominus\left[-\frac{q}{r}\right]}(t,t_0)\,r(t)\int_{t_1}^{t}e_{-\frac{q}{r}}(s,s_0)\,\frac{q(s)}{r(s)}\Delta s,\quad \textit{pour tout } t\in J_{t_1}.\tag{3.11}$$

S'il existe une fonction positive $\delta\in\mathcal{C}^1_{rd}(J_{t_0},\mathbb{R})$,tel que (3.7) est vérifié.Alors toute solution de (3.1)-(3.2) est oscillante.

Démonstration. Supposons le contraire , que (3.1)-(3.2) admet une solution non oscillante u sur J_{t_0} .Alors il existe $t_1\in J_{t_0}$ tel que $u(t,x)\geq 0$ et $v(t)=\int_{\Omega}u(t,x)\,dx>0$, pour tout $t\in J_{t_0}$. Puisque $u(t,x)\geq 0$ et $v(t)=\int_{\Omega}u(t,x)\,dx>0$, pour $t\in J_{t_0}$. Soit u une solution éventuellement positive de (3.1)-(3.2). Comme l'inégalité (3.8) est satisfaite pour tout $t\in J_{t_1}$,

$$\left(r(t)v^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}+q(t)\,v^{\Delta}(t)+b(t)\,P(t)\,v(t)\leq 0,\qquad \text{pour tout } t\in J_{t_1}.$$

Cas 1 . Soit $v^{\Delta}(t)<0$ et $\left(e_{\alpha(t)}(t,t_0)\,r(t)\,v^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}<0$, pour tout $t\in J_{t_1}$. En intégrant l'inégalité (3.8) de t_1 à t, on obtient

$$\int_{t_1}^{t}\left(r(s)v^{\Delta}(s)\right)^{\Delta}+q(s)\,v^{\Delta}(s)+b(s)\,P(s)\,v(s)\,\Delta s\leq 0,\qquad \text{pour tout } t\in J_{t_1}.$$

d'où

$$r(t)v^{\Delta}(t)+\int_{t_1}^{t}q(s)\,v^{\Delta}(s)\,\Delta s+\int_{t_1}^{t}b(s)\,P(s)\,v(s)\,\Delta s\leq r(t_1)v^{\Delta}(t_1),\quad \text{pour } t\in J_{t_1}.$$

Puisque $v<0$ et $e_{\alpha(t)}\left(.,t_0\right)rv^{\Delta}$ est décroissant sur J_{t_1}, on obtient

$$\left[r(t)+e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)\int_{t_1}^{t}\frac{q\left(s\right)}{e_{\alpha(t)}\left(s,s_0\right)r\left(s\right)}\Delta s\right]v^{\Delta}\left(t\right)\leq -v\left(t\right)\int_{t_1}^{t}b\left(s\right)P\left(s\right)\Delta s.$$

Ce qui implique que

$$v^{\Delta}\left(t\right)\leq -\frac{v\left(t\right)}{\left[r(t)+e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)\int_{t_1}^{t}\frac{q\left(s\right)}{e_{\alpha(t)}\left(s,s_0\right)r\left(s\right)}\Delta s\right]}\int_{t_1}^{t}b\left(s\right)P\left(s\right)\Delta s,\qquad \text{pour tout } t\in J_{t_1}.$$

Alors

$$v^{\Delta}\left(t\right)\leq -\frac{v\left(t\right)}{\pi\left(t,t_1\right)}\int_{t_1}^{t}b\left(s\right)P\left(s\right)\Delta s,\qquad \text{pour tout } t\in J_{t_1}.$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus sur $[t,\infty)$, on obtient

$$\int_{t}^{\infty}v^{\Delta}\left(s\right)\Delta s\leq\int_{t}^{\infty}-\frac{v\left(s\right)}{\pi\left(s,t_1\right)}\int_{t_1}^{s}b\left(\tau\right)P\left(\tau\right)\Delta\tau\Delta s,$$

$$\lim_{t\to\infty}v\left(t\right)\leq v\left(t\right)-\int_{t}^{\infty}\frac{v\left(s\right)}{\pi\left(s,t_1\right)}\left(\int_{t_1}^{s}b\left(\tau\right)P\left(\tau\right)\Delta\tau\right)\Delta s.$$

puisque v est positif et décroissante sur J_{t_1}, alors $\lim_{t\to\infty}v\left(t\right)$ existe et est positif, nous avons

$$0\leq v\left(t\right)\left(1-\int_{t}^{\infty}\frac{1}{\pi\left(s,t_1\right)}\left(\int_{t_1}^{s}b\left(\tau\right)P\left(\tau\right)\Delta\tau\right)\Delta s\right),\qquad \text{pour tout } t\in J_{t_1}.$$

Puisque $v\left(t\right)>0$, pour $t\in J_{t_1}$, ce qui implique

$$\int_{t}^{\infty}\frac{1}{\pi\left(s,t_1\right)}\left(\int_{t_1}^{s}b\left(\tau\right)P\left(\tau\right)\Delta\tau\right)\Delta s\leq 1,\qquad \text{pour tout } t\in J_{t_1},$$

on trouve une contradiction avec (3.10).

Cas 2 . Soit $v^{\Delta}\left(t\right)>0$ et $\left(e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta}<0$, pour $t\in J_{t_1}$.

Dans ce cas , La preuve, est la même que la preuve du théorème 3.1.1.

Ceci complète la preuve. □

3.2 Oscillation avec condition aux limites de Dirichlet

Dans cette section, nous établissons des conditions suffisantes pour l'oscillation de la solution sur J_{t_0}.

Théorème 3.2.1. *Supposons que les conditions* $(C_1) - (C_2)$ *et* (3.6) *sont vérifiées. S'il existe une fonction positive* $\theta \in C^1_{rd}(J_{t_0}, \mathbb{R})$ *et une constante* $\lambda > 0$ *, tel que*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} \gamma_\theta(s, t_0)\,\Delta s = \infty, \tag{3.12}$$

alors

$$\gamma_\theta(t, t_0) := \theta(t)\, e_{\ominus[-\frac{q}{r}]}(\sigma(t), t_0)\,[b(t)\,P(t) + \lambda a(t)] - e_{\ominus[-\frac{q}{r}]}(t, t_0)\,\frac{r(t)\left[\theta^\Delta(t)\right]^2}{4\theta(t)},$$

et P *est défini dans* (3.5) *. Alors toute solution de* (3.1)-(3.3) *est oscillante.*

Démonstration. Supposons le contraire , que u est une solution non oscillante de l'équation (3.1)-(3.3) sur J_{t_0}.Alors il existe $t_1 \in J_{t_0}$ tel que $u(t,x) \geq 0$ et $v(t) = \int_\Omega u(t,x)\,dx > 0$, pour $t \in J_{t_0}$. Puisque $u(t,x) \geq 0$ et $v(t) = \displaystyle\int_\Omega u(t,x)\,dx > 0$, pour $t \in J_{t_0}$. Soit u une solution éventuellement positive de (3.1)-(3.3) . Soit $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$\psi(x) := \sum_{i=1}^{i=n} e^{\sqrt{\lambda} x_i}, \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Par le théorème de Green et (3.3), on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi(x)\,\Delta_x u(x,t)\,dx &= -\int_\Omega u(x,t)\,\Delta\psi(x)\,dx + \int_\Gamma u(x,t)\,\nabla\psi(x)\,.ds \\ &= -\int_\Omega u(x,t)\,\Delta\psi(x)\,dx = -\sqrt{\lambda}\int_\Omega u(x,t)\,\psi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Nous multiplions (3.1) par ψ et en intégrant par rapport à x sur Ω , nous avons

$$\int_\Omega \left(\psi(s)\left(r(t)\left(u^\Delta(s,t)\right)\right)^\Delta + q(t)\psi(s)\,u^\Delta(s,t) + \psi(s)\,p(x,t)f(t,s,u(s,t))\right)\Delta s = \int_\Omega \psi(s)\,a(t)\Delta_s u(s,t)\Delta s,$$

$$\int_\Omega \psi(s)\left(r(t)\left(u^\Delta(s,t)\right)\right)^\Delta \Delta s + \int_\Omega q(t)\psi(s)\,u^\Delta(s,t)\Delta s + \int_\Omega \psi(s)\,p(x,t)f(t,s,u(s,t))\,\Delta s = \int_\Omega \psi(s)\,a(t)\Delta_s u \Delta s,$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\Omega}\psi\left(s\right)\left(r(t)\left(u^{\Delta}\left(s,t\right)\right)\right)^{\Delta}\Delta s+q(t)\int_{\Omega}\psi\left(s\right)u^{\Delta}(s,t)\Delta s+P(t)\int_{\Omega}\psi\left(s\right)u(x,t)\Delta s+\sqrt{\lambda}\int_{\Omega}u\left(x,t\right)\psi\left(x\right)dx\leq 0$$

d'où

$$\left(r(t)\left(v^{\Delta}\left(t\right)\right)\right)^{\Delta}+q(t)v^{\Delta}(t)+\left(b\left(t\right)P\left(t\right)+\sqrt{\lambda}a\left(t\right)\right)v\left(t\right)\leq 0,\quad \text{pour tout } t\in J_{t_1}. \tag{3.13}$$

D'autre part , soit $\alpha\left(t\right)=\ominus-\frac{q(t)}{r(t)}$, pour $t\in J_{t_0}$, nous avons

$$e_{\alpha(t)}(\sigma(t),s)=e^{\sigma}_{\alpha(t)}(t,s)$$

alors

$$e^{\sigma}_{\alpha(t)}=(1+\mu(t)\alpha(t))e_{\alpha(t)}(t,s)$$

par conséquent,

$$\frac{e^{\sigma}_{\alpha(t)}}{(1+\mu(t)\alpha(t))}=e_{\alpha(t)}(t,s)$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\left(e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta} &= e^{\sigma}_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)\left(r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta}+\alpha\left(t\right)e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\\ &= e^{\sigma}_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)\left(r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta}+\alpha\left(t\right)\frac{e^{\sigma}_{\alpha(t)}}{(1+\mu(t)\alpha(t))}r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\\ &= e^{\sigma}_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)\left[\left(r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta}-\ominus\alpha\left(t\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right]\\ &= e^{\sigma}_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)\left[\left(r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right)^{\Delta}+q\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\right]\\ &\leq -e^{\sigma}_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)\left[b\left(t\right)P\left(t\right)+\sqrt{\lambda}a(t)\right]v\left(t\right)\ \text{, pour tout } t\in J_{t_1}.\end{aligned}$$

Ainsi, $e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)$ est une fonction décroissante sur J_{t_1}. Nous affirmons maintenant que $e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)>0$, pour $t\in J_{t_1}$. Sinon, alors il existe $t_2\in J_{t_1}$, tel que

$$e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)v^{\Delta}\left(t\right)\leq -e_{\alpha(t)}\left(t_2,t_0\right)r\left(t_2\right)v^{\Delta}\left(t_2\right)=-c<0, \text{ pour tout } t\in J_{t_2}.$$

Ce qui donne que

$$v^{\Delta}\left(t\right)\leq\frac{-c}{e_{\alpha(t)}\left(t,t_0\right)r\left(t\right)}, \text{ pour tout } t\in J_{t_2}.$$

$$v^{\Delta}(t) \leq -c\frac{e_{\ominus\alpha(t)}(t,t_0)}{r(t)}, \text{ pour tout } t \in J_{t_2}.$$

En intégrant de t_2 à t,

$$\int_{t_2}^{t} v^{\Delta}(t)\,\Delta s \leq \int_{t_2}^{t} -c\frac{e_{\ominus\alpha(t)}(t,t_0)}{r(t)}\Delta s, \text{ por tout } t \in J_{t_2}.$$

nous obtenons

$$v(t) \leq v(t_2) - c\int_{t_2}^{t} \frac{e_{\ominus\alpha(t)}(s,t_0)}{r(s)}\Delta s \to -\infty \text{ quand } t \to +\infty,$$

On trouve une contradiction avec $v(t) > 0$ pour $t \in J_{t_2}$.

On définie la fonction w par la substitution de Riccati généralisée

$$w(t) = \theta(t)\, e_{\alpha(t)}(t,t_0)\, r(t)\frac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}, \text{ pour tout } t \in J_{t_2}. \tag{3.14}$$

Alors $w(t) > 0$ pour $t \in J_{t_2}$. En différenciant (3.14) et en utilisant (3.8), nous avons

$$w^{\Delta}(t) = \left(\theta(t)\, e_{\alpha(t)}(t,t_0)\, r(t)\frac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}\right)^{\Delta}$$

$$\mathrm{w}^{\Delta}(t) = \theta(t)^{\Delta}\left(e_{\alpha(t)}(t,t_0)\, r(t)\tfrac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}\right) + \theta(t)^{\sigma}\left(e_{\alpha(t)}(t,t_0)\, r(t)\tfrac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}\right)^{\Delta}$$

$$\mathrm{w}^{\Delta}(t) = \theta(t)^{\Delta}\left(e_{\alpha(t)}(t,t_0)\, r(t)\tfrac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}\right) + \theta(t)^{\sigma}\,\alpha(t)e_{\alpha(t)}(t,t_0)\, r(t)\tfrac{v^{\Delta}(t)}{v(t)}$$

$$+\theta(t)^{\sigma}\, e^{\sigma}_{\alpha(t)}(t,t_0)\left[\frac{(r(t)\,v^{\Delta}(t))^{\Delta}v(t) - (r(t)v^{\Delta}(t)v^{\Delta}(t)}{v(t)v^{\sigma}(t)}\right]$$

$$\mathrm{w}^{\Delta}(t) = \tfrac{\theta^{\Delta}(t)}{\theta(t)}w(t) + \tfrac{\theta(t)}{v(t)}\left(e_{\alpha(t)}(t,t_0)\, r(t)\, v^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} - \theta(t)\, e_{\alpha(t)}(t,t_0)\, r(t)\tfrac{\left(v^{\Delta}(t)\right)^2}{v(t)v^{\sigma}(t)}$$
$$\leq -\theta(t)\, e^{\sigma}_{\alpha(t)}(t,t_0)\left[b(t)\,P(t) + \sqrt{\lambda}a(t)\right] + \tfrac{\theta^{\Delta}(t)}{\theta(t)}w(t) - \tfrac{w(t)^2}{\theta(t)e_{\alpha(t)}(t,t_0)r(t)}.$$

En utilisant l'inégalité, $Bx - Ax^2 \leq \frac{B^2}{4A}$, nous avons

$$\frac{\theta^{\Delta}(t)}{\theta(t)}w(t) - \frac{w(t)^2}{\theta(t)\, e_{\alpha(t)}(t,t_0)\, r(t)} \leq \frac{\left[\frac{\theta^{\Delta}(t)}{\theta(t)}\right]^2}{\frac{4}{\theta(t)e_{\alpha(t)}(t,t_0)r(t)}}.$$

Par conséquent

$$w^{\Delta}(t) \leq -\theta(t)\, e^{\sigma}_{\alpha(t)}(t,t_0)\left[b(t)\,P(t) + \sqrt{\lambda}a(s)\right] + \frac{1}{4}e_{\alpha(t)}(t,t_0)\, r(t)\frac{\left[\theta^{\Delta}(t)\right]^2}{\theta(t)}.$$

Par passage àl'intégralité de t_2 à t , on trouve

$$\int_{t_2}^{t} w^{\Delta}(s)\,\Delta s \leq \int_{t_2}^{t} -\theta(s)\,e^{\sigma}_{\alpha(s)}(s,t_0)\left[b(s)\,P(t)+\sqrt{\lambda}a(s)\right]+\frac{1}{4}e_{\alpha(s)}(s,t_0)\,r(s)\,\frac{\left[\theta^{\Delta}(s)\right]^2}{\theta(s)}\Delta s.$$

D'où

$$w^{\Delta}(t)-w^{\Delta}(t_2) \leq \int_{t_2}^{t} -\theta(s)\,e^{\sigma}_{\alpha(s)}(s,t_0)\left[b(s)\,P(t)+\sqrt{\lambda}a(s)\right]+\frac{1}{4}e_{\alpha(s)}(s,t_0)\,r(s)\,\frac{\left[\theta^{\Delta}(s)\right]^2}{\theta(s)}\Delta s.$$

En introduisant la lim sup dans l'inégalité ci-dessus, nous avons

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_2}^{t} \theta(s)\,e^{\sigma}_{\alpha(t)}(s,t_0)\left[b(s)\,P(s)+\sqrt{\lambda}a(s)\right]-\frac{1}{4}e_{\alpha(t)}(s,t_0)\,r(s)\,\frac{\left[\theta^{\Delta}(s)\right]^2}{\theta(s)}\Delta s \leq w(t_2),$$

On trouve une contradiction (3.12). La preuve du théorème est complète. □

Théorème 3.2.2. *Supposons que les conditions* $(C_1)-(C_2)$ *sont vérifiées, tel que pour tout* $t_1 \in J_{t_0}$ *suffisamment assez grand. S'il existe une constante* $\beta > 0$*, tel que*

$$\int_{t}^{\infty} \frac{1}{\pi(s,t_1)}\left(\int_{t_1}^{s} b(\tau)\,P(\tau)+\beta a(\tau)\,\Delta\tau\right)\Delta s > 1, \quad \textit{pour tout } t \in J_{t_1}, \tag{3.15}$$

Alors $\pi(.,t_1)$ *est défini dans* (3.11) *et* P *est défini dans* (3.5)*. S'il existe une fonction positive* $\theta \in C^1_{rd}(J_{t_0},\mathbb{R})$ *et une constante* $\lambda > 0$*, tel que* (3.12) *soient vérifiées . Alors toute solution de* (3.1)-(3.2) *est oscillante.*

Démonstration. Supposons le contraire, que u est une solution non oscillante de l'équation (3.3)-(3.3) sur J_{t_0}. Alors il existe $t_1 \in J_{t_0}$ tel que $u(t,x) \geq 0$ et $v(t) = \int_{\Omega} u(t,x)\,dx > 0$, pour $t \in J_{t_0}$. Puisque $u(t,x) \geq 0$ et $v(t) = \int_{\Omega} u(t,x)\,dx > 0$, pour $t \in J_{t_0}$. Soit u une solution éventuellement positive de (3.3)-(3.3). Puisque l'inégalité (3.13) est satisfaite pour tout $t \in J_{t_1}$.

•*Cas*1.*Soit* $\mathrm{v}^{\Delta}(t) > 0$ et $\left(e_{\alpha(t)}(t,t_0)\,r(t)\,v^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} < 0$, pour $t \in J_{t_1}$. Dans ce cas, la preuve est la même manière que la preuve du théorème 3.2.1.

•*Cas*2.*Soit* $\mathrm{v}^{\Delta}(t) < 0$ et $\left(e_{\alpha(t)}(t,t_0)\,r(t)\,v^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} < 0$, pour $t \in J_{t_1}$. En intégrant l'inégalité (3.13) sur $[t_1,t)$, on obtient

$$r(t)v^{\Delta}(t)+\int_{t_1}^{t} q(s)v^{\Delta}(s)\Delta s+\int_{1}^{t}\left(b(s)\,P(s)+\sqrt{\lambda}a(s)\right)v(s)\,\Delta s \leq 0, \quad \text{pour tout } t \in J_{t_1}.$$

Le reste de la preuve est similaire que la preuve du théorème 3.1.2. Ceci complète la preuve. □

3.3 Exemples

Dans cette section, nous donnons deux exemples pour illustrer notre résultat principal.

Exemple 3.3.1. *Considérons le problème aux limites de Neumann suivant*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u\,(x,t) + \partial_t u(x,t) + (\|x\| + t)\, u(x,t) = t\Delta_x u(x,t), \;\; pour \;\; (x,t) \in B_\rho\,(0,d) \times \mathbb{R}^+, \\ \nabla_x u\,(x,t) = 0, \qquad pour\; tout\,(x,t) \in S\,(0,d) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{3.16}$$

avec $d > 0$ *et* $B_\rho\,(0,d) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < d\}$, $\Gamma = \partial\Omega$. *où* , $\Omega = B_\rho\,(0,d)$, $\Gamma = S\,(0,\rho)$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $r\,(t) = q\,(t) = 1$, $p\,(t,x) = \|x\| + t$, $a\,(t) = t$, *et* $f\,(t,x,u) = u$. *Alors* $b\,(t) = t$, $P\,(t) = t$, $e_{\ominus - \frac{q(t)}{r(t)}}\,(s,t) = e^{t-s}$ *et les hypothèses* (C_1)-(C_2) , (3.6) *sont vérifiées. Soit* $\delta\,(t) = 1$, *pour* $t \in \mathbb{R}^+$. *Ainsi,* (3.7) *est vérifiée. Par le théorème 3.1.1, l'équation* (3.16) *est oscillante.*

Exemple 3.3.2. *Considérons le problème aux limites de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta_t\,(t.\Delta_t u\,(x,t)) + \frac{t}{2}\Delta_t u(x,t) + u(x,t) = t\Delta_x u(x,t), \;\; pour \;\; (x,t) \in \Omega \times \mathbb{Z}^+, \\ u\,(x,t) = 0, \qquad pour \;\; (x,t) \in \Gamma \times \mathbb{Z}^+. \end{cases} \tag{3.17}$$

Où Ω *est un domaine borné dans* $\mathbb{R}^n$ *avec* $\Gamma = \partial\Omega$. *Alors,* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $r\,(t) = t$, $q\,(t) = \frac{t}{2}$, $p\,(t,x) = 1$, $a\,(t) = t$, *et* $f\,(t,x,u) = u$.
d'où $b\,(t) = t$, $P\,(t) = 1$, *donc*

$$e_{\ominus - \frac{q(t)}{r(t)}}\,(s,t) = e_1\,(s,t) = 2^{t-s}, \;\; pour\; tout\; t,s \in \mathbb{Z}^+.$$

Alors (3.6) *est vérifiée. Soit* $\theta\,(t) = 1$, *pour* $t \in \mathbb{Z}^+$, *remplacent* θ *dans* (3.12), *on obtient*

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} 2^{s+1}\left[s^2 + \lambda s\right]\Delta s = +\infty, \; pour\; tout\; \lambda > 0.$$

Ainsi, (3.12) *est vérifier. par le théorème 3.2.1 , l'équation* (3.17) *est oscillante.*

Bibliographie

[1] A. Benaissa Cherif, F. Z. Ladrani, A. Hammoudi, Oscillation theorems for higher order neutral nonlinear dynamic equations on time scales, *Malaya. J. Mat.* 4, 599–605, (2016).

[2] A. Benaissa Cherif, F. Z. Ladrani, Asymptotic behavior of solution for a fractional Riemann-Liouville differential equations on time scales, *Malaya. J. Mat.* 5, 561–568, (2017).

[3] M. Bohner, S.R. Grace, I. Jadlovská, Oscillation criteria for second-order neutral delay differential equations, *Elec. J. Qualitative Theory. Diff. Equ.* 2017.

[4] M. Bohner and G.S. Guseinov, Partial differentiation on time scales, *Dynam Systems Appl.* 13, 351–379, 2004.

[5] M. Bohner, A.Peterson, Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications. Birkäuser, Boston, (2001).

[6] M. Bohner, A. Peterson, Advences in Dynamic Equations on Time Scales, Boston, (2003).

[7] A. Beniani, A. Benaissa Cherif, Kh. Zennir and F. Z. Ladrani, Oscillation theorems for higher order nonlinear functional dynamic equations with unbounded neutral coefficients on time scales, Novi Sad J. Math. 2021.

[8] A. Cabada and D. R. Vivero. Expression of the lebesgue -integral on time scales as a usual lebesgue integral ; application to the calculus of -antiderivatives. Mathematical and Computer Modelling, 43(1-2) :194–207, 2006.

[9] J. Džurina, B. Baculíková and I. Jadlovská, Oscillation of solutions to fourth-order trinomial delay differential equations, *Ele. J. Diff. Equ*, No. 70, 1–10,(2015).

[10] L.C. Evans, Partail Differential Equations, American Math. Society, *Graduate Studies in Mathematics,* 19(2010).

[11] S. R. Grace, J. Džurina, I. Jadlovská and T. Li, On the oscillation of fourth-order delay differential equations, *Advances. Diff. Equ* 118, (2019).

[12] S. G. Georgiev, Functional Dynamic Équations on Time Scales

[13] S. Hilger, Ein Ma„kettenak*ü*l mit Anwendung auf Zentrumsannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität Würzburg, (1988).

[14] B. Jackson, Partial dynamic equations on time scales, *J. Comput. Appl. Math.* 186(2), 391–415, 2006.

[15] T. Kusano, J. V. Manojlovic, Precise Asymptotic Behavior of Regularly Varying Solutions of Second Order Half-Linear Differential Equations, *Elec. J. Qual. Theory. Diff. Equ.* 62, 1-24, (2016).

[16] F. Z. Ladrani, A. Benaissa Cherif, Oscillation Tests for Conformable Fractional Differential Equations with Damping, Punjab Univ. j. math. 51 No 12, 45–55, (2019).

[17] F. Z. Ladrani, A. Hammoudi, A. Benaissa Cherif, Oscillation theorems for fourth-order nonlinear dynamic equations on time scales, *Elec. J. Math. Anal. Appl*, 3, 46-58, (2015).

[18] R. Ramesh, Julio G. Dix, S. Harikrishnan, P. Prakash, Oscillation criteria for solution to partial dynamic equations on time scales, Hacet. J. Math. Stat, 49 (5), 1788–1797, 2020.

[19] S. Saker and M. Bohner. Oscillation of second order nonlinear dynamic équations on time scales. 2004.

[20] Y. Sui1, Z. Han, Oscillation of second order neutral dynamic equations with deviating arguments on time scales, *Advances. Diff. Equ*, (2018).

[21] A. B. Trajkovic, J. V. Manojlovic, Asymptotic behavior of intermediate solutions of Fourth-order nonlinear differential equations with regularly varying coefficients, *Ele. J. Diff. Equ*, No 129, 1-32, (2016).

Résumé

Ce travail est organisé en deux parties.

La première partie consiste à étudier de l'oscillation de la solution d'équation différentielle sur les échelle de temps du type

$$\left(\alpha\left(t\right)y^{\Delta_t}\left(x,t\right)\right)^{\Delta_t}+p(x,t)y(x,t)=\beta(t)\nabla_x^2 y\left(x,t\right)\quad (x,t)\in G\times[t_0,\infty)_{\mathbb{J}},$$

Dans la seconde partie on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle sur les échelle de temps de la forme

$$\left(r(t)\left(u^{\Delta}\left(x,t\right)\right)\right)^{\Delta}+q(t)u^{\Delta}(x,t)+p(x,t)f\left(t,x,u(x,t)\right)=a(t)\Delta_x u(x,t),$$

Mots clés

Les échelles de temps, Équation différentielle ordinaire, Théorie de l'oscillation , Èquations dynamique, Riccati technique