الجمهورية الجزائرية الديمقراطيـة الشعبيــة
République algérienne démocratique et populaire
وزارة التـعليــم العالــي والبحــث العلمـــــي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب
Université Ain Temouchent Belhadj Bouchaib
Faculté des Sciences et de Technologie
Département des Mathématiques et l'informatique

MÉMOIRE
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématique
Domaine : Master Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Spécialité : Equations Différentielle et Modélisation

Existence de solutions aux équations différentielles fractionnaires non linéaires avec conditions aux limites intégrales

Présenté Par :
M. Bensafi Abderrahmane

Devant le jury composé de :

Dr. Aicha Messabihi	M C B	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr. Beniani Abderrahmane	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examinateur
Dr. Mami Tawfiq Fawzi	M C A	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant

Année Universitaire 2020/2021

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu le Tout Puissant de m'avoir donné la patience, la volonté et l'énergie pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier **Mr MAMI** d'avoir accepter de diriger mon mémoire. Il m'a guidé durant tout le semestre et m'a apporté le soutien nécessaire. De part ses qualités pédagogiques, ses précieux conseils, ses stimulants encouragements et sa disponibilité.

Je remercie également **Mme Messabihi** d'avoir accepté de présider le jury .

Je remercie **Mr Beniani Abderrahmane** pour l'examination de mon travail et de faire partie du jury.

Vous me faites le grand honneur d'accepter de juger ce travail.

Veuillez recevoir mon plus grand respect.

Dédicaces

Avec un énorme plaisir, un cœur ouvert et une immense joie,

je dédie ce mémoire

à mes très chers, respectueux et magnifiques parents ma mère et mon père,

Qui m'ont soutenus tout au long de ma vie.

Par leur patience, leur amour et leur encouragement.

à mon frère,

à ma sœur,

AR,

à touts mes amis

à touts mes enseignants, pour leurs utiles conseils, leur patience et leur persévérance.

Table des matières

Notations

- $C([a,b],\mathbb{R})$: Espace des fonctions continues de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- $\Gamma(.)$: La fonction Gamma.

- $\beta(.,.)$: La fonction Bêta.

- $E_{\alpha,\beta}(.)$: La fonction Mittag-Leffler.

- $Re(.)$: Partie réelle d'un nombre complexe.

- $[.]$: Partie entière d'un nombre réel.

- I_a^α : Intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.

- D_a^α : Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville.

- ${}^cD_a^\alpha$: Dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo.

- $\|.\|_\infty$: Norme du sup tel que $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$.

Introduction

Le calcul fractionnaire est une branche mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres arbitraires (réels ou complexes). Son apparition remonte à la fin du 17ième siècle, l'époque ou Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En 1695, Gottfried Leibniz a annoncé la question clé "Can the meaning of derivatives with integer order be generalized to derivative with non-integer order ?" dans une lettre à L'hôpital, le 30 septembre 1695 l'hôpital demanda à Leibniz quel sens pourrait-on attribuer à $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ si n était la fraction $\dfrac{1}{2}$?.

De nombreuses définitions des opérateurs d'ordre non entiers ont été introduites. Elles ont, pendant longtemps, semblé ne pas donner toujours les mêmes résultats. On cite les approches de dérivations fractionnaires suivantes : l'approche de Riemann-Liouville, de Caputo et celle de Hadamard ; et comme nouvelle approche, on cite la dérivation de Caputo-Hadamard.

Au départ, le calcul fractionnaire a été longuement considéré comme une simple théorie mathématique sans aucune explication réelle ou pratique. En effet, l'intérêt de ce concept dans les sciences fondamentales et en ingénierie ([7], [14]) ne s'est manifesté qu'à la seconde moitié du 20 ième siècle. Dès lors , beaucoup de contributions autant théorique que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordres fractionnaires et leurs intérêts dans différentes disciplines telles que la physique ([13]), l'électricité ([13]) , la biologie ([11]), la chimie ([16]), l'automatique.

La théorie de point fixe fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence de solutions de nombreux problèmes non-linéaires différents. Les théorèmes du point fixe sont souvent basés sur certaines propriétés (telles que la continuité complète, la monotonie, la contraction,...) que l'application considérée doit satisfaire. Les célèbres théorèmes de point fixe sont le théorème de Banach, théorème de Scheafer et l'alternative non linéaire de Leray- Schauder.

Ce mémoire se présente comme suit :

Le premier chapitre est consacré, dans un premier temps, aux définitions relatives aux fonctions spéciales et à leurs notations qui constituent l'ingrédient de base pour l'introduction du (des) concept(s) de dérivée et intégrale fractionnaires.

Puis, dans un deuxième temps, on définit justement ces deux notions fondamentales qui vont intervenir le long de ce travail et on étalera leurs propriétés de base ainsi que leurs caractéristiques spécifiques.

Au deuxième chapitre, on entamera cette partie par citer les théorèmes relatifs au(x) point(s) fixe(s) qui vont être utilisés par la suite puis, on procèdera à l'étude de l'existence et de l'unicité de solutions pour deux problèmes aux limites avec conditions intégrales et qui sont en l'occurence ceux des deux types suivants :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ \\ y(0) + \mu \displaystyle\int_0^T y(s)ds = y(T) \end{cases} \tag{1}$$

et

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \\ y(T) + y(0) = b \displaystyle\int_0^T y(s)ds, \quad bT \neq 2 \end{cases} \tag{2}$$

Au troisième chapitre on étudiera l'existence et l'unicité de solutions d'un problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire avec conditions intégrales non locales en utilisant l'approche du point fixe via le théorème de Banach et celui de Krasnoselski.

$$
\begin{cases}
{}^{c}D^{q}y(t) = f(t, y(t)), \quad 1 < q \leq 2, \quad t \in J = [0, 1], \\
y(0) = g(y) + \alpha \displaystyle\int_0^{\xi} y(s)ds, \quad 0 < \xi < 1, \\
y(1) = h(y) + \beta \displaystyle\int_0^{\eta} y(s)ds, \quad 0 < \eta < 1,
\end{cases} \tag{3}
$$

Chapitre 1

Éléments de calcul fractionnaire

1.1 Fonctions Spéciales

Les fonctions spéciales sont définies de manière assez imprécise, puisqu'elles regroupent les fonctions que l'usage (ou la fréquence d'utilisation) a fini par associer à un nom. Parmi ces fonctions, la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction de Mittag-Leffler.

1.1.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ qui généralise la factorielle $n!$ et permet à n de prendre des valeurs non entières et même des valeurs complexes. Nous allons rappeler quelques résultats sur la fonction Gamma.

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est généralement définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx, \quad Re(z) > 0 \tag{1.1}$$

Cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, si $Re(z) > 0$.

Proposition 1.1.1 *L'une des propriétés fondamentales de la fonction Gamma est qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

En particulier :

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Une autre propriété importante de la fonction Gamma, est qu'elle possède des pôles simples aux points $z = -n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Preuve 1.1.1 *On démontre cette proposition par une intégration par partie de* (1.1)

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{(z+1)-1} dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z} dx \\
&= [-e^{-x} x^{z}]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

En particulier, on a :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = 1.$$

et en utilisant (1.2) *, on obtient pour* $z \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\begin{array}{lllllll}
\Gamma(2) & = & 1.\Gamma(1) & = & 1.1 & = & 1! \\
\Gamma(3) & = & 2.\Gamma(2) & = & 2.1! & = & 2! \\
\Gamma(4) & = & 3.\Gamma(3) & = & 3.2! & = & 3! \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
\Gamma(n+1) & = & n\Gamma(n) & = & n(n-1)! & = & n!
\end{array}$$

Par conséquent,

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Exemple 1.1.1 *Montrons que :*

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

on a :

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dt$$

En effet, faisons le changement de variable suivant :

$$u = \sqrt{x} \implies x = u^2 \quad et \quad dx = 2u\ du$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(\tfrac{1}{2}) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} u\ du \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

D'après l'intégrale de Gauss on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

d'où :

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

1.1.2 Fonction Bêta

Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction Bêta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction Gamma.

Définition 1.1.2 *La fonction Bêta est définie par l'intégrale d'Euler de seconde espèce :*

$$B(z,\omega) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{\omega-1} dx, \quad Re(z) > 0,\ Re(\omega) > 0 \tag{1.3}$$

cette intégrale est convergente pour tout $z,\ \omega \in \mathbb{C}$ *si* $Re(z) > 0$ *et* $Re(\omega) > 0$.

Proposition 1.1.2 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}, \quad Re(z) > 0,\ Re(\omega) > 0. \tag{1.4}$$

D'où il résulte que Bêta est symétrique :

$$B(z,\omega) = B(\omega,z), \quad Re(z) > 0, Re(\omega) > 0.$$

Preuve 1.1.2 *Soient* $(z,\omega) \in \mathbb{C}^2$,*avec* $Re(z) > 0$ *et* $Re(\omega) > 0$. *On a :*

$$\Gamma(z)\Gamma(\omega) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \int_0^{+\infty} x^{\omega-1}e^{-x}dx$$

En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}x^{\omega-1}e^{-x}dtdx \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t+x)}t^{z-1}x^{\omega-1}dtdx\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $r = t + x$ *et* $t = rs$ *donc* $0 \leq r < +\infty$ *et* $0 \leq s \leq 1$ *Ainsi,* $dr = dt + dx$, $dt = sdr + rds$, $dx = (1-s)dr - rds$ *Alors,* $dtdx = rdsdr$ *Il s'en suit :*

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{1} e^{-r}r^{z-1}s^{z-1}r^{\omega-1}(1-s)^{\omega-1}r \quad dsdr \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z-1}r^{\omega-1}r \quad dr \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{\omega-1} \quad ds \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-r}r^{z+\omega-1} \quad dr \int_0^1 s^{z-1}(1-s)^{\omega-1} \quad ds \\ &= \Gamma(z+\omega)B(z,\omega)\end{aligned}$$

d'où :

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}$$

Proposition 1.1.3 *Pour tout* p, $q \in \mathbb{C}$ *;* $Re(p) > 0$ *et* $Re(q) > 0$, *on a les propriétés suivantes :*

1. $B(p,q) = B(q,p)$
2. $B(p,q) = B(p+1,q) + B(p,q+1)$
3. $B(p,q+1) = \dfrac{q}{p}B(p+1,q) = \dfrac{q}{p+q}B(p,q)$

1.1.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.1.3 *On appelle fonction de Mittag-Leffler ([17]) la fonction définie par :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \qquad z \in \mathbb{C},\ \alpha,\beta > 0$$

Pour $\beta = 1$:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \qquad z \in \mathbb{C},\ \alpha > 0$$

Et pour $\beta = 1$, $\alpha = 1$ *on a :*

$$E_{1,1}(z) = e^z$$

Cette dernière joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier.

1.2 Intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire

Dans cette section on va présenter les notions de dérivée et intégrale fractionnaires. Il existe dans la littérature pas mal d'approches proposées pour généraliser la notion de dérivation d'ordres non entiers, la formule de Grünwald-Letnikov, ou celle de Riemann-Liouville ou encore la dérivée de Caputo etc. Dans ce travail, on s'intéressera seulement aux deux dernières approches.

1.2.1 Intégrale et dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$,$(Re(\alpha) > 0)$ au sens de Riemann-Liouville généralise la célèbre formule attribuée à Cauchy d'intégrale répété n-fois,

$$\begin{aligned} I_a^n h(t) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2 ... \int_a^{s_n-1} h(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} h(s) ds, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1.5}$$

D'après la généralisation du factoriel par la fonction Gamma , $(n-1)! = \Gamma(n)$, observons que le second membre de (1.5) pourrait avoir un sens même pour des valeurs non-entières de n, il était donc naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.2.1 ***(Intégrale de Riemann-Liouville [21])***

Soit $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville de h notée I_a^α, l'intégrale suivante :

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \qquad (t > a, Re(\alpha) > 0).$$

où Γ est la fonction Gamma et on note I_0^α par I^α.

En particulier, pour $\alpha = 1$,on a :

$$I_a^1 h(t) = \int_a^t h(s) ds = I h(t)$$

Exemple 1.2.1 *On considère la fonction h définie par :*

$$h(t) = (t-a)^\beta, \;\; t \in [a, b] \quad ou \quad \beta > -1, \;\; \alpha > 0.$$

On a alors :

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^\beta ds \tag{1.6}$$

En effectuant le changement de variable suivant :

$$\tau = \frac{s-a}{t-a} \Longrightarrow s = a + (t-a)\tau, \quad avec \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad donc \quad ds = (t-a)d\tau$$

la relation (1.6) devient :

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a-(t-a)\tau)^{\alpha-1}(a+(t-a)\tau-a)^\beta (t-a)d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(t-a)(1-\tau)]^{\alpha-1}[(t-a)\tau]^\beta (t-a)d\tau \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau^{(\beta+1)-1}(1-\tau)^{\alpha-1}d\tau.
\end{aligned}$$

En tenant compte de la fonction Bêta (1.3) *puis de la relation* (1.4)*, on aura :*

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1,\alpha) \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}
\end{aligned}$$

Alors, on obtient l'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction h, telle que :

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\alpha+\beta} \tag{1.7}$$

Cas particulier : *D'après la formule* (1.2) *pour $\alpha = 1$, on déduit que :*

$$I_a^1 (t-a)^\beta = \frac{1}{\beta+1}(t-a)^{1+\beta}$$

et si $\beta = 0$, on aura dans ce cas :

$$I_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha.$$

Proposition 1.2.1 *Soit $h \in C([a,b])$, α et β étant des nombres complexes avec : $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$. Alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_a^\alpha [I_a^\beta h(x)] = I_a^{\alpha+\beta} h(x). \tag{1.8}$$

Preuve 1.2.1 *Pour $h \in C([a,b])$, on a par définition de I_a^α :*

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha [I_a^\beta h(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} [I_a^\beta h](t)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1}h(s)ds\right] dt
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini, on pourra permuter l'ordre d'intégration et on aura :

$$\begin{aligned} I_a^\alpha[I_a^\beta h(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} h(s)\,ds\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x h(s) \underbrace{\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt}\, ds \end{aligned} \tag{1.9}$$

On pose :

$$I = \int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1}dt$$

Avec le changement de variable suivant :

$$t = s + (x-s)\tau, \quad \textit{avec} \quad (0 \leq \tau \leq 1), \quad \textit{donc} \quad dt = (x-s)d\tau$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x-s-(x-s)\tau)^{\alpha-1}(s+(x-s)\tau-s)^{\beta-1}(x-s)ds \\ &= \int_0^1 [(x-s)(1-\tau)]^{\alpha-1}[(x-s)\tau]^{\beta-1}(x-s)d\tau \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau. \end{aligned}$$

Tenant compte de la définition de Bêta (1.3) *puis de la relation* (1.4), *on aura :*

$$\begin{aligned} I &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}B(\beta,\alpha) \\ &= (x-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

En retournant à la formule (1.9), *on conclura alors :*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha[I_a^\beta h(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x h(s)[(x-s)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}]ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}h(s)ds \\ &= I_a^{\alpha+\beta}h(x). \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Définition 1.2.2 ***(Dérivée de Riemann-Liouville [21])***

Soit $h \in C([a,b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Riemann-Liouville d'une fonction h, notée D_a^α, la fonction définie par :

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha h(x) &= D^n[I_a^{n-\alpha} h(x)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} h(t)dt, \quad (n = [Re(\alpha)]+1, x > a)
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.2 *On considère la fonction h définie par :*

$$h(x) = (x-a)^\beta, \;\; x \in [a,b] \quad ou \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \in]n-1, n[$. Nous avons :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = D^n[I_a^{n-\alpha}(x-a)^\beta].$$

D'après (1.7)*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha (x-a)^\beta &= D^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}(x-a)^{n-\alpha+\beta}\right] \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}\right]
\end{aligned} \tag{1.10}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x-a)^{n-\alpha+\beta} &= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)...(n-\alpha+\beta-n+1)(x-a)^{n-\alpha+\beta-n} \\
&= (n-\alpha+\beta)(n-\alpha+\beta-1)...(\beta-\alpha+1)(x-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

Donc,

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \left[\frac{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\right]$$

d'où la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction h :

$$D_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

Cas particulier : Si $\alpha = 1$, avec la formule (1.2) on déduit que :

$$D_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(x-a)^{\beta-1} = \beta(x-a)^{\beta-1}$$

et si $\beta = 0$, on aura dans ce cas :

$$D_a^\alpha 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$$

Ce qui montre que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle.

Lemme 1.2.1 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n-1 \leq \alpha \leq n$ et $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Supposons que $D_a^\alpha h = 0$. Alors,*

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n},$$

où c_k sont des constantes réelles.

Preuve 1.2.2 *Comme $D_a^\alpha h = 0$ alors,*

$$(D^n I_a^{n-\alpha} h)(x) = 0 \Rightarrow (I_a^{n-\alpha} h)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k$$

Par composition avec I_a^α on obtient :

$$\begin{aligned} (I_a^n h)(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k I_a^\alpha (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}(x-a)^{k+\alpha} \end{aligned}$$

En remplaçant $(I_a^n h)(x)$ par son expression, on trouve :

$$(I_a^n h)(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} h(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}(x-a)^{k+\alpha}$$

Puis, par une dérivation classique d'ordre n par rapport à x, on obtient :

$$h(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n}$$

Lemme 1.2.2 *Si $Re(\alpha) \in \,]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in C([a,b])$ alors, on a l'égalité :*

$$(D_a^\alpha I_a^\alpha h)(x) = h(x).$$

Preuve 1.2.3 *En se basant sur la propriété classique :*

$$(D^n I_a^n h)(x) = h(x)$$

en utilisant la définition (1.2.2) et la proposition (1.2.1), on déduit :

$$\begin{aligned} (D_a^\alpha I_a^\alpha h)(x) &= D^n [I_a^{n-\alpha}(I_a^\alpha h(x))] \\ &= D^n [I_a^n h(x)] \\ &= h(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Propriété 1.2.1 *Si $n > Re(\alpha) > Re(\beta) > n-1 > 0$, alors pour $h(x) \in C([a,b])$, on a la relation :*

$$(D_a^\beta I_a^\alpha h)(x) = I^{\alpha-\beta} h(x)$$

En particulier, si $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $Re(\alpha) > k$ alors,

$$(D_a^k I_a^\alpha h)(x) = I^{\alpha-k} h(x)$$

Preuve 1.2.4 *En utilisant la définition (1.2.2) et proposition (1.2.1), on obtient :*

$$\begin{aligned}
(D_a^\beta I_a^\alpha h)(x) &= D^n[I_a^{n-\beta}(I_a^\alpha h(x))] \\
&= D^n[I_a^{n+\alpha-\beta} h(x)] \\
&= D^n[I_a^n(I_a^{\alpha-\beta} h(x))] \\
&= I_a^{\alpha-\beta} h(x)
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Remarque 1.2.1 *En général,*

$$D_a^{\alpha_1} D_a^{\alpha_2} \neq D_a^{\alpha_1+\alpha_2} \neq D_a^{\alpha_2} D_a^{\alpha_1}$$

Exemple

Soient $h(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{1}{2}$, on a :

$$D^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds\right)$$

et soit le changement de variable suivant :

$$\tau = \frac{s}{t} \Rightarrow d\tau = \frac{ds}{t}$$

En substituant, on trouve :

$$
\begin{aligned}
D^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (t-t\tau)^{-\frac{1}{2}}(\tau t)^{-\frac{1}{2}}t d\tau\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{1}{2}} d\tau\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1 (1-\tau)^{\frac{1}{2}-1}\tau^{\frac{1}{2}-1} d\tau\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right)\\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1)}\right)\\
&= \frac{d}{dt}\sqrt{\pi}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

ainsi,

- $D^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} = 0$
- $D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} = 0$
- $D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} = D^1 t^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-t^{-\frac{3}{2}}}{2}$

Par conséquent,

$$D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}} \neq D^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

Propriété 1.2.2 ***(Linéarité)*** *Soient deux fonctions f et g pour lesquelles les dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ de Riemann-Liouville existent. Alors, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :*

$$D_a^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(D_a^{\alpha} f)(x) + \mu(D_a^{\alpha} g)(x)$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire de Caputo

La notion de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie du calcul fractionnaire. Cependant, les demandes de la technologie moderne exigent une certaine révision de l'approche mathématique pure bien établie, car les problèmes appliqués nécessitent l'utilisation des conditions initiales $f(a)$,$f'(a)$, etc. Ces besoins ont bientôt conduit à la naissance d'une définition alternative des dérivées fractionnaires qui a été introduit par M.Caputo [15] à la fin des années soixante.

Définition 1.2.3 ***(Dérivée de Caputo [15])*** *Soit $h \in C^n([a,b])$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ au sens de Caputo de h notée, ${}^cD_a^\alpha$, la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha h(x) &= I_a^{n-\alpha}[D^n h(x)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-1)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}h^n(t)dt, \quad (n=[Re(\alpha)]+1, x>a) \end{aligned}$$

On note ${}^cD_0^\alpha$ par ${}^cD^\alpha$.

Exemple 1.2.3 *On considère la fonction h définie par :*

$$h(x)=(x-a)^\beta, \quad x\in[a,b] \quad ou \quad \beta \geq 0$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \geq 0$ tel que $\alpha \in [n-1,n[$, Nous avons :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta &= I_a^{n-\alpha}[D^n(x-a)^\beta] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}[(t-a)^\beta]^{(n)}dt \end{aligned}$$

On sait que :

$$[(t-a)^\beta]^n = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n}.$$

et donc,

$${}^cD_a^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta-n}dt}_{I}. \tag{1.11}$$

On pose : $I=\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^{\beta-n}dt$
En effectuant le changement de variable :

$$\tau=\frac{t-a}{x-a} \implies t=a+(x-a)\tau, \;\; avec \;\; 0\leq\tau\leq 1, \;\; on\ obtient : \;\; dt=(x-a)d\tau$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{n-\alpha-1}(a+(x-a)\tau-a)^{\beta-n}(x-a)d\tau \\ &= \int_0^1 [(x-a)(1-\tau)]^{n-\alpha-1}[(x-a)\tau]^{\beta-n}(x-a)d\tau \\ &= (x-a)^{\beta-\alpha}\int_0^1 \tau^{(\beta-n+1)-1}(1-\tau)^{n-\alpha-1}d\tau. \end{aligned}$$

En tenant compte de la définition de Bêta (1.3) *puis de la relation* (1.4), *on aura :*

$$\begin{aligned} I &= (x-a)^{\beta-\alpha}\beta(\beta-n+1,n-\alpha) \\ &= (x-a)^{\beta-\alpha}\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \end{aligned}$$

En retournant à la formule (1.11), *on obtient alors :*

$$^{c}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\left[\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha}\right]$$

Ainsi, la dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre α de la fonction h, est :

$$^{c}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

Si $\beta \leq n-1$ on a :

$$^{c}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = 0$$

Si $\beta > n-1$ on a :

$$^{c}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha}$$

D'où

$$^{c}D_a^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(x-a)^{\beta-\alpha} & si \quad \beta > n-1 \\ \\ 0 & si \quad \beta \in \{0,1,2,\dots,n-1\} \end{cases}$$

Remarque 1.2.2 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction constante $h(t) = C$ est nulle. Autrement dit : $^{c}D_a^{\alpha}C = 0$ avec $C \in \mathbb{R}$.*

Propriété 1.2.3 ***(Linéarité)*** *Soient deux fonctions f et g pour lesquelles les dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ de Caputo existent. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :*

$$^{c}D_a^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda^{c}D_a^{\alpha}f(x) + \mu^{c}D_a^{\alpha}g(x)$$

Propriété 1.2.4 *Soit $h \in C^n([a,b])$, la relation reliant la dérivée Riemann-Liouville et celle de Caputo est donnée par :*

$$\begin{aligned} ^{c}D_a^{\alpha}h(x) &= D_a^{\alpha}\left[h(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k\right] \\ &= D_a^{\alpha}h(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}, \quad (n = [Re(\alpha)]+1, x > a) \end{aligned} \tag{1.12}$$

En plus, si a est un point zéro d'ordre n de h :

$$h^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Alors,

$${}^{c}D_a^{\alpha}h(x) = D_a^{\alpha}h(x).$$

Ainsi, dans ce cas les deux dérivées coincident.

Lemme 1.2.3 *Soit $h \in C^n([a,b])$, alors :*

$$({}^{c}D_a^{\alpha}I_a^{\alpha}h)(x) = h(x) \tag{1.13}$$

Preuve 1.2.5 *Si $h \in C^n([a,b])$ alors par la relation* (1.12) *de la propriété (1.2.4) permet d'obtenir le résultat suivant :*

$$({}^{c}D_a^{\alpha}I_a^{\alpha}h)(x) = (D_a^{\alpha}I_a^{\alpha}h)(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(I_a^{\alpha}h)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}$$

et d'après le lemme (1.2.2), on a :

$$({}^{c}D_a^{\alpha}I_a^{\alpha}h)(x) = h(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(I_a^{\alpha}h)^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}$$

Et comme $k \leq n-1 < Re(\alpha)$, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ alors, les dérivées :

$$(I_a^{\alpha}h)^{(k)}(a) = 0$$

Ce qui donne :

$$({}^{c}D_a^{\alpha}I_a^{\alpha}h)(x) = h(x).$$

Lemme 1.2.4 *Soit $h \in C^n([a,b])$, alors :*

$$(I_a^{\alpha}\,{}^{c}D_a^{\alpha}h)(x) = h(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h^k(a)}{k!}(x-a)^k, \quad (n = [Re(\alpha)]+1).$$

Preuve 1.2.6 *Si $h \in C^n([a,b])$ alors, d'après la définition (1.2.3), on a :*

$$(I_a^{\alpha}\,{}^{c}D_a^{\alpha}h)(x) = I_a^{\alpha}[I_a^{n-\alpha}h^{(n)}(x)].$$

et d'après la proposition (1.2.1), il résulte que :

$$
\begin{aligned}
(I_a^\alpha\ {}^cD_a^\alpha h)(x) &= (I_a^n h^{(n)})(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n)} \underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-1} h^{(n)}(t)dt}_{I_1}.
\end{aligned}
$$

On pose : $I_1 = \int_a^x (x-t)^{n-1} h^{(n)}(t)dt$

Par une intégration par partie de I_1*, on aura :*

$$
\begin{aligned}
(I_a^\alpha\ {}^cD_a^\alpha h)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n)}[(x-t)^{n-1}h^{(n-1)}(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)^{n-2} h^{(n-2)}(t)dt \\
&= -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1}h^{(n-1)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-1)} \underbrace{\int_a^x (x-t)^{n-2} h^{(n-2)}(t)dt}_{I_2}.
\end{aligned}
$$

On pose : $I_2 = \int_a^x (x-t)^{n-2} h^{(n-2)}(t)dt$

En faisant de même pour I_2*, on aura :*

$$
\begin{aligned}
(I_a^\alpha\ {}^cD_a^\alpha h)(x) &= -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1}h^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2}h^{(n-2)}(a) - \ldots + \frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^x h^1(t)dt \\
&= -\frac{1}{\Gamma(n)}(x-a)^{n-1}h^{(n-1)}(a) - \frac{1}{\Gamma(n-1)}(x-a)^{n-2}h^{(n-2)}(a) - ... + h(x) - h(a) \\
&= h(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)}(x-a)^k
\end{aligned}
$$

Chapitre 2

Problèmes aux limites pour des équations fractionnaires avec conditions intégrales

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour deux problèmes aux limites d'équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions intégrales. En l'occurence :

Premier type :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \\ y(0) + \mu \displaystyle\int_0^T y(s)ds = y(T), \quad \mu \in \mathbb{R}^* \end{cases} \tag{2.1}$$

Deuxième type :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J = [0, T], \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \\ y(T) + y(0) = b \displaystyle\int_0^T y(s)ds, \quad bT \neq 2 \end{cases} \tag{2.2}$$

où ${}^cD^\alpha$ la dérivée d'ordre fractionnaire de type Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard. Nous consacrons la première section à quelques théorèmes relatifs aux points fixes, la deuxième section à l'existence de solutions aux problèmes (2.1) et (2.2) en utilisant ces théorèmes et la troisième section sera réservée à des exemples illustrant l'applicabilité des conditions imposées.

2.1 Quelques théorèmes de point fixe

La théorie du point fixe est un outil assez puissant et éfficace pour trouver des solutions à des problèmes ayant trait aux équations différentielles tant ordinaires, aux dérivées partielles qu'aux fractionnaires ([10], [23]). Pour les applications ultérieures, nous avons besoin de théorèmes suivants relatifs à cette théorie, en l'occurence :

Théorème 2.1.1 *(Banach [2], [20])*
Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur contractant. Alors, A admet un point fixe unique. i.e. $\exists! u \in X$ tel que $Au = u$.

Théorème 2.1.2 *(Schauder [19], [22])*
Soit X une partie convexe et fermée d'un espace de Banach E et soit $A : X \to X$ un opérateur continu tel que $A(X)$ soit relativement compact. Alors A admet un point fixe.

Une autre version du théorème de Schauder est donnée par celui de Leray-Schauder :

Théorème 2.1.3 *(Leray-Schauder)*
Soient X un espace de Banach et $A : X \to X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble :

$$\Lambda = \{u \in X : \lambda A(u) = u, \lambda \in]0, 1[\}$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

Rappelons que Si E et F sont deux espaces de Banach, un opérateur continu $A : E \longrightarrow F$ est complètement continu si et seulement si l'image par A de toute partie bornée de E est relativement compacte dans F i.e. A est compact.

Remarque 2.1.1

— *Ce théorème admet des versions selon l'espace de référence.*

— *Le théorème de Schauder reste valable pour un espace vectoriel normé avec X une partie convexe compacte et A continu de X dans X seulement.*

— *Dans les applications du théorème de Schauder aux problèmes aux limites non linéaires on reformulera le problème sous forme d'un problème de point fixe d'une certaine application F. Il faut ensuite choisir* *un espace E sur lequel cette application soit continue, puis un convexe fermé B tel que F envoie B en $F(B)$ qui soit compact ou relativement compact.*

Notons que pour cette dernière propriété, il suffit parfois de montrer que pour toute suite x_n de C, il existe une sous-suite telle que $(T(x_{n_k}))_k$ converge dans E, sans nécessairement montrer que la sous-suite $(x_{n_k})_k$ elle-même converge, ce qui n'est d'ailleurs pas forcément le cas.

Nous avons par ailleurs, besoin d'un résultat bien connu concernant la compacité relative pour les familles de fonctions :

Théorème 2.1.4 *(Ascoli-Arzelà)*
Soit A un sous ensemble de $C(J,E)$. A est relativement compacte dans $C(J,E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) L'ensemble A est uniformément borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$\|f(x)\| \leq K \quad \text{pour tout} \quad x \in J \text{ et tout } f \in A$$

ii) L'ensemble A est équicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tous } t_1, t_2 \in J \text{ et tout } f \in A.$$

2.2 Existence de solutions

2.2.1 Premier type

Nous commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (2.1)

Définition 2.2.1 *Une fonction $y \in C(J,\mathbb{R})$ est dite solution du problème (2.1) si elle satisfait à la fois :*

l'équation :

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J = [0,T], \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{2.3}$$

et la condition intégrale :

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s)ds = y(T), \quad \mu \in \mathbb{R}^* \tag{2.4}$$

Pour l'existence de solutions du problème (2.1), nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Soit $0 < \alpha \leq 1$ et soit $h \in C(J, \mathbb{R})$ une fonction donnée. Alors le problème aux limites :*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad t \in J \\ \\ y(0) + \mu \displaystyle\int_0^T y(s)ds = y(T), \quad \mu \in \mathbb{R}^* \end{cases} \tag{2.5}$$

admet une seule solution donnée par :

$$y(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds \tag{2.6}$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green suivante :

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{-(T-s)^\alpha + \alpha\, T(t-s)^{\alpha-1}}{T\,\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\,\Gamma(\alpha)} & si\ 0 \leq s \leq t \\ \\ \dfrac{-(T-s)^\alpha}{T\,\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\,\Gamma(\alpha)} & si\ \ t \leq s \leq T \end{cases} \tag{2.7}$$

Preuve 2.2.1 *Par le lemme (1.2.4), on peut réduire le problème (2.5) en une équation intégrale équivalente :*

$$\begin{aligned} y(t) &= I^\alpha h(t) - c_0 \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(s)ds - c_0 \end{aligned}$$

pour une certaine constante $c_0 \in \mathbb{R}$.

Par une simple intégration et en utilisant Fubini, on aura :

$$\begin{aligned} \int_0^T y(s)ds &= \int_0^T \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(\tau)d\tau - c_0 \right) ds \\ &= \int_0^T \left(\int_\tau^T \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} ds \right) h(\tau)d\tau - c_0 T \\ &= \int_0^T \frac{(T-\tau)^\alpha}{\alpha\,\Gamma(\alpha)} h(\tau)d\tau - c_0 T \end{aligned}$$

En appliquant la condition intégrale (2.4), nous obtenons :

$$y(0) = -c_0$$

$$y(T)=\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds-c_0$$

Il reste à trouver c_0.

D'après la même condition intégrale, on a :

$$y(0)+\mu\int_0^T y(s)ds=y(T).$$

c'est à dire :

$$-c_0+\mu\int_0^T y(s)ds=\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds-c_0.$$

$$\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds=\mu\int_0^T \frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\alpha\ \Gamma(\alpha)}h(\tau)d\tau-c_0\mu T$$

donc,

$$c_0\mu T=\mu\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha}}{\alpha\ \Gamma(\alpha)}h(s)ds-\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds.$$

$$c_0=\frac{1}{T}\int_0^T\left(-\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\ \Gamma(\alpha)}+\frac{(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)h(s)ds.$$

par suite, la solution unique de (2.5) est donnée par :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds+\frac{1}{T}\int_0^T\left(-\frac{(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\ \Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds\\
&= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds+\left(\int_0^T-\frac{(T-s)^{\alpha}}{T\ \Gamma(\alpha+1)}+\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\ \mu\ \Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds\\
&= \int_0^t\left(\frac{-(T-s)^{\alpha}+\alpha T(t-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\ \mu\ \Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds+\int_t^T\left(\frac{-(T-s)^{\alpha}}{T\ \Gamma(\alpha+1)}+\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\ \mu\ \Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds\\
&= \int_0^T G(t,s)h(s)ds
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.2.1 *La fonction* $t\to\int_0^T|G(t,s)|ds$ *est continue sur* J*. Elle est donc bornée. Soit :*

$$\widehat{G}=sup\left\{\int_0^T|G(t,s)|ds,t\in J\right\}\tag{2.8}$$

Un premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.2.1 *Sous l'hypothèse :*

(H1) Il existe un $k > 0$ *tel que :*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq k|u - v|, \text{ pour tout } t \in J \text{ et pour chaque } u, v \in \mathbb{R}$$

Si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$k\widehat{G} < 1.$$

alors, il existe une solution unique pour le problème aux limites (2.1).

Preuve 2.2.2 *Considérons l'opérateur* $F : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ *définie par :*

$$F(y)(t) = \int_0^T G(t,s) f(s, y(s)) ds$$

Où $G(t,s)$ *est la fonction de Green donnée par (2.7). D'après le lemme (2.2.1) les points fixes de l'opérateur* F *sont les solutions du problèmes (2.1). On doit montrer que* F *est une contraction. Considérons* $x, y \in C(J, \mathbb{R})$*. Alors pour tout* $t \in J$ *on a :*

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)||f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \\ &\leq k\|x - y\|_\infty \int_0^T |G(t,s)| ds \\ &\leq k\widehat{G}\|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Donc, on obtient que :

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty$$

où :

$$L = k\widehat{G} < 1$$

D'après le théorème de contraction de Banach, la solution serait unique et le théorème est prouvé.

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème du point fixe de Leray-Schauder (2.1.2).

Théorème 2.2.2 *Le problème aux limites (2.1) admet au moins une solution sur* $J = [0, T]$ *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(H2) la fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*

(H3) Il existe une constante $M > 0$ *telle que :*

$$|f(t,u)| \leq M \quad \textit{pour tout } t \in J \textit{ et tout } u \in \mathbb{R}$$

Preuve 2.2.3 *Transformons le problème (2.1) en un problème de point fixe.*

Considérons l'opérateur :

$$F : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$$

définie par :

$$F(y)(t) = \int_0^T G(t,s) f(s,y(s))ds$$

On va montrer que F admet un point fixe, on va utiliser le théorème de point fixe de Leray-Schauder.

La preuve est donnée en quatre étapes.

Étape 1 : *F est continue*

Soit y_n une suite dans $C([0,T],\mathbb{R})$ telle que $y_n \to y$ dans $C([0,T],\mathbb{R})$ ie : $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_\infty = 0$. *Montrons que :* $\lim_{n\to\infty} \|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0$, *pour tout $t \in J$.*

En effet,

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &= \left| \int_0^T G(t,s) f(s,y_n(s))ds - \int_0^T G(t,s) f(s,y(s))ds \right| \\
&\leq \int_0^T |G(t,s)||f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\leq \int_0^T |G(t,s)| \sup_{s\in[0,T]} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\
&\leq \left(\int_0^T |G(t,s)|ds \right) \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty
\end{aligned}$$

Puisque f est une fonction continue, nous avons :

$$\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \leq \left(\int_0^T |G(t,s)|ds \right) \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty \to 0 \quad \textit{quand } n \to \infty,$$

donc, l'opérateur F est continu.

Étape 2 : *L'image par F de tout ensemble borné est un borné dans $C(J,\mathbb{R})$.*

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante strictement positif l telle que pour chaque $y \in \overline{B}_\varepsilon = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}); \|y\|_\infty \leq \varepsilon\}$, on ait : $\|F(y)\|_\infty \leq l$.

On a pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} |F(y)(t)| &= \left|\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds\right| \\ &\leq \int_0^T |G(t,s)||f(s,y(s))|ds \end{aligned}$$

de $(H3)$ et pour tout $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned} |F(y)(t)| &\leq M\int_0^T |G(t,s)|ds \\ &\leq M \sup_{s\in[0,T]} \int_0^T |G(t,s)|ds \end{aligned}$$

donc,

$$\|F(y)\|_\infty \leq M\widehat{G} = l$$

et $F(\overline{B}_\varepsilon)$ est borné.

Étape 3 : *L'image de tout ensemble borné par F est un ensemble équicontinu dans $C([0,T],\mathbb{R})$.*

Soit $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$ et $\overline{B}_\varepsilon$ étant l'ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ de l'étape deux et soit $y \in \overline{B}_\varepsilon$.

Alors,

$$\begin{aligned} |F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &= \left|\int_0^T G(t_2,s)f(s,y(s))ds - \int_0^T G(t_1,s)f(s,y(s))ds\right| \\ &\leq \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\,|f(s,y(s))|ds \\ &\leq M\int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\,ds. \end{aligned}$$

quand $t_1 \to t_2$, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend vers 0.

D'après les étapes précédentes et le Théorème d'Arzelá-Ascoli, nous pouvons conclure que F est un opérateur complètement continu.

Étape 4 : *Il reste à montrer que :* $\Lambda = \{y \in C(J,\mathbb{R}), \quad y = \lambda F(y) \quad pour \quad 0 < \lambda < 1\}$ *est borné.*

Soit $y \in \Lambda$, alors :

$$y = \lambda F(y), \quad pour\ 0 < \lambda < 1,$$

donc pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda \left[\int_0^T G(t,s) f(s, y(s)) ds \right]$$

pour $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
|y(t)| &= |\lambda F(y)(t)| \\
&\leq |F(y)(t)| \\
&\leq \int_0^T |G(t,s)||f(s,y(s))| ds \\
&\leq M \int_0^T |G(t,s)| ds \\
&\leq M \sup_{s \in [0,T]} \int_0^T |G(t,s)| ds \\
&\leq M\widehat{G}
\end{aligned}$$

alors,

$$\|y\|_\infty \leq M\widehat{G} = R$$

avec R une constante strictement positif. Cela montre que Λ est uniformément borné. Par suite, on déduit que F admet un point fixe qui est une solution du problème aux limites.

Exemple 2.2.1 *Considérons le problème aux limites :*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = \dfrac{e^{-t}}{10(1+e^t)} |y(t)|, t \in J = [0,1], 0 < \alpha < 1 \\ \\ y(0) + \displaystyle\int_0^1 y(s) ds = y(1) \end{cases} \tag{2.9}$$

Soit :

$$f(t,x)=\frac{e^{-t}}{10(1+e^{t})}x,(t,x)\in J\times[0,\infty)$$

soit $x,y\in[0,\infty)$ *et* $t\in J$. *Alors on a :*

$$\begin{aligned}|f(t,x)-f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{10(1+e^{t})}|x-y| \\ &\leq \frac{1}{20}|x-y|\end{aligned}$$

et la condition $(H1)$ *est vérifiée avec* $k=\dfrac{1}{20}$.

D'après (2.7) G est donnée par :

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{-(1-s)^{\alpha}+\alpha(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}+\dfrac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & si\ 0\leq s\leq t\\[2ex] \dfrac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\dfrac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & si\ t\leq s\leq 1\end{cases}\tag{2.10}$$

A partir de ces deux relations et en intégrant sur J, nous aurons :

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(t,s)ds &= \int_0^t G(t,s)ds+\int_t^1 G(t,s)ds\\ &= \int_0^t\left(\frac{-(1-s)^{\alpha}+\alpha(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)ds+\int_t^1\left(\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)ds\\ &= \left[\frac{(1-s)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\right]_0^t-\left[\frac{\alpha(t-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha+1)}\right]_0^t+\left[\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right]_0^t+\left[\frac{(1-s)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\right]_t^1\\ &\quad-\left[\frac{(1-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right]_t^1\\ &= \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}+\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}-\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}+\frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\end{aligned}$$

par suite :

$$\widehat{G}<\frac{4}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{3}{\Gamma(\alpha+2)}$$

alors, la condition $k\widehat{G}<1$ *est satisfaite pour* $T=\mu=1$. *En effet,* $k\widehat{G}<1$ *est satisfaite pour chaque* $\alpha\in[0,1]$. *Alors d'après le théorème (2.1.1), le problème (2.9) admet une seule solution sur* $[0,1]$.

2.2.2 Deuxième type

Nous commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (2.2).

Définition 2.2.2 *Une fonction $y \in C([0,T],\mathbb{R})$ est dite une solution du problème (2.2) si y satisfait à la fois :*

l'équation :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t,y(t)) \quad 0 < \alpha \leq 1$$

et la condition :

$$y(T) + y(0) = b\int_0^T y(s)ds.$$

On démontre le lemme suivant qui est important pour donner la solution intégrale du problème (2.2).

Lemme 2.2.2 *Soient $0 < \alpha \leq 1$, $bT \neq 2$ et $h : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation fractionnaire intégrale :*

$$y(t) = \frac{b}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}h(s)ds - \frac{1}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds.$$

si et seulement si y est une solution du problème :

$$\begin{cases} ^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t), \quad 0 < \alpha \leq 1 & (*) \\ \\ y(T) + y(0) = b\int_0^T y(s)ds, \quad bT \neq 2 & (**) \end{cases} \tag{2.11}$$

Preuve 2.2.4 *On suppose que y satisfait l'équation $(*)$ du problème (2.11), en appliquant le lemme (1.2.4) on réduit le problème (2.11) à l'équation intégrale suivante :*

$$y(t) = c_0 + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds. \tag{2.12}$$

pour une certaine constante $c_0 \in \mathbb{R}$.

Par une simple intégration et en utilisant Fubini, on aura :

$$\begin{aligned}
\int_0^T y(s)ds &= \int_0^T \left(\int_0^s \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(\tau)d\tau + c_0\right) ds \\
&= \int_0^T \left(\int_\tau^T \frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds\right) h(\tau)d\tau + c_0T \\
&= \int_0^T \frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}h(\tau)d\tau + c_0T.
\end{aligned}$$

Donc,

$$b\int_0^T y(s)ds = b\int_0^T \frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}h(\tau)d\tau + c_0bT.$$

En appliquant la condition intégrale $(**)$, *on obtient :*

$$y(0) = c_0$$

$$y(T) = c_0 + \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds.$$

Il reste à trouver c_0. *On a, d'après* $(**)$ *:*

$$y(T) + y(0) = b\int_0^T y(s)ds$$

c'est à dire :

$$c_0 + \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds + c_0 = b\int_0^T \frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}h(\tau)d\tau + c_0bT$$

Donc,

$$c_0(2-bT) = b\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}h(s)ds - \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds$$

Alors,

$$c_0 = \frac{b}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}h(s)ds - \frac{1}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds$$

Donc, on obtient l'équation :

$$y(t) = \frac{b}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}h(s)ds - \frac{1}{2-bT}\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds.$$

Un premier résultat est basée sur l'application du théorème de point fixe de Banach.

Théorème 2.2.3 *On suppose que l'hypothèse suivante soit vérifiée :*

$(H1)$ *Il existe une constante* $k > 0$ *telle que :*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \le k|u-v| \quad \forall t \in [0,T] \text{ et } u, v \in \mathbb{R}$$

Si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\left[\frac{bT^{\alpha+1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+2)}+\frac{(3-bT)T^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}\right]k<1. \tag{2.13}$$

Alors, le problème (2.2) admet une solution unique sur $J=[0,T]$.

Preuve 2.2.5 *On transforme le problème (2.2) en un problème de point fixe en considérant l'opérateur :*

$$F: C([0.T],\mathbb{R})\to C([0.T],\mathbb{R})$$

$$F(y)(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,y(s))ds+\int_0^T\frac{b(T-s)^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}f(s,y(s))ds-\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}f(s,y(s))ds \tag{2.14}$$

D'après le lemme (2.2.2) les solutions seront les points fixes de l'opérateur F.

En appliquant le principe de contraction de Banach, on va montrer que F est une contraction.

Soient $x,y\in\mathbb{R}$; $\forall t\in[0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}
|F(x)(t)-F(y)(t)| &\leq \int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds\\
&\quad+\int_0^T\frac{b(T-s)^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds\\
&\quad+\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds\\
&\leq k\|x-y\|_\infty\left[\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds+\int_0^T\frac{b(T-s)^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}ds+\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}ds\right]\\
&\leq k\|x-y\|_\infty\left[\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds+\int_0^T\frac{b(T-s)^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}ds+\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}ds\right]\\
&\leq k\|x-y\|_\infty\left[\frac{-(T-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}+\frac{-b(T-s)^{\alpha+1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+2)}+\frac{-(T-s)^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}\right]_0^T\\
&\leq \left[\frac{bT^{\alpha+1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+2)}+\frac{(3-bT)T^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}\right]k\|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

C'est-à -dire :

$$\|F(x)-F(y)\|_\infty \leq \left[\frac{bT^{\alpha+1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+2)}+\frac{(3-bT)T^\alpha}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}\right]k\|x-y\|_\infty$$

d'après la condition (2.13), on conclut que F admet un point fixe unique, ce qui implique que le problème (2.2) admet une seule solution dans $C(J,\mathbb{R})$.

Le deuxième résultat d'existence est basé sur le théorème de point fixe de Leray-Schauder.

Théorème 2.2.4 *On suppose les hypothèses suivantes vérifiées :*

$(H2)$ *La fonction $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue.*

$(H3)$ *Il existe une constante $M>0$ tel que :*

$$f(t,u)\leq M \quad ,\forall\ t\in J \quad et\ u\in\mathbb{R}$$

Alors le problème (2.2) admet au moins une solution dans $C([0,T],\mathbb{R})$.

Preuve 2.2.6 *On va utiliser le théorème de Leray-Schauder pour montrer que F définit par (2.14) admet des points fixes qui sont solutions du problème (2.2). La preuve sera donnée en 4 étapes.*

Étape 1 : *continuité de F*

Soit (y_n) une suite qui converge vers y dans $C([0,T],\mathbb{R})$, $\forall t\in[0,T]$, on a :

$$\begin{aligned}|(Fy_n)(t)-(Fy)(t)| \;\leq\; & \int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s)|ds\\ & +\int_0^T\frac{b(T-s)^\alpha}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s)|ds\\ & +\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s)|ds\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|(Fy_n)(t)-(Fy)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \sup_{s\in[0,T]} |f(s,y_n(s))-f(s,y(s)|ds \\
&+\int_0^T \frac{b(T-s)^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)} \sup_{s\in[0,T]} |f(s,y_n(s))-f(s,y(s)|ds \\
&+\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)} \sup_{s\in[0,T]} |f(s,y_n(s))-f(s,y(s)|ds \\
&\leq \left[\frac{bT^{\alpha+1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+2)}+\frac{(3-bT)T^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}\right] \|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_{\infty}.
\end{aligned}
$$

Puisque f est continue, on a donc,

$$\|F(y_n)-F(y)\|_{\infty} \to 0 \ \textit{lorsque} \ n \to \infty$$

Étape 2 : *L'image d'un ensemble borné est un ensemble uniformément borné.*

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante positive l telle que pour chaque $y \in \overline{B}_{\varepsilon}$ où :

$$\overline{B}_{\varepsilon} = \{y \in C([0,T];\mathbb{R}); \|y\|_{\infty} \leq \varepsilon\}$$

on ait : $\|F(y)\|_{\infty} < l$.

Pour tout $t \in I$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(s,y(s))| + \int_0^T \frac{b(T-s)^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}|f(s,y(s)|ds \\
&+ \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}|f(s,y(s)|ds \\
&\leq M\left[\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds + \int_0^T \frac{b(T-s)^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}ds + \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}ds\right] \\
&\leq M\left[\frac{bT^{\alpha+1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+2)}+\frac{(3-bT)T^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}\right].
\end{aligned}
$$

Donc,

$$\|F(y)\|_{\infty} \leq M\left[\frac{bT^{\alpha+1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+2)}+\frac{(3-bT)T^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}\right] = l$$

Étape 3 : *L'image d'un ensemble borné est un ensemble équicontinue dans* $C([0.T],\mathbb{R})$
Soient $t_1,t_2\in[0,T]$, $t_1<t_2$ *et* $\overline{B}_\varepsilon$ *l'ensemble borné défini dans l'étape 2.*

Si $y\in\overline{B}_\varepsilon$, *alors :*

$$\begin{aligned}
|(Fy)(t_2)-(Fy)(t_1)| &= \Big|\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,y(s))ds+\int_0^T\frac{b(T-s)^\alpha}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}f(s,y(s))ds\\
&- \int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}f(s,y(s))ds-\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,y(s))ds\\
&- \int_0^T\frac{b(T-s)^\alpha}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}f(s,y(s))ds+\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}f(s,y(s))ds)\Big|\\
&= \Big|\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,y(s))ds-\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,y(s))ds\Big|\\
&= \Big|\int_0^{t_1}\left[\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]f(s,y(s))ds+\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(s,y(s))ds\Big|\\
&\le \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}-(t_2-s)^{\alpha-1}ds+\frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\\
&\le \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[t_1^\alpha+(t_2-t_1)^\alpha-t_2^\alpha\right]+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[(t_2-t_1)^\alpha\right]\\
&\le \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha+\frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}\left[t_1^\alpha-t_2^\alpha\right]
\end{aligned}$$

Lorsque $t_1\to t_2$, *le membre droite de l'inégalité précédente tend vers zéro.*
Comme conséquence des étapes 1, 2 et 3 avec le théorème d'Arzelà -Ascoli, on conclut que F *est continu et complètement continu.*

Étape 4 :
L'ensemble suivant est borné :

$$\Lambda=\{y\in C([0,T],\mathbb{R}),y=\lambda F(y)\ \ \textit{pour certain } 0<\lambda<1\}$$

En effet, on a pour $t\in J$ *:*

$$
\begin{aligned}
|y(t)| = |\lambda F(y)(t)| &\leq |F(y)(t)| \\
&\leq \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(s,y(s))|ds + \int_0^T \frac{b(T-s)^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}\,|f(s,y(s))|\,ds \\
&+ \int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}\,|f(s,y(s))|\,ds \\
&\leq M\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds + M\int_0^T \frac{b(T-s)^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}ds \\
&+ M\int_0^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha)}ds \\
&\leq \frac{MT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{MbT^{\alpha+1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+2)} + \frac{MT^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq M\left[\frac{bT^{\alpha+1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+2)} + \frac{(3-bT)T^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}\right]
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
\|F(y)\|_{\infty} \leq M\left[\frac{bT^{\alpha+1}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+2)} + \frac{(3-bT)T^{\alpha}}{(2-bT)\Gamma(\alpha+1)}\right] = R
$$

En conséquence du théorème de point fixe de Leray-Schauder, on déduit que F a des des points fixes qui sont des solutions du problème (2.2).

Chapitre 3

Problème aux limites pour une équation différentielle fractionnaire avec conditions intégrales non locales

Le but de ce chapitre est l'étude de l'existence et l'unicité de solution du problème :

$$\begin{cases} {}^cD^q y(t) = f(t, y(t)), \quad 1 < q \leq 2, \quad t \in J = [0,1], \\ \\ y(0) = g(y) + \alpha \displaystyle\int_0^{\xi} y(s)ds, \quad 0 < \xi < 1, \\ \\ y(1) = h(y) + \beta \displaystyle\int_0^{\eta} y(s)ds, \quad 0 < \eta < 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec ${}^cD^q$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre q, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donnée. $g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions données vérifiant quelques hypothèses qui seront définies par la suite.

Nous commençons par donner la définition de ce que nous exprimons comme solution du problème (3.1).

Définition 3.0.1 *Une fonction $y \in C([0,T], \mathbb{R})$ est dite une solution du problème (3.1) si y satisfait à la fois :*

l'équation :

$$
{}^{c}D^{q}y(t) = f(t, y(t)), \quad 1 < q \leq 2, \quad t \in J = [0, 1] \tag{3.2}
$$

la première condition intégrale :

$$
y(0) = g(y) + \alpha \int_0^{\xi} y(s)ds, \quad 0 < \xi < 1 \tag{3.3}
$$

et la deuxième condition intégrale :

$$
y(1) = h(y) + \beta \int_0^{\eta} y(s)ds, \quad 0 < \eta < 1 \tag{3.4}
$$

3.1 Existence et unicité de solution

Dans le contexte de l'étude de nos résultats d'existence et d'unicité, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1.1 *Soit $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. La solution $y(t)$ du problème aux limites :*

$$
\begin{cases}
{}^{c}D^{q}y(t) = \sigma(t), \quad 1 < q \leq 2, \quad t \in J = [0, 1], \\[2ex]
y(0) = g(y) + \alpha \displaystyle\int_0^{\xi} y(s)ds, \quad 0 < \xi < 1, \\[2ex]
y(1) = h(y) + \beta \displaystyle\int_0^{\eta} y(s)ds, \quad 0 < \eta < 1,
\end{cases} \tag{3.5}
$$

est donnée par l'équation intégrale :

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\sigma(s)ds \\
&- \frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\int_0^\xi\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds \\
&+ \frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds \qquad (3.6)\\
&- \frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\int_0^1 (1-s)^{q-1}\sigma(s)ds \\
&- \frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]g(y)+\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]h(y),
\end{aligned}
$$

où :

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[(1-\alpha\xi)(2-\beta\eta^2)+\alpha\xi^2(1-\beta\eta)\right] \neq 0,$$

Preuve 3.1.1 *Par le lemme (1.2.3), nous pouvons écrire :*

$$
\begin{aligned}
{}^cD^q y(t) = \sigma(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad {}^cD^q y(t) = {}^cD^q I^q\sigma(t) \\
&\Longleftrightarrow \quad {}^cD^q(y(t) - I^q\sigma(t)) = 0,
\end{aligned}
$$

puis, vu le lemme (1.2.1) avec $n = 2$ et $\alpha = q$, $1 < q \leq 2$, on tire :

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\sigma(s)ds. \qquad (3.7)$$

En intégrant l'expression sur $[0,\xi]$, et en ajoutant $g(y)$ aux deux côtés après l'avoir multipliée par α, on trouve que :

$$g(y) + \alpha\int_0^\xi y(s)ds = g(y) + \alpha c_0\xi + \alpha c_1\frac{\xi^2}{2} + \frac{\alpha}{\Gamma(q)}\int_0^\xi\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds.$$

De la même manière, nous obtenons :

$$h(y) + \beta\int_0^\eta y(s)ds = h(y) + \beta c_0\eta + \beta c_1\frac{\eta^2}{2} + \frac{\beta}{\Gamma(q)}\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds.$$

En utilisant les conditions aux limites du problème (3.1), on obtient :

$$(1-\alpha\xi)c_0 - \alpha\frac{\xi^2}{2}c_1 = g(y) + \alpha A \tag{3.8}$$

$$(1-\beta\eta)c_0 + \left(1-\beta\frac{\eta^2}{2}\right)c_1 = h(y) + \beta B - C \tag{3.9}$$

où,

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{\xi}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds \\
B &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{\eta}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}\sigma(m)dm\right)ds. \\
C &= \frac{1}{\Gamma(q))}\int_0^{1}(1-s)^{q-1}\sigma(s)ds
\end{aligned}$$

La résolution du système (3.8) et (3.9), donne les constantes :

$$c_0 = \frac{1}{\gamma}\left[\alpha\beta\frac{\xi^2}{2}B - \alpha\frac{\xi^2}{2}C - \alpha\left(1-\beta\frac{\eta^2}{2}\right)A + \alpha\frac{\xi^2}{2}h(y) - \left(1-\beta\frac{\eta}{2}\right)g(y)\right],$$

et

$$c_1 = \frac{1}{\gamma}\left[\beta(1-\alpha\xi)B - (1-\alpha\xi)C - \alpha(1-\beta\eta)A + (1-\alpha\xi)h(y) - (1-\beta\eta)g(y)\right]$$

En substituant les valeurs de c_0 et c_1 dans (3.7), on obtient (3.6).

Maintenant, on considère l'espace de Banach $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme : $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|$.

Avant d'énoncer les théorèmes, nous considérons les hypothèses suivantes :

$(H1)$: $|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|, \quad \forall t \in J, \quad L > 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$

$(H2)$: $|g(x) - g(y)| \leq l_1|x-y|, \quad l_1 > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$

$(H3)$: $|h(x) - h(y)| \leq l_2|x-y|, \quad l_2 > 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$

$(H4) : |f(t,x)| \leq \mu(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \quad et \quad \mu \in C([0,1], \mathbb{R}_+)$

Pour plus de commodité, nous utilisons les notations suivantes :

$$A_0 = \frac{1}{\Gamma(q+1)} \left(1 + \frac{A_1 + A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right) + \frac{A_3 + A_4}{2|\gamma|} \tag{3.10}$$

$$A_1 = |\alpha| \left(|2 - \beta\eta^2| + 2|1 - \beta\eta|\right) \xi^{q+1}$$

$$A_2 = \left(|\alpha|\xi^2 + 2|1 - \alpha\xi|\right) \left(|\beta|\eta^{q+1} + q + 1\right)$$

$$A_3 = |2 - \beta\eta^2| + 2|1 - \beta\eta|$$

$$A_4 = |\alpha|\xi^2 + 2|1 - \alpha\xi|$$

Théorème 3.1.1 *Supposons que $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui satisfait l'hypothèse $(H1)$ et $g, h : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions qui satisfont respectivement les hypothèses $(H2)$ et $(H3)$. Si $L^* A_0 < 1$, où $L^* = max\{L, l_1, l_2\}$ et A_0 est donné par (3.10) alors, le problème aux limites (3.1) a une solution unique.*

Preuve 3.1.2 *Pour la preuve du théorème* 3.1.1 *et en vue du lemme (3.1.1), nous définissons l'opérateur :*

$$N : C([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R})$$

par :

$$\begin{aligned}
N(y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,y(s))ds \\
&- \frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\int_0^\xi\left(\int_0^s (s-m)^{q-1} f(m,y(m))dm\right)ds \\
&+ \frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}) f(m,y(m))dm\right)ds \qquad (3.11)\\
&- \frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\int_0^1 (1-s)^{q-1} f(s,y(s))ds \\
&- \frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]g(y)+\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]h(y)
\end{aligned}$$

Posons :

$$M=\sup_{t\in[0,1]}|f(t,0)|, \quad M_1=\sup_{y\in\mathbb{R}}|g(y)|, \quad M_2=\sup_{y\in\mathbb{R}}|h(y)|$$

et choisissons : $\rho \geq \dfrac{A_0 M^*}{1-L^*A_0}$, *où :* $M^*=max\{M,M_1,M_2\}$.

Premièrement, on montre que $N(B_\rho)\subset B_\rho$, *où :* $B_\rho=\{y\in C([0,1],\mathbb{R}): \quad \|y\|\leq\rho\}$.

Pour tout $y\in B_\rho$, *nous avons :*

$$\begin{aligned}
|N(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\left|f(s,y(s))\right| ds \\
&+ \left|\frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left(\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right)\right|\int_0^\xi\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}|f(m,y(m))|dm\right)ds \\
&+ \left|\frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left(\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right)\right|\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}|f(m,y(m))|dm\right)ds \\
&+ \left|\frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left(\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right)\right|\int_0^1 (1-s)^{q-1}|f(s,y(s)|ds \\
&+ \left|\frac{1}{\gamma}\left(\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right)\right||g(y)|+\left|\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right)\right||h(y)|
\end{aligned}$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
|N(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}(|f(s,y(s))-f(s,0)|+|f(s,0)|)ds \\
&+ \left|\frac{\alpha}{\gamma\ \Gamma(q)}\left(\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right)\right| \times \\
&\int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}(|f(m,y(m))-f(m,0)|+|f(m,0)|)dm\right)ds \\
&+ \left|\frac{\beta}{\gamma\ \Gamma(q)}\left(\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right)\right| \times \\
&\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}(|f(m,y(m))-f(m,0)|+|f(m,0)|)dm\right)ds \\
&+ \left|\frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left(\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right)\right| \times \\
&\int_0^1 (1-s)^{q-1}\left(|f(s,y(s)-f(s,0)|+|f(s,0)|\right)ds \\
&+ \left|\frac{1}{\gamma}\left(\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right)\right|(|g(y)-g(0)|+|g(0)|) \\
&+ \left|\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right)\right|(|h(y)-h(0)|+|h(0)|)\,, \\
\\
&\leq (L\rho+M)\,(\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}ds \\
&+ \frac{|\alpha|}{|\gamma|\Gamma(q)}\left(\frac{|2-\beta\eta^2|}{2}+|1-\beta\eta|\right)\int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}dm\right)ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{|\beta|}{|\gamma|\Gamma(q)}\left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right)\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}dm\right)ds \\
&+ \quad \frac{1}{|\gamma|\Gamma(q)}\left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right)\int_0^1 (1-s)^{q-1}ds) \\
&+ \quad \frac{1}{|\gamma|}\left(\frac{|2-\beta\eta^2|}{2}+|1-\beta\eta|\right)(l_1\rho+M_1) \\
&+ \quad \frac{1}{|\gamma|}\left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right)(l_2\rho+M_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad (L^*\rho+M^*)\left(\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{A_1+A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right)+\frac{A_3+A_4}{2|\gamma|}\right) \\
&= \quad (L^*\rho+M^*)A_0 \leq \rho
\end{aligned}
$$

c'est à dire que : $\|N(y)\|_\infty \leq \rho$.

De plus, pour tout $t \in [0,1]$ *et* $x, y \in C([0,1],\mathbb{R})$*, nous avons :*

$$
\begin{aligned}
&|N(x)(t)-N(y)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\left|f(s,x(s)-f(s,y(s))\right|ds \; + \\
&+\left|\frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\right|\int_0^\xi\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}|f(m,x(m)-f(m,y(m))|dm\right)ds \\
&+\left|\frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\right|\int_0^\eta\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}|f(m,x(m)-f(m,y(m))|dm\right)ds \\
&+\left|\frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\right|\int_0^1 (1-s)^{q-1}|f(s,x(s)-f(s,y(s)|ds \\
&+\left|\frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\right||g(x)-g(y)|+\left|\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\right||h(x)-h(y)|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|N(x)(t)-N(y)(t)| \quad & \leq L|x-y|[\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}ds \\
& +\frac{|\alpha|}{|\gamma|\Gamma(q)}\left(\frac{|2-\beta\eta^2|}{2}+|1-\beta\eta|\right)\int_0^\xi \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}dm\right)ds \\
& +\frac{|\beta|}{|\gamma|\Gamma(q)}\left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right)\int_0^\eta \left(\int_0^s (s-m)^{q-1}dm\right)ds \\
& +\frac{1}{|\gamma|\Gamma(q)}\left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right)\int_0^1 (1-s)^{q-1}ds] \\
& +l_1|x-y|\frac{1}{|\gamma|}\left(\frac{|2-\beta\eta^2|}{2}+|1-\beta\eta|\right) \\
& +l_2|x-y|\frac{1}{|\gamma|}\left(\frac{|\alpha|\xi^2}{2}+|1-\alpha\xi|\right) \\
& \\
& \leq L^*|x-y|\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{A_1+A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right)+\frac{A_3+A_4}{2|\gamma|}\right] \\
& = L^*A_0|x-y|
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$\|N(x)-N(y)\|_\infty \leq L^*A_0\|x-y\|_\infty.$$

Le nombre L^* ne dépend que des paramètres indiqués dans notre problème. Puisque $L^*A_0 < 1$, alors N est une contraction. Ainsi, par le théorème du point fixe de Banach, il s'ensuit que notre problème aux limites (3.1) *a une solution unique.*

3.2 Exemple

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\frac{3}{2}}y(t) = \dfrac{1}{(t+4)^2}\dfrac{|y|}{1+|y|} + 1 + cos^2t, \quad t \in J = [0,1], \\ \\ y(0) = \dfrac{1}{16}y(\mu) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} y(s)ds, \quad \mu \in [0,1], \\ \\ y(1) = \dfrac{1}{12}y(\nu) + \displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} y(s)ds, \quad \nu[0,1], \end{cases} \tag{3.12}$$

Dans cet exemple, nous avons :

$$q = \frac{3}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1, \quad \xi = \frac{1}{4}, \quad \eta = \frac{3}{4}$$

et

$$f(t, y(t)) = \frac{1}{(t+4)^2}\frac{|y|}{1+|y|} + 1 + cos^2t, \quad g(y) = \frac{1}{16}y(\mu), \quad h(y) = \frac{1}{12}y(\nu)$$

Alors,

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &\leq \frac{1}{16}|x-y|, \quad L = \frac{1}{16} \\ |g(x) - g(y)| &\leq \frac{1}{16}|x-y|, \quad l_1 = \frac{1}{16} \\ |h(x) - h(y)| &\leq \frac{1}{12}|x-y|, \quad l_2 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

En outre,

$$L^* = \frac{1}{12}, \quad \gamma = \frac{81}{128}, \quad A_1 = \frac{31}{1024}, \quad A_2 = \frac{513\sqrt{3} + 4560}{1024}, \quad A_3 = \frac{31}{16}, \quad A_4 = \frac{57}{32},$$

$$2|\gamma|(q+1) = \frac{405}{128}, \quad 2|\gamma| = \frac{162}{128},$$

par suite,

$$L^*A_0 = \frac{1}{9\sqrt{\pi}}\left(\frac{19\sqrt{3}}{120} + \frac{7831}{3240}\right) + \frac{119}{1944} \approx 0.337498344 < 1.$$

Donc, toutes les hypothèses du théorème (3.1.1) sont satisfaites et par conséquent le problème aux limites (3.12) a une solution unique.

Notre deuxième résultat est basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Théorème 3.2.1 ***(Théorème du point fixe de Krasnoselskii)***
Soit M un sous-ensemble non vide convexe et fermé d'un espace de Banach X. Soient A, B deux opérateurs tels que :

(i) $Ax + By \in M$ *pour tout* $x, y \in M$.

(ii) A *est compact et continu.*

(iii) B *est une contraction.*

Alors, il existe $z \in M$ *tel que* $z = Az + Bz$.

Théorème 3.2.2 *Soit* $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue transformant les sous-ensembles bornés de* $[0,1] \times \mathbb{R}$ *en sous-ensembles relativement compact de* $\mathbb{R}$ *et supposons que les hypothèses* $(H1) - (H4)$ *ont lieu.*

Si :

$$L^* \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} \left(\frac{A_1 + A_2}{2|\gamma|(q+1)} \right) + \frac{A_3 + A_4}{2|\gamma|} \right] < 1 \tag{3.13}$$

alors, le problème aux limites (3.1) *admet une solution unique dans* $[0,1]$.

Preuve 3.2.1 *Posons :* $M_3 = \sup_{t \in [0,t]} |\mu(t)|$, *et fixons :*

$$\overline{\rho} \geq \overline{M} \left[\frac{1}{\Gamma(q+1)} \left(1 + \frac{A_1 + A_2}{2|\gamma|(q+1)} \right) + \frac{A_3 + A_4}{2|\gamma|} \right]$$

avec : $\overline{M} = max\{M_1, M_2, M_3\}$ *et considérons :* $B_{\overline{\rho}} = \{y \in C([0,1], \mathbb{R}) : \quad \|y\|_\infty \leq \overline{\rho}\}$. *Pour appliquer le théorème (3.2.1) de Krasnoselskii, nous définissons deux opérateurs* P *et* Q *par :*

$$\begin{aligned}
P(y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f(s,y(s))ds \\
Q(y)(t) = &- \frac{\alpha}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]\int_0^{\xi}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}f(m,y(m))dm\right)ds \\
&+ \frac{\beta}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\int_0^{\eta}\left(\int_0^s (s-m)^{q-1}f(m,y(m))dm\right)ds \\
&- \frac{1}{\gamma\Gamma(q)}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]\int_0^{1}(1-s)^{q-1}f(s,y(s))ds \\
&- \frac{1}{\gamma}\left[\frac{2-\beta\eta^2}{2}+(1-\beta\eta)t\right]g(y)+\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\alpha\xi^2}{2}+(1-\alpha\xi)t\right]h(y),
\end{aligned}$$

- *Pour $x, y \in B_{\overline{\rho}}$, nous trouvons que :*

$$\begin{aligned}
\|Px+Qy\|_\infty &\leq \frac{M_3}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{A_1+A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right)+\frac{M_1A_3+M_2A_4}{2|\gamma|} \\
&\leq \overline{M}\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{A_1+A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right)+\frac{A_3+A_4}{2|\gamma|}\right] \\
&\leq \overline{\rho}
\end{aligned}$$

Donc, $Px+Qy \in B_{\overline{\rho}}$.

- *Pour $x, y \in C([0,1],\mathbb{R})$ et tout $t \in [0,1]$, nous avons :*

$$|Q(x)(t)-Q(y)(t)| \leq L^*\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{A_1+A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right)+\frac{A_3+A_4}{2|\gamma|}\right]|x-y|$$

  ce qui implique que :

$$\|Q(x)(t)-Q(y)(t)\|_\infty \leq L^*\left[\frac{1}{\Gamma(q+1)}\left(1+\frac{A_1+A_2}{2|\gamma|(q+1)}\right)+\frac{A_3+A_4}{2|\gamma|}\right]\|x-y\|_\infty$$

  Alors, il en résulte par la condition (3.10) que Q est une contraction.

- *La continuité de f implique que l'opérateur P est continu. En outre, nous avons :*

$$\|Py\|_\infty \leq \frac{M_3}{\Gamma(q+1)},$$

  ce qui signifie que P est uniformément borné dans $B_{\overline{\rho}}$.

- *Maintenant, nous prouvons que l'opérateur P est compact.*

Tenant compte de la condition $(H1)$, nous définissons :

$$f^* = \sup_{(t,y)\in[0,1]\times B_{\overline{\rho}}} |f(t,y)|$$

Alors, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |P(y)(t_1) - P(y)(t_2)| &= \frac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_0^{t_1} \left[(t_1-s)^{q-1} - (t_2-s)^{q-1}\right] f(s,y(s))ds - \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} f(s,y(s))ds \right| \\ &\leq \frac{f^*}{\Gamma(q+1)} \left|2(t_2-t_1)^q + t_1^q - t_2^q\right| \end{aligned} \tag{3.14}$$

Le second membre de (3.14) est indépendant de x et tend vers zéro quand $t_2 \to t_1$, alors P est équicontinu. En utilisant le fait que f transforme les sous-ensembles bornés en sous-ensembles relativement compacts, on obtient $P(B)(t)$ est relativement compact dans $\mathbb{R}$ pour chaque t, (où B est un sous-ensemble de $C([0,1]\times\mathbb{R})$. Donc P est relativement compact dans $B_{\overline{\rho}}$. Par conséquent, par le théorème d'Ascoli-Arzela, nous concluons que P est compact dan $B_{\overline{\rho}}$.

Ainsi, toutes les hypothèses de Théorème (3.2.1) sont satisfaites. Donc le problème aux limites (3.1) *admet une solution unique dans* $[0,1]$.

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité de solutions à des problèmes aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec conditions intégrales dans un premier temps et, dans un deuxième temps, nous avons traité un problème aux limites avec conditions intégrales aux limites non locales.

Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe. En particulier, on a utilisé les théorèmes de point fixe de Banach, de Schauder et celui de Krasnoselskii.

Résumé

Ce mémoire est consacrée a l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour des problèmes aux limites concernant les équations différentielles qui sont engendrées par la dérivée de Caputo, avec des conditions intégrales Pour cela, on va utiliser les théorèmes de points fixes telles que : le théorème de Banach, Schauder et sa variante Leray-Shauder, et le théorème de krasnoselski.

Mots clés : Calcul fractionnaire, point fixe, problème aux limites, intégrale, non locale.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the existence and uniqueness of solutions for problems at the limits concerning the differential equations which are generated by the derivative of Caputo, with integral conditions For that, we will use fixed point theorems such as : the Banach theorem, Schauder and its Leray-Shauder variant, and the krasnoselski theorem.

Key words : Fractional calculation, fixed point, boundary problem, integral, not local.

Perspectives

On projette dans la suite de ce travail de généraliser ces résultats à des problèmes similaires mais avec des conditions intégrodifférentielles qui font intervenir les dérivées fractionnaires ainsi que des intégrales fractionnaires.

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, S. Arshad, D.O'Regan, V. Lupulescu, Fuzzy fractional integral equations under compactness type condition., Fract. Calc. Appl., 15 (2012), 572-590.

[2] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales., Fund. Math., vol. 3, (1922), p. 133-181.

[3] M. Benchohra, J.R. Graef and S. Hamani, Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations, Appl. Anal. 87 (7) (2008), 851-863.

[4] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, boundary value problems for differential equations with fractional order, Surv. Math. Appl. 3 (2008), 1-12.

[5] M. Benchohra and F.Ouaar, Existence results for nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions, Math. Anal and Appl 2 (2010), 7-15.

[6] M. Benchohra, S. Hamani, S.K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Anal. 71 (2009), 2391-2396.

[7] K. Diethelm and A.D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity, in "Scientifice Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties" (F. Keil, W. Mackens, H. Voss, and J. Werther, Eds), pp 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[8] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, volume 2. McGraw-Hill, New York (1955).

[9] A. Erdélyi. Higher Transcendental Functions, volume 3. McGraw-Hill, New York (1955).

[10] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, (2003).

[11] W. G. Glockle and T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of self-similar protein dynamics, Biophys. J. 68 (1995), 46-53.

[12] J. Hale and S. Verduyn Lunel, Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, (1993).

[13] R. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, (2000).

[14] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds), pp. 291-348, Springer-Verlag, Wien, (1997).

[15] Michele Caputo, Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent. II , Geophysical Journal International, vol. 13, n^0 5, (1967), p. 529-539.

[16] F. Metzler, W. Schick, H. G. Kilian and T. F. Nonnenmacher, Relaxation in filled polymers : A fractional calculus approach, J. Chem. Phys. 103 (1995), 7180-7186.

[17] G. M. Mittag-Leffler. Sur la nouvelle fonction $E_a(x)$. C. R. Académie des Sciences. 137,554– 558 (1903).

[18] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[19] Robert Cauty, Solution du problème de point fixe de Schauder, Fund. Math., vol. 170, (2001), p. 231-246

[20] Richard S. Palais, A simple proof of the Banach contraction principle, Journal of Fixed Point Theory and Applications, vol. 2, (2007), p. 221-223

[21] Riesz, Marcel (1949), L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Mathematica, 81 (1) : 1-223.

[22] J. Schauder, Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math., vol. 2, (1930), p. 171-180.

[23] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Applications,Fixed Point Theorems Spring-Verlag, New York, (1986).

[24] S. Zhang, Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional diffrential equations, Electron. J. Diff. Equ. 2006, No. 36, pp, 1-12.