الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليـم العالـي والبحـث العلمـــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université Ain Temouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département des Mathématiques et de l'Informatique

MÉMOIRE
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations Différentielles et Modélisation

Problème aux limites pour des équations différentielles fractionnaires au sens Hadamard

Présenté Par :
1) Mlle CHERRAK BAKHTA CHAIMA

Devant le jury composé de :

Dr. BENDIMRED LAMIA	M.A.A	UAT.B.B	(Ain Temouchent)	Président
Dr. TCHOUAR FATIMA ZAHRA	M.C.B	UAT.B.B	(Ain Temouchent)	Examinateur
Dr. LADRANI FATIMA ZOHRA	M.C.A	E.N.S.O	(Oran)	Encadrant

Année Universitaire 2020/2021

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, Djelloul, Naima

Pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A ma chère sœur, Zakia pour son soutien et ses encouragements. A mes chers frères, Nacer, Sofiane pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral

A tous mes amis Doha, Amina et surtout Amine.

Pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire.

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier le Bon Dieu de m'avoir donné le courage et la volonté pour continuer et achever ce travail.

Je remercie vivement mon encadreur MME : LADRANI FATIMA ZOHRA d'avoir accepté de m'encadrer et aussi pour l'effort fournis, ses encouragements et ses précieux conseils tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens aussi à remercier également Mme TCHOUAR FATIMA ZAHRA et Mme BENDIMRED LAMIA, pour leurs conseils, leurs suggestions et leurs remarques judicieuses.

Nous adressons également notre profonde gratitude à tous les professeurs de l'université de Ain Temouchent.

Je voudrais également remercier mes parents, mes frères, ma sœur, mes amis et toute la famille.

Table des matières

Introduction générale

La dérivée fractionnaire est un ancien sujet, ses origines remontent à la fin du $17^{\text{ème}}$ siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt}$ pour désigne la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : que signifie $\dfrac{d^n f}{dt}$ si $n = \dfrac{1}{2}$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \dfrac{1}{2}$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Le calcul fractionnaire a été développé depuis la première conférence sur ce domaine en 1974. Depuis, il a gagné une popularité et une considération importante principalement aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie où il a été remarqué que le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques peut être décrit en utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire qui fournit un excellent instrument pour la description de plusieurs propriétés de matériaux et processus.

Donc, il est très important d'établir une théorie claire et nette pour l'étude et l'analyse des opérateurs et systèmes d'ordre fractionnaire.

Le sujet principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de solutions pour des problèmes aux limites pour des équations différentielles fractionnaires au sens Hadamard.

Mon mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire et quelques théorèmes fondamentaux utiles à la suite de ce travail.

Le deuxième chapitre sera présenté les définitions et quelques propriétés fondamentales de dérivée et intégrale fractionnaire au sens Hadamard.

Le troisième chapitre à pour but, l'étude de l'existence et l'unicité de solution pour un problème associé à une équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens Hadamard en utilisant des théorèmes du point fixe.

On terminera par une conclusion qui rassemblera tout ce qui a été fait.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions nécessaires pour la bonne compréhension de cette thèse : présentation des fonctions spéciales pour le calcul fractionnaire et un bref rappel sur les espaces fonctionnels concernés par notre travail.

On conclut le chapitre par une section réservée aux différentes notions d'analyse fonctionnelle fondamentales et quelques théorèmes de point fixe utilisés dans ce travail.

1.1 Fonctions spéciales pour le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions spéciales à savoir la fonction Gamma, bêta et Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle dans le calcul fractionnaire.

1.1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1.1. *La fonction Gamma d'Euler est tout simplement la généralisation de la factorielle à tous les nombres réels. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re\,(z) > 0$, on définit la fonction Gamma par :*

$$\Gamma\,(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Proposition 1.1.1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $Re(z) > 0$, la fonction Gamma Γ possède les propriétés fondamentales suivantes :*

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad \textit{et} \qquad \Gamma(1) = 1.\\
&\Gamma(n) = (n-1)!, \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.\\
&\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.\\
&\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}\\
&\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n+1)}.
\end{aligned}$$

1.1.2 Fonction Bêta d'Euler

Définition 1.1.2. *La fonction bêta est une fonction à deux variables complexes z et w, elle est définie par l'intégrale suivante :*

$$\beta(z,w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt,$$

avec $Re(z) > 0$, $Re(w) > 0$.

Proposition 1.1.2. *Pour tout $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ avec $Re(z) > 0$, $Re(w) > 0$, la fonction bêta vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
&\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},\\
&\beta(z,w) = \beta(w,z),\\
&\beta(z,w) = \beta(z+1,w) + \beta(z,w+1),\\
&\beta(z,w+1) = \frac{w}{z}\beta(z+1,w) = \frac{w}{w+z}\beta(z,w),\\
&\beta(z,w) = \int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}dt.
\end{aligned}$$

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.1.3. *La fonction de Mittag-Leffler est définie par la série de fonctions suivantes :*

$$E_\alpha(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{k=\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \ \textit{pour tout } \alpha > 0 \textit{ et } z \in \mathbb{C}.$$

La fonction généralisée de Mittag-Leffler est donnée par :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \alpha, \beta > 0, z \in \mathbb{C}$$

Remarque 1.1.1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $E_{\alpha,\beta}$ vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
&E_{1,1}(z) = e^z \\
&E_{1,m}(z) = \tfrac{1}{z^{m-1}}\left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \tfrac{z^k}{k!}\right], \textit{ pour tout } m \in \mathbb{N} \\
&E_{1,2}(z) = \frac{e^z-1}{z} \\
&E_{2,1}(z^2) = \cosh(z) \\
&E_{1,3}(z) = \frac{e^z-1-z}{z^2} \\
&E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}
\end{aligned}$$

1.2 Définitions et Théorèmes d'analyses Fonctionnelles

1.2.1 Espaces Fonctionnels

Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ avec $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Définition 1.2.1 (Espace des fonctions intégrables)**.** *[7]Pour $1 \leq p < \infty$,on note par $L^p([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des classes d'équivalence des fonctions de puissance p-intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

$$L^p([a,b],\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \ \textit{mesurable et} \ \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

avec

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_a^b |f(x)|^p dx.$$

L'espace $L^p([a,b],\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < \infty$ muni la norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de Banach. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur $[a, b]$, c'est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M : p.p \ sur \ [a,b]\}$$

Définition 1.2.2. *[7]Pour $1 \leq p < \infty$ et $c \in \mathbb{R}$, on note par $X_c^p([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions f réelles et mesurables sur $[a,b]$, muni de la norme :*

$$\|f\|_{X_c^p}^p = \int_a^b |x^c f(x)|^p \frac{dx}{x}.$$

Définition 1.2.3 (Espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$)**.** *[7]On désigne par $\mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieure ou égale à n continues sur $[a,b]$, muni de la norme*

$$\|f\|_{C^n} = \sum\nolimits_{k=0}^{k=n} \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(k)}(x)\right|.$$

En particulier si $n = 0$, $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions f continues sur $[a,b]$ muni de la norme

$$\|f\|_C = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Remarque 1.2.1. $(\mathcal{C}^n([a,b]), \|.\|_{\mathcal{C}^n})$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.2.4 (Espace des fonctions absolument continues)**.** *[7]On dit qu'une fonction f est absolument continue sur $[a,b]$ et on note $f \in \mathcal{AC}([a,b],\mathbb{R})$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition $\{a_k, b_k : k \in [1,n] \cap \mathbb{N}\} \subset [a,b]$, on a*

$$\sum\nolimits_{k=1}^{k=n} (b_k - a_k) < \delta \textit{ implique } \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Proposition 1.2.1. *[3]Si $f \in \mathcal{AC}([a,b],\mathbb{R})$, alors elle admet une dérivée intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ presque partout et :*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt, \qquad \textit{pour tout } x \in [a,b].$$

Proposition 1.2.2. *[3]L'espace $\mathcal{AC}([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_C + \left\|f'\right\|_{L^1}$ est un espace de Banach.*

Définition 1.2.5. *[7]On note par $\mathcal{AC}^n([a,b],\mathbb{R})$, la classe des fonctions f continûement dérivables jusqu'à l'ordre $n-1$ sur $[a,b]$ avec $f^{(n-1)} \in AC([a,b])$.*
En particulier $\mathcal{AC}^1([a,b],\mathbb{R}) = \mathcal{AC}([a,b],\mathbb{R})$.

Définition 1.2.6. *On définit l'espace* $AC^n_{\delta,\mu}([a,b],\mathbb{R})$ *des fonctions telle que*

$$\mathcal{AC}^n_{\delta,\mu}([a,b],\mathbb{R})=\left\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\delta^{n-1}x^{\mu}f(x)\in\mathcal{AC}([a,b],\mathbb{R})\right\}.$$

Avec $\mu\in\mathbb{R}$ *et* $\delta=x\dfrac{d}{dx}$.

Définition 1.2.7 (Espaces des fonctions continues avec poids)**.** *Soit* $\lambda\in\mathbb{R}$. *On désigne par* $\mathcal{C}_\lambda([a,b],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions* f *définies sur* $]a,b]$ *telles que la fonction*

$$\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\lambda}f(x)\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{C}_\lambda([a,b],\mathbb{R})=\left\{f\in\mathcal{C}_\lambda([a,b],\mathbb{R}):\lim_{x\to a^+}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\lambda}f(x)\ \textit{existe}\right\}.$$

Muni la norme

$$\|f\|_\lambda=\left\|\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\lambda}f(x)\right\|_{\mathcal{C}}=\sup_{x\in[a,b]}\left|\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\lambda}f(x)\right|.$$

L'espace $\mathcal{C}_\lambda([a,b],\mathbb{R})$ *est appelée l'espace des fonctions continue avec poids.*
On peut montrer que $\|.\|_\lambda$ *est une norme et que* $(\mathcal{C}_\lambda([a,b]),\mathbb{R},\|.\|_\lambda)$ *est un espace de Banach.*

Remarque 1.2.2. *En particulier* $\mathcal{C}_0([a,b],\mathbb{R})=\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$*, il est clair que* $\mathcal{C}_0([a,b],\mathbb{R})\not\subset\mathcal{C}_\lambda([a,b],\mathbb{R})$.

Définition 1.2.8. *Soit* $\lambda\in\mathbb{C}$*, tel que* $0\leq Re(\lambda)<1$. *Pour un sous ensemble* $\mathcal{H}$ *de* $\mathcal{C}_\lambda([a,b],\mathbb{R})$*, on définit* $\mathcal{H}_\lambda$ *par :*

$$\mathcal{H}_\lambda=\{f_\lambda:f\in\mathcal{H}\},$$

avec

$$f_\lambda(x)=\begin{cases}\left(\ln\dfrac{x}{a}\right)^{\lambda}f(x), & x\in\,]a,b]\\ \lim\limits_{x\to a^+}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\lambda}f(x), & x=a\end{cases}$$

donc $f_\lambda\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Définition 1.2.9. *Construisons l'espace généralisé* $\mathcal{C}_{\mu,\lambda,\ln}([a,b],\mathbb{R})$ *défini par :*

$$\mathcal{C}_{\mu,\lambda,\ln}([a,b],\mathbb{R}) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\lambda} x^{\mu} f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \right\}.$$

Muni la norme

$$\|f\|_{\mu,\lambda,\ln} = \left\| \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\lambda} x^{\mu} f(x) \right\|_{\mathcal{C}}$$

En particulier

$$\mathcal{C}_{0,\lambda,\ln}([a,b],\mathbb{R}) \equiv \mathcal{C}_{\lambda,\ln}([a,b],\mathbb{R}) \quad \textit{et} \quad \mathcal{C}_{0,0,\ln}([a,b],\mathbb{R}) \equiv \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$$

Ainsi soit-il E et F sont des espaces de Banach munis des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$ respectivement, K un compact dans E et $\mathcal{C}(E,F)$ l'éspace des fonctions continues muni de la norme uniforme

$$\|f\|_C = \sup_{x \in K} \|f(x)\|_F .$$

Définition 1.2.10 (Equicontinuité)**.** *Soit* $\mathcal{H}$ *une partie de* $\mathcal{C}(E,F)$. *On dira que* $\mathcal{H}$ *est équicontinue en* x_0 *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$, *tel que*

$$\forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_E < \eta \qquad \textit{implique} \qquad \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon, \ \forall f \in \mathcal{H}.$$

On dira que $\mathcal{H}$ *est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de* E.

Remarque 1.2.3. *Le point important,* η *ne dépend pas de* f.

Définition 1.2.11. *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach. L'application* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est dite compacte si :*

i) $\mathcal{F}$ *est continue sur* E.

ii) $\mathcal{F}(E)$ *est relativement compact dans* F.

Définition 1.2.12. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach. L'application* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est dite complètement continue si :*

i) $\mathcal{F}$ *est continue sur* E.

ii) Pour tout sous-ensemble borné A *de* E, *implique que* $\mathcal{F}(A)$ *est relativement compacte dans* F.

Définition 1.2.13. *Soit $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (E, \|.\|_E)$ une application. Un élément x_0 de E est dit point fixe de $\mathcal{F}$ si :*

$$\mathcal{F}(x_0) = x_0.$$

Définition 1.2.14. *Soit $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}(E, F)$. On dit que $\mathcal{H}$ est uniformément borné s'il existe une constante $\rho > 0$ telle que*

$$\|f\|_C < \rho, \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{H}$$

1.2.2 Théorie d'Ascoli-Arzéla

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications entre autre la compacité de certains opérateurs. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues.

Théorème 1.2.1. *[7]Soit K un sous-ensemble compact dans E et $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}(K, F)$. Alors, $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(K, F)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $\mathcal{H}$ est équicontinue

ii) $\forall x \in K$, $\mathcal{H}_x = \{f(x) : f \in \mathcal{H}\}$ est relativement compacte dans F.

Remarque 1.2.4. *Pour qu'une partie $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, soit relativement compact il faut et il suffit qu'elle soit uniformément bornée et équicontinue.*

Le Théorème suivant est une extension naturelle du Théorème d'Ascoli-Arzéla.

Corollaire 1.2.1. *Soit $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}_\lambda([a, b], \mathbb{R})$. Alors, $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_\lambda([a, b], \mathbb{R})$ si et seulement si $\mathcal{H}_\lambda$ est relativement compact dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$*

1.2.3 Théorème de point fixe

Principe de contraction de Banach

Définition 1.2.15. *Soit $\mathcal{F}$ une application d'un espace de Banach de E dans lui même. On dit que $\mathcal{F}$ est lipschitzienne s'il existe un nombre $k > 0$ tel que :*

$$\|\mathcal{F}x - \mathcal{F}y\|_E \leq k\|x - y\|_E, \qquad \text{pour tout } x, y \in E.$$

Si $0 < k < 1$, on dit alors que $\mathcal{F}$ est une contraction.

Théorème 1.2.2. *[16]Soit $\mathcal{F}$ une application d'un espace de Banach E dans lui même tel que soit $\mathcal{F}$ une contraction, alors $\mathcal{F}$ admet un point fixe unique dans E ,i.e. il existe un unique $u \in E$ tel que*

$$\mathcal{F}u = u.$$

Alternative non linéaire de Leray-Schauder

Théorème 1.2.3. *[16]Soient E un espace de Banach, $\mathcal{U}$ un sous-ensemble ouvert borné de E, avec $0 \in \mathcal{U}$ et $\mathcal{F} : \overline{\mathcal{U}} \longrightarrow E$ une application complètement continue, alors*

(i) $\mathcal{F}$ admet un point fixe dans $\overline{\mathcal{U}}$, ou bien

(ii) Il existe $y \in \partial\mathcal{U}$ tel que $y = \lambda T(y)$ pour tout $\lambda \in \left]0, 1\right[$.

1.3 Inégalité de Gronwall généralisée

Lemme 1.3.1. *[8]Soient x, h, k des fonctions continues sur $[a, b]$, telle que*

$$k(t) \geq 0, \text{ pour tout } t \in [a, b].$$

Si

$$x(t) \leq h(t) + \int_a^t k(s)\, x(s)\, ds, \text{ pour tout } t \in [a, b].$$

Alors

$$x(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)\, k(s) \exp\left[\int_s^t k(\tau)\, d\tau\right] ds, \quad \textit{pour tout } t \in [a,b].$$

Si en plus h est croissante sur $[a,b]$, alors

$$x(t) \leq h(t) \exp\left(\int_a^t k(s)\, ds\right), \quad \textit{pour tout } t \in [a,b].$$

Lemme 1.3.2. *[8]Soient $\alpha > 0$, a et u deux fonctions positives et localement intégrables sur $[1,b]$, si g est une fonction continue positive et croissante sur $[1,b]$, telle que $g(t) \leq M$, pour tout $t \in [1,b]$, et :*

$$u(t) \leq a(t) + g(t) \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} u(s)\, ds,, \quad \textit{pour tout } t \in [1,b], \tag{1.1}$$

alors

$$u(t) \leq a(t) + \int_1^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} \left(\ln\left(\frac{t}{s}\right)\right)^{n\alpha-1}\right] \frac{ds}{s}, \quad \textit{pour tout } t \in [1,b], \tag{1.2}$$

Remarque 1.3.1. *Si $g(t) = b > 0$ et*

$$u(t) \leq a(t) + b \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} u(s) \frac{ds}{s}.$$

Alors

$$u(t) \leq a(t) + \int_1^t \left(\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{(b\Gamma(\alpha))^n}{\Gamma(n\alpha)} \left(\ln\left(\frac{t}{s}\right)\right)^{n\alpha-1} a(s)\right) \frac{ds}{s}, \quad \textit{pour tout } t \in [1,b],$$

Corollaire 1.3.1. *[8]Sous les hypothèse du lemme 1.3.2. Supposons que a est une fonction non décroissante sur $[1,b]$, alors*

$$u(t) \leq a(t)\, E_{\alpha,1}\left(g(t)\Gamma(\alpha)(\ln t)^{\alpha}\right), \quad \textit{pour tout } t \in [1,b],$$

avec $E_{\alpha,1}$ la fonction de Mittag Leffler définie par :

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Chapitre 2

Opérateurs de Hadamard

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que l'intégration fractionnaire de Hadamard, la dérivation fractionnaire au sens d'Hadamard.

2.1 Intégrale fractionnaire de type Hadamard

Nous présentons principalement quelques définitions de base, les propriétés liées à l'intégrale et à la dérivée fractionnaire de type Hadamard. Tout d'abord soit f une fonction définie sur $[a,b]$ où $0 \leq a \leq b \leq \infty$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.1.1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégration d'ordre n de type Hadamard pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$ est donnée par la formule suivante :*

$$\begin{aligned}\left({}^{H}\mathcal{I}^{n}_{a^+,\mu}f\right)(x) &= x^u \int_a^x \frac{dt_1}{x_1} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{x_2} \cdots \int_a^{t_{n-1}} t_n^{\mu} f\left(t_n\right) \frac{dt_n}{t_n} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{n-1} \frac{f(t)}{t} dt, \quad \textit{pour tout } x > a\end{aligned}$$

On peut généraliser, d'une manière naturelle, la formule précédente pour $n = \alpha$ qui est un nombre réel quelconque par la définition suivante.

Définition 2.1.1. *[9]L'intégrale fractionnaire de type Hadamard avec paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$\left({}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \left(\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt. \tag{2.1}$$

Pour le cas $\mu = 0$, on obtient

$$\left({}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,u} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right)^{\alpha-1} \frac{f(t)}{t} dt$$

Remarque 2.1.2. *si $\alpha = 1$ dans l'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard (2.1), on obtient*

$${}^H\mathcal{I}^{1}_{a^+,\mu} f(x) = \int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu} \frac{f(t)}{t} dt. \tag{2.2}$$

Exemple 2.1.1. *Soit f la fonction définie sur $[a, b]$ par :*

$$f(x) = x^{-\mu} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\beta-1}, \quad \textit{avec } 0 < \alpha < 1 \quad \textit{et} \quad \beta > 0.$$

On a

$${}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} f\,(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} x^{-u} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}, \quad \textit{pour tout } x \geq a. \tag{2.3}$$

En effet :

$${}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} \left[x^{-\mu} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right] = \frac{x^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\beta-1} \frac{dt}{t}.$$

En effectuant le changement de variable $\ln\left(\frac{x}{a}\right) y = \ln\left(\frac{t}{a}\right)$, *ce qui donne* $\ln\left(\frac{x}{a}\right) dy = \frac{dt}{t}$, *alors*

$$\begin{aligned} {}^H I^{\alpha}_{a^+,u} \left[x^{-\mu} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right] &= \frac{x^{-\mu} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy \\ &= \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)} x^{-\mu} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{-\mu} \left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

Remarque 2.1.3. *Intégrale de type Hadamard de (2.3) avec $\mu = 0$ est donnée par :*

$$ {}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta+\alpha-1}, \quad \text{pour tout } x \geq a. \tag{2.4} $$

Proposition 2.1.1. *Soit $f \in X_{\mu}^{1}([a,b],\mathbb{R})$, alors*

(1) *L'intégrale ${}^{H}\mathcal{I}_{a^+,\mu}^{\alpha} f$ existe pour presque tout t dans $[a,b]$,*

(2) *La fonction ${}^{H}\mathcal{I}_{a^+,\mu}^{\alpha} f$ est un élément de $X_{\mu}^{1}([a,b],\mathbb{R})$.*

Démonstration.

Par l'équation (2.1), nous avons

$$ \begin{aligned} \left|\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^+,\mu}^{\alpha} f\right)(x)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right)^{\alpha-1}\left|\frac{f(t)}{t}\right| dt \\ &\leq \frac{x^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)}\left|\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right|^{\alpha-1}\int_a^x t^{\mu}\left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty, \quad \text{pour tout } x \in [a,b], \end{aligned} $$

Puisque $f \in X_{\mu}^{1}([a,b],\mathbb{R})$, alors ${}^{H}\mathcal{I}_{a^+,\mu}^{\alpha} f$ existe pour presque tout x dans $[a,b]$, on a

$$ \begin{aligned} \int_a^b x^{\mu}\left|\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^+,\mu}^{\alpha} f\right)(x)\right|\frac{dx}{x} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right|^{\alpha-1}\|f\|_{X_{\mu}^{1}}\int_a^b \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right|^{\alpha}\|f\|_{X_{\mu}^{1}}, \end{aligned} $$

ce qui implique

$$ \left\|{}^{H}\mathcal{I}_{a^+,\mu}^{\alpha} f\right\|_{X_{\mu}^{1}} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\ln\left(\frac{b}{a}\right)\right|^{\alpha}\|f\|_{X_{\mu}^{1}}. $$

□

2.2 La dérivée fractionnaire de type Hadamard

Définition 2.2.1. *[9]La dérivée fractionnaire de type Hadamard avec paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ est définie par :*

$$ \left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+,\mu}^{\alpha} f\right)(x) = x^{-\mu}\delta^{n}\left[x^{\mu}\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^+,\mu}^{n-\alpha} f(x)\right)\right]. \tag{2.5} $$

Avec $\delta = x\dfrac{d}{dx}$, $n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{N}$, $x \in [a,b]$ et $0 \leq a < b \leq \infty$.

Remarque 2.2.1. *Dans le cas* $\mu = 0$ *la définition* (2.2.1) *est donnée :*

$$^{H}\left(\mathcal{D}_{a}^{\alpha} f\right)(x) = \delta^{n}\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^{+}}^{n-\alpha} f(x)\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\delta^{n} = \delta^{n-1} \circ \delta = \delta \circ \delta^{n-1}.$$

Alors

$$\delta^{2} = \delta \circ \delta = x^{2} \frac{d^{2}}{dx^{2}} + x \frac{d}{dx}.$$

Si $\alpha = n$, *dans* (2.5), *on a*

$$^{H}\mathcal{D}_{a^{+},\mu}^{\alpha} f(x) = x^{-\mu} \delta^{n}\left(x^{\mu} f(x)\right) = (\delta + \mu)^{n} f(x).$$

En particulier $\alpha = 1$, *alors*

$$^{H}\mathcal{D}_{a^{+},\mu}^{1} f(x) = (\delta + \mu) f(x) = \mu f(x) + x \frac{d}{dx} f(x).$$

Remarque 2.2.2. *Soient* $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $a > 0$, *alors*

$$\delta^{n}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\alpha-n}, \quad \textit{pour tout } x \geq a.$$

et

$$\delta^{n}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{n} = n\Gamma(n), \quad \textit{pour tout } x \geq a.$$

$$\delta^{n+1}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{n} = 0, \quad \textit{pour tout } x \geq a.$$

Exemple 2.2.1. *Soit* f *la fonction définie sur* $[a, b]$ *par :*

$$f(x) = x^{-\mu}\left(\ln \frac{x}{a}\right)^{\beta-1}, \ \textit{avec } 0 < \alpha < 1 \quad \textit{et} \quad \beta > 0.$$

Alors

$$^{H}\mathcal{D}_{a^{+},\mu}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{-\mu}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta-\alpha-1}, \quad \textit{pour tout } x \geq a. \tag{2.6}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+,\mu}\left[x^{-\mu}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right] &= x^{-\mu}\delta^{n}x^{\mu}\left[{}^{H}\mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+,\mu}x^{-\mu}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta-1}\right]\\
&= x^{-\mu}\delta x^{\mu}\left[{}^{H}\mathcal{I}^{1-\alpha}_{a^+,\mu}x^{-\mu}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta-1}\right]\\
&= x^{-\mu}\delta x^{\mu}\left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{-\mu}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta-\alpha}\right]\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{-\mu}\delta\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Par la remarque 2.2.2, on a

$$\begin{aligned}
{}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+,\mu}\left[x^{-\mu}\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right] &= \frac{\Gamma(\beta)(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{-\mu}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta-\alpha-1}\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}x^{-\mu}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.3. *La dérivée de type Hadamard de (2.6) avec $\mu = 0$ est donnée par :*

$$ {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\left(\left(\ln\frac{x}{a}\right)^{\beta-1}\right) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{\beta-\alpha-1}, \quad \textit{pour tout } x \geq a. $$

Pour $\beta = 1$, on a

$$ {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\ln\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{-\alpha}, \quad \textit{pour tout } x \geq a. $$

Donc la dérivée fractionnaire d'une constante au sens Hadamard n'est pas nulle.

2.3 Propriétés de la dérivation et l'intégrale fractionnaire de Hadamard

Proposition 2.3.1. *[9]Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$ et $\mu \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in X^1_\mu([a,b],\mathbb{R})$, on a*

$$ \left({}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu}\circ{}^{H}\mathcal{I}^{\beta}_{a^+,\mu}f\right)(x) = {}^{H}\mathcal{I}^{\alpha+\beta}_{a^+,\mu}f(x). \tag{2.7} $$

Démonstration.

Pour tout $f \in X^1_\mu([a,b],\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}\left({}^H\mathcal{I}^\alpha_{a^+,\mu}\circ{}^H\mathcal{I}^\beta_{a^+,\mu}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{s}{x}\right)^\mu\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left({}^H\mathcal{I}^\beta_{a^+,\mu}f\right)(s)\frac{ds}{s}\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\frac{s}{x}\right)^\mu\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^s\left(\frac{t}{s}\right)^\mu\left(\ln\frac{s}{t}\right)^{\beta-1}f(t)\frac{dt}{t}\right)\frac{ds}{s}\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème de Fubini nous pouvons échanger l'ordre de l'intégrale et obtenir

$$\left({}^H\mathcal{I}^\alpha_{a^+,\mu}\circ{}^H\mathcal{I}^\beta_{a^+,\mu}f\right)(x) = \frac{x^{-\mu}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x t^{\mu-1}f(t)\left(\int_t^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{t}\right)^{\beta-1}\frac{ds}{s}\right)dt.$$

On change de variable en posant $\left(\ln\frac{x}{t}\right)\tau = \ln\frac{s}{t}$, ce qui donne

$$\frac{ds}{s} = \left(\ln\frac{x}{t}\right)d\tau,$$

alors

$$\begin{aligned}\int_t^x\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{t}\right)^{\beta-1}\frac{ds}{s} &= \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau\\ &= \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1}\beta(\alpha,\beta)\\ &= \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left({}^H\mathcal{I}^\alpha_{a^+,\mu}\circ{}^H\mathcal{I}^\beta_{a^+,\mu}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x\left(\frac{s}{x}\right)^\mu\left(\ln\frac{x}{s}\right)^{\alpha+\beta-1}f(s)\frac{ds}{s}\\ &= \left({}^H\mathcal{I}^{\alpha+\beta}_{a^+,\mu}f\right)(x).\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.1. *Sous les hypothèses de la proposition 2.3.1, on a*

$$\left({}^H\mathcal{I}^\alpha_{a^+,\mu}\circ{}^H\mathcal{I}^\beta_{a^+,\mu}f\right)(x) = \left({}^H\mathcal{I}^\beta_{a^+,\mu}\circ{}^H\mathcal{I}^\alpha_{a^+,\mu}f\right)(x)$$

Proposition 2.3.2. *Soit* $f \in X^1_\mu([a,b],\mathbb{R})$, *on a alors*

$$\lim_{\alpha\to 0^+} {}^H\mathcal{I}^\alpha_{a^+,\mu} f(x) = f(x).$$

$$\lim_{\alpha\to 0^+} {}^H\mathcal{D}^\alpha_{a^+,\mu} f(x) = f(x).$$

Démonstration.

En utilisant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0^+}\left({}^H\mathcal{I}^\alpha_{a^+,\mu} f(x)\right) &= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\frac{t}{x}\right)^\mu \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{f(t)}{t}dt \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{-1}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{t}{x}\right)^\mu f(t)\left(\ln\frac{x}{t}\right)^\alpha\Big|_a^x \\
&+ \lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^\alpha d\left[\left(\frac{t}{x}\right)^\mu f(t)\right]dt \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0^+} {}^H\mathcal{D}^\alpha_{a^+,\mu} f(x) &= \lim_{\alpha\to 0^+} x^{-\mu}\left(x\frac{d}{dx}\right)\left\{x^\mu\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x\left(\frac{t}{x}\right)^\mu\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{-\alpha} f(t)\frac{dt}{t}\right\} \\
&= x^{-\mu+1}\frac{d}{dx}\left(\int_a^x t^\mu f(t)\frac{dt}{t}\right) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.3. *[9]Soient* $\alpha \geq \beta > 0$, $0 \leq a \leq b \leq \infty$ *et* $\mu \in \mathbb{R}$, *pour* $f \in X^1_\mu([a,b],\mathbb{R})$, *on a*

$$\left({}^H\mathcal{D}^\beta_{a^+,\mu} \circ {}^H\mathcal{I}^\alpha_{a^+,\mu} f\right)(x) = {}^H\mathcal{I}^{\alpha-\beta}_{a^+,\mu} f(x). \tag{2.8}$$

Démonstration.

Soit $f \in X^1_\mu([a,b],\mathbb{R})$, on a

$$\left({}^H\mathcal{D}^\beta_{a^+,\mu} f\right)(x) = x^{-\mu}\delta^n x^\mu\left({}^H\mathcal{I}^{n-\beta}_{a^+,\mu} f(x)\right).$$

Avec $n = [\beta] + 1$, alors

$$\left({}^H\mathcal{D}^{\beta}_{a^+,\mu} \circ^H \mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} f\right)(x) = x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}\left(\left({}^H\mathcal{I}^{n-\beta}_{a^+,\mu} \circ^H \mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu}\right) f(x)\right),$$

Par (2.7), on a

$$\begin{aligned}\left({}^H\mathcal{D}^{\beta}_{a^+,\mu} \circ^H \mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} f\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}\left({}^H\mathcal{I}^{\alpha+n-\beta}_{a^+,\mu} f(x)\right)\\ &= x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}\left({}^H\mathcal{I}^{n}_{a^+,\mu}\left({}^H\mathcal{I}^{\alpha-\beta}_{a^+,\mu} f(x)\right)\right).\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\delta^n x^{\mu}\left({}^H\mathcal{I}^{n}_{a^+,\mu} f(x)\right) &= \frac{1}{(n-1)!}\delta^n\int_a^x t^{\mu-1}\left(\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right)^{n-1} f(t)\,dt\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x t^{\mu-1} f(t)\,\delta^n\left(\ln\left(\frac{x}{t}\right)\right)^{n-1} dt\\ &= x^{\mu} f(x).\end{aligned}$$

d'où

$$\left({}^H\mathcal{D}^{\beta}_{a^+,\mu} \circ^H \mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} f\right)(x) = {}^H\mathcal{I}^{\alpha-\beta}_{a^+,\mu} f(x).$$

□

Proposition 2.3.4. *[9]Soit $n-1 < \alpha < \beta \leq n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq a < b \leq \infty$ et soit $\mu \in \mathbb{R}$ pour $\mu \geq c$ et pour $f \in X^p_c([a,b],\mathbb{R})$ et ${}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} f \in \mathcal{AC}^n_{s,\mu}([a,b],\mathbb{R})$ on a*

$${}^H\mathcal{D}^{\beta}_{a^+,\mu} \circ {}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x) = {}^H\mathcal{D}^{\beta-\alpha}_{a^+,\mu} f(x) \tag{2.9}$$

Démonstration.

D'après la définition de l'intégrale (2.1) et la dérivée (2.5), on a

$$\begin{aligned}\left({}^H\mathcal{D}^{\beta}_{a^+,\mu} \circ {}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} f\right)(x) &= x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}\left({}^H\mathcal{I}^{n-\beta}_{a^+,\mu}\,{}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} f(x)\right)\\ &= x^{-\mu}\delta^n x^{\mu}\left({}^H\mathcal{I}^{n-\beta+\alpha}_{a^+,\mu} f(x)\right)\\ &= x^{-\mu}\delta\delta^{n-1} x^{\mu}\left({}^H\mathcal{I}^{n-\beta+\alpha}_{a^+,\mu} f(x)\right)\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\delta^{n-1}x^{\mu}\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^{+},\mu}^{n-\beta+\alpha}f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(n+\alpha-\beta)}\delta^{n-1}\left(\int_{a}^{x}t^{\mu}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{n+\alpha-\beta-1}f(t)\,\frac{dt}{t}\right)\\
&= \frac{(n+\alpha-\beta-1)(n+\alpha-\beta-2)\ldots(n+\alpha-\beta-(n-1))}{\Gamma(n+\alpha-\beta)}\times\\
&\times\int_{a}^{x}t^{\mu}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-\beta}f(t)\,\frac{dt}{t}\\
&= \frac{x^{\mu}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\int_{a}^{x}\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{(\alpha-\beta+1)-1}f(t)\,\frac{dt}{t}\\
&= x^{\mu}{}^{H}\mathcal{I}_{a^{+},\mu}^{\alpha-\beta+1}f(x).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^{+},\mu}^{\beta}\,{}^{H}\mathcal{I}_{a^{+},\mu}^{\alpha}f\right)(x) &= x^{-\mu}\delta x^{\mu}\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^{+},\mu}^{1+\alpha-\beta}f(x)\right)\\
&={}^{H}\mathcal{D}_{a^{+},\mu}^{\beta-\alpha}f(x).
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.3.5. *[9]Soient $\beta\geq\alpha>0$, $n-1<\alpha\leq n$, $n\in\mathbb{N}$, $m-1<\beta\leq m$, $m\in\mathbb{N}$, $0\leq a\leq b\leq\infty$, $1\leq p\leq\infty$ et soit $\mu, c\in\mathbb{R}$ avec $\mu\geq c$ et pour $f\in\mathcal{AC}_{\delta,\mu}^{m}([a,b],\mathbb{R})$ et ${}^{H}\mathcal{D}_{a,\mu}^{\alpha}f\in X_{C}^{p}([a,b],\mathbb{R})$ on a*

$$ {}^{H}\mathcal{I}_{a^{+},\mu}^{\beta}\circ{}^{H}\mathcal{D}_{a^{+},\mu}^{\alpha}f(x)={}^{H}\mathcal{I}_{a^{+},\mu}^{\beta-\alpha}f(x). \tag{2.10}$$

Lemme 2.3.1. *[6]Soit $n-1<\alpha\leq n$ et f une fonction vérifiant*

$$ {}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}f(t)=0 \tag{2.11}$$

Si et seulement si

$$ f(t)=\sum\nolimits_{j=1}^{j=n}c_{j}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}. \tag{2.12}$$

On a la formule suivante :

$$\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^{+}}^{\alpha}\circ{}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{\alpha}\right)f(t)=f(t)+\sum\nolimits_{j=1}^{j=n}c_{j}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}. \tag{2.13}$$

où $c_{j}\in\mathbb{R}$, pour tout $j\in\{1,2,3,...,n\}$.

Démonstration.

Supposons que

$$ {}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t) = 0 $$

D'après la remarque 2.2.1 on a

$$ \delta^{n} \circ {}^{H}\mathcal{I}_{a^{+}}^{n-\alpha} f(t) = 0 $$

Par la remarque 2.2.2, on trouve que

$$ {}^{H}\mathcal{I}_{a^{+}}^{n-\alpha} f(t) = \sum_{j=1}^{j=n} c_{j} \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{j} $$

En appliquant l'opérateur ${}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{n-\alpha}$, nous obtenons

$$ \left({}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{n-\alpha} \circ {}^{H}\mathcal{I}_{a^{+}}^{n-\alpha} \right) f(t) = \sum_{j=1}^{j=n} c_{j} \left({}^{H}\mathcal{D}_{a^{+}}^{n-\alpha} \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{j} \right). $$

Maintenant, l'utilisation de l'exemple 2.2.1 donne :

$$ f(t) = \sum_{j=1}^{j=n} \widetilde{c_{j}} \left(\ln \left(\frac{t}{a} \right) \right)^{\alpha-j}. $$

Inversement, on a :

$$ f(t) = \sum_{j=1}^{j=n} c_{j} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha-j}. $$

En appliquant l'opérateur ${}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$, nous obtenons

$$ {}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t) = \sum_{j=1}^{j=n} c_{j} \left({}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha-j} \right). $$

Par l'exemple 2.2.1, on a

$$ {}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t) = 0. $$

D'autre part, puis que

$$ \left({}^{H}\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \circ {}^{H}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \right) f(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{j=n} c_{j} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\alpha-j}. $$

est équivalente à

$$h(t) = \left({}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} \circ {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\right) f(t) - f(t) = \sum_{j=1}^{j=n} c_j \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}.$$

Alors

$${}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} h(t) = 0$$

C'est-à-dire

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} h(t) &= {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \left(\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} \circ {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\right) f(t) - f(t)\right) \\ &= \left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} \circ {}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} \circ {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\right) f(t) - {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) \\ &= {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) - {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) = 0. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.2. *[6]Soient $n-1<\alpha\leq n$, $\mu\neq 0$ et f une fonction vérifiant*

$${}^{H}\mathcal{D}_{a^+,\mu}^{\alpha} f(t) = 0$$

Si et seulement si

$$f(t) = \sum_{j=1}^{j=n} c_j t^{-\mu} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}.$$

On a la formule suivante :

$$\left({}^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha} \circ {}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\right) f(t) = f(t) + \sum_{j=1}^{j=n} c_j t^{-\mu} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-j}.$$

où $c_j \in \mathbb{R}$, pour tout $j \in \{1,2,3,...,n\}$.

Chapitre 3

Existence et unicité de solution pour un problème associé à une équation différentielle d'ordre fractionnaire

3.1 Caractérisation de la solution

Dans cette section, nous allons caractériser la solution du problème de Cauchy d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard par la méthode de la variation de la constante dans le cas $0 < \alpha < 1$ et $\mu \neq 0$.

Lemme 3.1.1. *Le problème suivant*

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}_{a,\mu}^{\alpha} u\left(t\right) = 0, \quad a < t \leq b, \\ u\left(t_0\right) = u_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

admet une unique solution dans $\mathcal{C}_{\mu,1-\alpha,\ln}\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\right)$, *elle est donnée par :*

$$u\left(t\right) = u_0 t_0^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha} t^{-\mu}\left(\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right)^{\alpha-1}, \qquad \textit{pour tout } t \in \left[a,b\right]. \tag{3.2}$$

Démonstration.

D'après le lemme 2.3.2 la solution de l'équation (3.1) est donnée par :

$$u(t) = ct^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b].$$

D'autre part, on a :

$$u(t_0) = c(t_0)^{-\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha-1} = u_0,$$

Donc

$$c = u_0 t_0^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}.$$

Par conséquent

$$u(t) = u_0 t_0^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha} t^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b].$$

□

Remarque 3.1.1. *Si $t_0 = a$, alors l'unique solution du problème homogène (3.1) est la solution triviale.*

Lemme 3.1.2. *Le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a,\mu}u(t) = 0, & a < t \leq b \\ \lim\limits_{t\to a^+} \ln\left(\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} u(t) = u_0, \end{cases} \tag{3.3}$$

admet une unique solution dans $\mathcal{C}_{\mu,1-\alpha,\ln}([a,b],\mathbb{R})$, qui est donnée par :

$$u(t) = u_0 a^{\mu} t^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}, \qquad \textit{pour tout } t \in [a,b]. \tag{3.4}$$

Démonstration.

D'après le lemme 2.3.2 la solution de l'équation est donnée par :

$$u(t) = ct^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b].$$

Multiplions les deux membres de l'égalité par $\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}$ et par passage à la limite, on a :

$$u_0 = \lim_{t\to a^+}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha} u(t) = \lim_{t\to a^+} ct^{-\mu},$$

Donc $c = u_0 a^{\mu}$, par conséquent

$$u(t) = u_0 a^{\mu} t^{-\mu} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}, \qquad \text{pour tout } t \in [a,b]. \tag{3.5}$$

□

Théorème 3.1.1. *Le problème suivant*

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a,\mu} u(t) = u(t), & a < t \leq b \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

admet une unique solution dans $\mathcal{C}_{\mu,1-\alpha,\ln}([a,b],\mathbb{R})$, *qui est donnée par :*

$$u(t) = u_0 t_0^{\mu} \left(\ln \frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha} \left(E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln \frac{t_0}{a}\right)^{\alpha}\right)^{-1} t^{-\mu} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha}\right), \tag{3.7}$$

pour tout $t \in [a,b]$.

Démonstration.
On a

$${}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a,\mu} u(t) = u(t),$$

En appliquant l'opérateur ${}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu}$ aux deux membres de l'égalité on a :

$${}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} \circ {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+,\mu} u(t) = {}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} u(t)$$

Par le lemme 2.3.2, nous avons

$$u(t) = c t^{-\mu} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + {}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} u(t), \quad c \in \mathbb{R}$$

Par itération, on obtient

$$\begin{aligned} u(t) &= c t^{-\mu} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + {}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} \left[c t^{-\mu} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + {}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} u(t)\right] \\ &= c t^{-\mu} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{c\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} t^{-\mu} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{2\alpha-1} + {}^{H}\mathcal{I}^{2\alpha}_{a^+,\mu} u(t) \\ &= c t^{-\mu} \Gamma(\alpha) \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(2\alpha)} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{2\alpha-1} + \ldots + \frac{1}{\Gamma(n\alpha)} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{n\alpha-1}\right] \\ &+ {}^{H}\mathcal{I}^{n\alpha}_{a^+,\mu} u(t). \end{aligned}$$

Montrons que

$$\lim_{n\to\infty}\left\| {}^{H}\mathcal{I}_{a^+,\mu}^{n\alpha}u\left(t\right)\right\| = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}\left| {}^{H}\mathcal{I}_{a^+,\mu}^{n\alpha}u\left(t\right)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma\left(n\alpha\right)}\int_a^t \left|\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{n\alpha-1}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}u\left(\tau\right)\right|\frac{d\tau}{|\tau|}\\ &\leq \frac{t^{-\mu}}{\Gamma\left(n\alpha\right)}\|u\|_{\mu,1-\alpha,\ln}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{n\alpha-1}\left(\ln\frac{\tau}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}\\ &\leq \frac{\Gamma\left(\alpha\right)}{\Gamma\left(n\alpha+\alpha\right)}t^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{n\alpha+\alpha-1}\|u\|_{\mu,1-\alpha,\ln}\end{aligned}$$

Lorsque $n\to\infty$, on a

$$\begin{aligned}u\left(t\right) &= ct^{-\mu}\Gamma\left(\alpha\right)\left[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma\left(2\alpha\right)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{2\alpha-1}+...+\frac{1}{\Gamma\left(n\alpha\right)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{n\alpha-1}+...\right]\\ &= ct^{-\mu}\Gamma\left(\alpha\right)\left[\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}+\frac{1}{\Gamma\left(2\alpha\right)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{2\alpha-1}+...+\frac{1}{\Gamma\left(n\alpha\right)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{n\alpha-1}+...\right]\\ &\times\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\times\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\\ &= ct^{-\mu}\Gamma\left(\alpha\right)\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}\right)\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$u\left(t_0\right) = ct_0^{-\mu}\Gamma\left(\alpha\right)E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha}\right)\times\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha-1} = u_0,$$

Donc

$$c = u_0t_0^{\mu}\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha}\right)^{-1}\times\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}.$$

Par conséquent

$$u\left(t\right) = u_0t_0^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}\left(E_{\alpha,\alpha}\left(\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha}\right)^{-1}\right)t^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\left(E_{\alpha,\alpha}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}\right),$$

pour tout $t\in[a,b]$. □

Théorème 3.1.2. *Si $\gamma\geq 1-\alpha$ et $f\in\mathcal{C}_{\mu,\gamma,\ln}\left([a,b]\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$, alors le problème suivant*

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}_{a,\mu}^{\alpha}u\left(t\right) = f\left(t,u\left(t\right)\right), & a<t\leq b,\\ u\left(t_0\right) = u_0, \end{cases}\tag{3.8}$$

admet une unique solution dans $\mathcal{C}_{\mu,\gamma,\ln}([a,b],\mathbb{R})$ *de la forme intégrale suivante :*

$$u(t) = ct^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau,u(\tau))\frac{d\tau}{\tau}, \tag{3.9}$$

où

$$c = \left(u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_0}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau,u(\tau))\frac{d\tau}{\tau}\right) t_0^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}.$$

Démonstration.

On a

$${}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{a,\mu}u(t) = f(t,u(t)).$$

En appliquant l'opérateur ${}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu}$ aux deux membres de l'égalité on a

$${}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a,\mu} \circ {}^H\mathcal{D}^{\alpha}_{a,\mu}u(t) = {}^H\mathcal{I}^{\alpha}_{a,\mu}f(t,u(t)).$$

Par suite

$$u(t) = ct^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau,u(\tau))\frac{d\tau}{\tau}.$$

D'autre part, on a

$$u(t_0) = u_0 = ct_0^{-\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_0}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau,u(\tau))\frac{d\tau}{\tau},$$

Donc

$$c = \left(u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_0}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau,u(\tau))\frac{d\tau}{\tau}\right) t_0^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}.$$

□

3.2 Existence et unicité de la solution pour une équation différentielle fractionnaire avec un paramètre

Dans cette section, nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux valeurs initiales, pour des équations différentielles fractionnaires au sens de Hadamard dans le cas $0 < \alpha < 1$ et $\mu \neq 0$.

Lemme 3.2.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha < 1$, $0 < a < b < \infty$ et $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction*
Une fonction u dans $\mathcal{C}_{\mu,1-\alpha,\ln}([a, b], \mathbb{R})$ est une solution du problème

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a,\mu} u\left(t\right) = f\left(t, u\left(t\right)\right) \quad a < t \leq b \\ u\left(t_0\right) = u_0, \end{cases} \tag{3.10}$$

si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale suivante

$$u\left(t\right) = ct^{-\mu}\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu} \left(\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, u\left(\tau\right))}{\tau} d\tau, \tag{3.11}$$

où

$$c = t_0^{\mu}\left(\ln \frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha} \left(u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{t_0} \left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu} \left(\ln\left(\frac{t_0}{\tau}\right)\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, u\left(\tau\right))}{\tau} d\tau\right).$$

Démonstration.
$\Rightarrow$D'abord nous prouvons la condition nécessaire :
En appliquant l'opérateur ${}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu}$ sur les deux membres de (3.10) , on a

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} \circ {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+,\mu} u\left(t\right) &= {}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+,\mu} f(t, u(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu} \left(\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau, u\left(\tau\right))}{\tau} d\tau. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Par le lemme 2.3.2, on a

$$\left({}^{H}\mathcal{I}^{\alpha}_{a^+} \circ {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+}\right) u\left(t\right) = u\left(t\right) - ct^{-\mu}\left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}, \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$u(t) = ct^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)^{\alpha-1}\frac{f(\tau,u(\tau))}{\tau}d\tau$$

D'autre part, on a $u(t_0) = u_0$, donc

$$ct_0^{-\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_0}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu}\left(\ln\left(\frac{t_0}{\tau}\right)\right)^{\alpha-1}\frac{f(\tau,u(\tau))}{\tau}d\tau = u_0.$$

d'où

$$c = t_0^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{1-\alpha}\left(u_0 - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_0}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu}\left(\ln\left(\frac{t_0}{\tau}\right)\right)^{\alpha-1}\frac{f(\tau,u(\tau))}{\tau}d\tau\right).$$

Avec, $0 < \alpha < 1$, d'où la condition nécessaire est satisfaite.

$\Leftarrow$ Maintenant nous montrons la condition suffisante :

Nous appliquons l'opérateur ${}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}$ aux deux membres de l'équation (3.11), nous trouvons :

$${}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}u(t) = c\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left(t^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\right) + \left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\circ^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f(t,u(t))\right).$$

D'après la proposition 2.3.3, on obtient

$$\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\circ^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f(t,u(t))\right)) =^{H}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\alpha}f(t,u(t)) = f(t,u(t)).$$

Par conséquent

$${}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}u(t) = c\left({}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left(t^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right)\right) + f(t,u(t)),$$

Par le lemme 2.3.2, on a

$${}^{H}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left(t^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1}\right) = 0.$$

donc nous arrivons à l'équation (3.10).

Montrons que u vérifie $u(t_0) = u_0$, on a

$$u(t_0) = ct_0^{-\mu}\left(\ln\frac{t_0}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{t_0}\left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{t_0}{\tau}\right)^{\alpha-1}\frac{f(\tau,u(\tau))}{\tau}d\tau = u_0$$

Ainsi la condition suffisante est satisfaite . □

Théorème 3.2.1. *Supposons que* $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfait les conditions suivantes :*

(H_1) $f(t,0) = 0$,

(H_2) *Il existe une constante* $L > 0$, *telle que*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|, \quad \textit{pour tout } x,y \in \mathbb{R}.$$

alors le problème (3.10) *a une solution dans* $\mathcal{C}_{\mu,1-\alpha,\ln}([a,b],\mathbb{R})$.

Démonstration.

Transformons l'équation (3.10) en un problème de point fixe.

On considère l'opérateur suivant :

$$\mathcal{B}_{c,\mu} : \mathcal{C}_{\mu,1-\alpha,\ln}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{\mu,1-\alpha,\ln}([a,b],\mathbb{R})$$

défini par

$$\left(\mathcal{B}_{c,\mu}u\right)(t) := ct^{-\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} f(\tau,u(\tau))\frac{d\tau}{\tau} \tag{3.13}$$

La démonstration sera divisée en deux étapes.

Etape 1 : Montrons que : $\mathcal{B}_{c,\mu}u$ est bien défini, par l'hypothèse (H_1) et (H_2), on a

$$|f(t,u)| \leq L|u|, \quad \text{pour tout } (t,u) \in: [a,b] \times \mathbb{R},$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\mathcal{B}_{c,\mu}u\right)(t)\right\|_{\mu,1-\alpha,\ln} &\leq |c| + \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in[a,b]}\left|\ln\frac{t}{a}\right|^{1-\alpha}\int_a^t \tau^{\mu}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}|u(\tau)|\frac{d\tau}{\tau} \\
&\leq |c| + \frac{L\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\|u\|_{\mu,1-\alpha,\ln}}{\Gamma(\alpha)}\sup_{t\in[a,b]}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{\tau}{a}\right)^{\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau} \\
&\leq |c| + L\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\|u\|_{\mu,1-\alpha,\ln}.
\end{aligned}$$

Etape 2 **:** On montre maintenant que $\mathcal{B}^n_{c,\mu}$ est contractante, pour n suffisamment grand.

Soient $u, v \in \mathcal{C}_{\mu,1-\alpha,\ln}([a,b],\mathbb{R})$, on a :

$$t^{\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}|(B_{c,\mu}u(t)-B_{c,\mu}v(t))| \leq \frac{L\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\|u-v\|_{\mu,1-\alpha,\ln}, \tag{3.14}$$

pour tout $t \in [a,b]$.

Supposons que pour un certain entier n, on a

$$t^{\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\left|\left(B^{n}_{c,\mu}u(t)-B^{n}_{c,\mu}v(t)\right)\right| \leq \frac{L^{n}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{n\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma((n+1)\alpha)}\|u-v\|_{\mu,1-\alpha,\ln}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&t^{\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\times\left|\left(B^{n+1}_{c,\mu}u(t)-B^{n+1}_{c,\mu}v(t)\right)\right|\\
&=t^{\mu}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\left|\left(B\circ B^{n}_{c,\mu}u(t)-B\circ B^{n}_{c,\mu}v(t)\right)\right|\\
&\leq\frac{t^{\mu}}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\int_a^t\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\mu}\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left|f\left(\tau,B^{n}_{c,\mu}u(\tau)\right)-f\left(\tau,B^{n}_{c,\mu}v(\tau)\right)\right|\frac{d\tau}{\tau}\\
&\leq\frac{L^{n+1}}{\Gamma((n+1)\alpha)}\|u-v\|_{\mu,1-\alpha,\ln}\int_a^t\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{\tau}{a}\right)^{n\alpha+\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}\\
&\leq\frac{L^{n+1}\Gamma(\alpha)}{\Gamma((n+2)\alpha)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{((n+1)\alpha)}\|u-v\|_{\mu,1-\alpha,\ln}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. Comme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L^{n}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{n\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)}=0.$$

Alors, il existe un $n \in \mathbb{N}^*$, tel que

$$L^{n}\frac{\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{n\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha)}<1$$

Par le principe de contraction de Banach, on conclut que $\mathcal{B}^{n}_{c,\mu}$ est un opérateur contractant et d'après le Théorème de Banach 1.2.2 le problème (3.10) a une solution unique qui est le point fixe de $\mathcal{B}^{n}_{c,\mu}$. $\square$

Exemple 3.2.1. *On considère le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}_{1^+,\frac{1}{2}}u(t) = \dfrac{1}{6}\sin(u), \quad 1 \leq t \leq 2 \\ u(\frac{3}{2}) = 1. \end{cases} \tag{3.15}$$

Ici, $a = 1$, $b = 2$, $t_0 = \frac{3}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{1}{2}$ *et* $f(t,u) = \dfrac{1}{6}\sin(u)$, *pour tout* $(t,u) \in [1,2] \times \mathbb{R}$. *Il est clair que* f *continue sur* $[1,2] \times \mathbb{R}$ *D'autre part, on a*

$$\left|\frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\right| \leq \frac{1}{6}, \text{ pour tout } (t,u) \in [1,2] \times \mathbb{R}.$$

Par conséquent les hypothèses (H_1) *et* (H_2) *sont satisfaites. Donc, d'après le théorème 3.2.1, on déduit alors que le problème* (3.15) *possède une solution unique dans* $\mathcal{C}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ln}([1,2],\mathbb{R})$

3.3 Existence de solution pour une équation différentielle fractionnaire avec poids

Lemme 3.3.1. *Soient* $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ *et* $0 \leq \gamma < 1$. *Soit* $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que :*

$$f(.,x) \in \mathcal{C}_{\gamma,\ln}([a,b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Une fonction u *dans* $\mathcal{C}_{n-\alpha,\ln}([a,b],\mathbb{R})$ *est une solution du problème*

$$\begin{cases} {}^{H}\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}u(t) = f(t,u(t)), & a < t \leq b, \\ {}^{H}\mathcal{I}^{\alpha-k}u(a^+) = b_k, & b_k \in \mathbb{R}, \ k \in \{1,\cdots,n\} \end{cases} \tag{3.16}$$

si et seulement si c'est une solution de l'équation intégrale de Volterra suivante

$$u(t) = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-j} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s))\frac{ds}{s}, \tag{3.17}$$

pour $t > a > 0$.

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$, *le problème* (3.16) *est équivalant à l'équation intégrale* *suivante*

$$u(t) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{t}{a}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s))\frac{ds}{s}, \quad t > a > 0. \tag{3.18}$$

Démonstration.

La preuve est similaire à celle du lemme 3.2.1. □

Lemme 3.3.2. *Soit* $0 < \alpha < 1$. *Supposons que* $f :]1,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue. Une fonction* u *dans* $\mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([a,b],\mathbb{R})$ *est une solution du problème*

$$\begin{cases} {}^H\mathcal{D}^{\alpha}u(t) = f(t,u(t)), & 1 < t \leq b \\ {}^H\mathcal{I}^{1-\alpha}u(t)\Big|_{t=1} = u_0, \end{cases} \tag{3.19}$$

si et seulement si elle est solution de l'équation intégrale suivante

$$u(t) = \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s))\frac{ds}{s}, \tag{3.20}$$

pour $t > a > 0$.

Démonstration.

La preuve est similaire à celle du lemme 3.2.1. □

Théorème 3.3.1. *Soit* $f :]1,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *supposons qu'il existe une constante* $M > 0$, *telle que*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq M|u-v|, \quad \textit{pour tout } t \in [1,b] \textit{ et } u,v \in \mathbb{R}$$

Avec

$$M\frac{(\ln b)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} < 1. \tag{3.21}$$

Alors il existe une unique solution du problème (3.19) *sur* $[1,b]$.

Démonstration.

Transformons l'équation (3.19) en un problème de point fixe.

On considère l'opérateur suivant :

$$\mathcal{N} : \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$$

définit par :

$$\mathcal{N}y(t) = \frac{y_0}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,y(s))\frac{ds}{s}, \quad \text{pour tout } t \in [1,b]. \tag{3.22}$$

Pour appliquer le théorème de point fixe de Banach, nous avons besoin de vérifier que $\mathcal{N}$ est une contraction.

En effet, pour tout $u, v \in \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$ et pour $t \in [1,b]$, on a

$$\begin{aligned}(\ln t)^{1-\alpha}|\mathcal{N}u(t)-\mathcal{N}v(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\ln\frac{t}{1}\right)^{1-\alpha}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|f(s,u(s))-f(s,v(s))|\frac{ds}{s}\\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{1-\alpha}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|u(s)-v(s)|\frac{ds}{s}\\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{1-\alpha}\|u-v\|_{1-\alpha,\ln}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}(\ln s)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\\ &\leq \frac{M(\ln b)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\|u-v\|_{1-\alpha,\ln}.\end{aligned}$$

On change de variable en posant $\ln(t)\,\tau = \ln(s)$, ce qui donne $\ln(t)\,d\tau = \frac{ds}{s}$, alors

$$\begin{aligned}(\ln t)^{1-\alpha}\int_1^t\left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}(\ln s)^{\alpha-1}\frac{ds}{s} &= (\ln(t))^{\alpha}\int_0^1(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\alpha-1}d\tau\\ &= (\ln(t))^{\alpha}\beta(\alpha,\alpha).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(\ln t)^{1-\alpha}|\mathcal{N}u(t)-\mathcal{N}v(t)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\|u-v\|_{1-\alpha,\ln}(\ln(t))^{\alpha}\beta(\alpha,\alpha)\\ &\leq M\frac{(\ln b)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\|u-v\|_{1-\alpha,\ln}.\end{aligned}$$

Par suite

$$\|\mathcal{N}u-\mathcal{N}v\|_{1-\alpha,\ln} \leq M\frac{(\ln b)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}\|u-v\|_{1-\alpha,\ln}.$$

Donc de (3.21), on peut déduire que $\mathcal{N}$ est une contraction et d'après le théorème de Banach, le problème 3.19 à une seule solution qui est le point fixe de $\mathcal{N}$. □

Théorème 3.3.2. *Supposons que $f : [1,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfait les conditions suivantes :*

(C_1) *$f : [1,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue.*

(C_2) *Pour tout* $(t,u) \in [1,b] \times \mathbb{R}$,

$$|f(t,u)| \leq (\ln t)^{1-\alpha}|u|.$$

(C_3) *Il existe une constante* $M > 0$, *telle que*

$$\frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1}((\ln b)) < M.$$

Alors le problème (3.19) *admet au moins une solution sur* $[1,b]$.

Démonstration.
La démonstration de ce théorème est basée sur l'Alternative non linéaire de Leray-Schauder.
On définit l'opérateur $\mathcal{N} : \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$ définit par (3.22).
Montrons que l'opérateur $\mathcal{N}$ est complètement continu.
Etape 1 : $\mathcal{N}$ est continu, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \to u$ dans $\mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$.
Alors pour tout $t \in [1,b]$, on a

$$\begin{aligned}
(\ln t)^{1-\alpha} |\mathcal{N}u_n(t) - \mathcal{N}u(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{t}{1}\right)^{1-\alpha} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))| \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (\ln t)^{1-\alpha} \|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\|_{1-\alpha,\ln} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (\ln s)^{\alpha-1} \frac{ds}{s} \\
&\leq \frac{(\ln b)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\|_{1-\alpha,\ln}
\end{aligned}$$

Par suite

$$\|\mathcal{N}u_n - \mathcal{N}u\|_{1-\alpha,\ln} \leq \frac{(\ln b)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \|f(.,u_n(.)) - f(.,u(.))\|_{1-\alpha,\ln}.$$

Puisque f est continue, nous avons

$$\|\mathcal{N}u_n - \mathcal{N}u\|_{1-\alpha,\ln} \to 0, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

D'où la continuité de $\mathcal{N}$.
*Etape 2 :*L'image de tout ensemble borné par $\mathcal{N}$ est un ensemble borné dans $\mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$.
En effet, il suffit de montrer que, pour tout $\eta > 0$, il existe une constante $\rho > 0$,

telle que pour tout $u \in \overline{B_\eta}$, on a

$$\|Nu\|_{1-\alpha,\ln} \leq \rho.$$

Avec

$$\overline{B_\eta} = \left\{u \in \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R}) : \|u\|_{1-\alpha,\ln} \leq \eta\right\}.$$

Par (C_2), on a pour tout $t \in [1,b]$,

$$\begin{aligned}(\ln t)^{1-\alpha}|\mathcal{N}u(t)| &\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{1-\alpha}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}|f(s,u(s))|\frac{ds}{s}\\ &\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{1-\alpha}\|u\|_{1-\alpha,\ln}\int_1^t \left(\ln\frac{t}{s}\right)^{\alpha-1}\frac{ds}{s}\\ &\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\ln b}{\Gamma(\alpha+1)}\eta,\end{aligned}$$

Donc

$$\|\mathcal{N}u\|_{1-\alpha,\ln} \leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\ln b}{\Gamma(\alpha+1)}\eta = \rho.$$

Et par suite $\mathcal{N}(B_\eta)$ est borné.

Etape 3 : L'image de tout ensemble borné par $\mathcal{N}$ est un ensemble équicontinu de $\mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$.

Soient $t_1, t_2 \in\,]1,b]$, avec $t_1 < t_2$ et B_η un ensemble borné de $\mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$.

Soit $u \in B_\eta$, on a

$$\begin{aligned}\left|(\ln t_2)^{1-\alpha} Nu(t_2) - (\ln t_1)^{1-\alpha} Nu(t_1)\right| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{t_1} &\left[\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}(\ln t_2)^{1-\alpha}\right.\\ &\left.-\left(\ln\frac{t_1}{s}\right)^{\alpha-1}(\ln t_1)^{1-\alpha}\right]|f(s,u(s))|\frac{ds}{s}\\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\left(\ln\frac{t_2}{s}\right)^{\alpha-1}(\ln t_2)^{1-\alpha}|f(s,u(s))|\frac{ds}{s}.\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0, d'où $\mathcal{N}(B_\eta)$ est équicontinue.

D'après les étapes 2 et 3 et le théorème d'Arzéla-Ascoli, $\mathcal{N}(B_\eta)$ est relativement compact pour tout B_η borné.

Et d'après l'étape 1, $\mathcal{N}$ est continu.

Par conséquent $\mathcal{N} : \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$ est complètement continu.

Etape 4 : Nous montrons qu'il existe un ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$ avec

$$u \neq \lambda \mathcal{N} u, \quad \text{pour } \lambda \in]0,1[\quad \text{et} \quad u \in \partial \mathcal{U}.$$

Soient $u \in \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$ et $u = \lambda \mathcal{N} u$ pour tout $0 < \lambda < 1$.
Ainsi pour tout $t \in [1,b]$, on a

$$u(t) = \lambda \left(\frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} \left(\ln \frac{t}{1}\right)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} f(s,u(s)) \frac{ds}{s} \right)$$

Par (C_2), pour tout $t \in [1,b]$, on obtient

$$\begin{aligned}(\ln t)^{1-\alpha}|u(t)| &\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{1-\alpha} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} |f(s,u(s))| \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{1-\alpha} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (\ln s)^{1-\alpha}|u(s)| \frac{ds}{s}\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on a

$$\begin{aligned}(\ln t)^{1-\alpha}|u(t)| &\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\ln t)^{1-\alpha} \int_1^t \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} (\ln s)^{1-\alpha}|u(s)| \frac{ds}{s} \\ &\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1}((\ln t)) \\ &\leq \frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1}((\ln b)),\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\|u\|_{1-\alpha,\ln}}{\frac{|u_0|}{\Gamma(\alpha)} E_{\alpha,1}((\ln b))} \leq 1.$$

D'après (C_3), il existe M, tel que $\|u\|_{1-\alpha,\ln} \neq M$, et on définit un ouvert $\mathcal{U}$ par

$$\mathcal{U} = \left\{u \in \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R}) : \|u\|_{1-\alpha,\ln} < M\right\}.$$

Nous considérons l'opérateur $\mathcal{N} : \overline{\mathcal{U}} \to \mathcal{C}_{1-\alpha,\ln}([1,b],\mathbb{R})$ et $\mathcal{U}$ il n'existe pas $u \in \partial\mathcal{U}$ tel que : $u = \lambda \mathcal{N} u$ pour certains $0 < \lambda < 1$. Par conséquent le théorème d'Alternative non linéaire de Leray-Schauder affirme l'existence d'un point fixe $u \in \partial\mathcal{U}$ qui est une solution du problème 3.19. $\square$

Conclusion

Dans ce travail on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions de problème pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard.

Ces résultats ont été obtenus en appliquant quelques théorèmes de point fixe, en particulier on a exploité les théorèmes de Banach et de Schauder.

En conclusion, j'éspère que ce travail sera utile aux mathématiciens et qu'il s'ajoutera comme modeste référence sur ce sujet à la bibliothèque universitaire.

Bibliographie

[1] A. A.Kilbas, H. M. Srivastava and J.J.Trujillo, Theory and Applications of fractional differential Equation, North-Holland Mathematics Studies 204, Elesevier science, Amesterdam, (2006).

[2] A. A. Kilbas, Hadamard Type Fractional Calculus. J. Korean Math, Soc 38. 1191-1204, (2001).

[3] A. Kolmogorov and S. Fomine, élement de la Théorie des Fonctions de l'Analyse Fonctionnelle, Edition MIR, Moscou, (1973).

[4] B. Ahmad, A. Alseadi,S. K. Ntouyes and J. Tariboon, Hadamard-Type Fractional Differential Equation Inclusion and Inequalities, Springer , (2017).

[5] C. Corduneanu, Principe of Differential and Integral Equation, Allyn And Bacon, Inc. Boston, (1971).

[6] G. Wang and T. Wanq, On a Nonlinear Hadamard Type Fractional Differential Equation with p-Laplacian Operateur and Strip Condition, J. Nonlinear. Sci. Appl, 5073-5081, (2016).

[7] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications, Masson, Paris, (1983).

[8] H. Ye, J,Gao and Y. Ding, A Generaliezd Gronwall Inequality and ites Application to a Fractional Differential Equation, J. Math. Anal. Appl.328, 1075-1081, (2007).

[9] L. MA and C. LI, On Hadamard Fractional Calculus. Fractals, Vol. 25, No. 3, (2017).

[10] S. Djebali, L. Gurniewicz and A. Ouahab, Solution Sets for differential Equations and Inclusions, De Grayter. 2013.

[11] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley, New York, (1993).

[12] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, (1999).

[13] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, (2000).

[14] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, (1983).

[15] H.B. Gu , J.J. Trujillo, Existence of mild solution for evolution equation with Hilfer fractional derivative, Appl. Math. Comput, 257, (2015).

[16] A. Granas, J. Dugundji, Fixed point theory. Springer Monographs in Mathematics, (2003).