République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

BENDAHMA Amina

Existence de solutions pour des systéme d'équations dans les échelles de temps du premier ordre

Soutenu le 05/06/2018

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. HAMMOUDI Ahmed	Professeur	C.U.B.B.A.T.
Examinateurs :	Mr. BENIANI Abderrahmane	M.C.B	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	Mr. BENAISSA CHERIF Amin	M.C.B	C.U.B.B.A.T.

Année Universitaire : 2017 – 2018

Remerciements

Je remercie ALLAH,le tout puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Mes plus vifs remerciements vont à mon encadreur, Dr : BENAISSA CHERIF Amin , enseignant au département de mathémathique du centre universitaire d'Aïn-Témouchent, d'avoir accepter de diriger mon mémoire. Il m'a guidé durant celui-ci et m'a apporté le soutien nécessaire. De part ses qualités pédagogiques, ses précieux conseils, ses stimulants encouragements et sa disponibilité.

J'exprime ma profonde gratitude et remerciement à le professeur HAMMOUDI Ahmed, de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

De même, J'exprime ma profonde gratitude et remerciement à Dr :BENIANI Abderrahmane, pour avoir accepter de juger ce travail.

Je remercie du fond de mon coeur, mes parents, ma famille, mes amies et mes collègues même s'ils n'avaient qu'une idée trés sommaire de la nature de mon travail, ont toujours été là pour me supporter moralement.

Je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensé à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Table des matières

Introduction générale

La théorie des échelles de temps est un nouveau secteur des mathématiques qui unifient et prolongent l'analyse discrète et continue, elle a été présenté par Stefan Hilger en 1988 dans Ph.D [9].

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'éxistence de solution du systèmes d'équation aux échelles de temps du premier ordre. Dans le cas où l'équation soit linéaire, on peut trouver facillement leur solution. Par contre, si l'équation est non-linéaire, alors on peut démontrer que l'éxistence de leur solution ; Beaucoup de résultats connus sur le sujet font appel à la technique appelée majoration a priori des solutions. Cette méthode consiste à modifier le problème initial et à supposer que si une solution du problème modifié existe, toute solution possible de ce problème est bornée. Le fait qu'il existe une borne uniforme pour toute solution du problème modifié permet ensuite de démontrer l'existence d'une solution à ce problème en ayant recours à des outils d'Analyse non-linéaire tel un théorème de point fixe. L'objectif est de modifier le problème initial judicieusement de sorte que si l'on prouve qu'une solution du problème modifié existe, elle est aussi solution du problème initial.

Cette technique consiste à introduire des notions de sous et sur-solutions pour l'équation considérée et à transformer le problème de sorte que si une solution du problème modifié se trouve entre la sous-solution et la sur-solution, elle est aussi solution du problème initial.

Ce mémoire est divisée en trois chapitres.

Dans le premier chapitre on introduit quelques définitions et notations concernant la théorie des échelles de temps avec les principaux résultats sur la différentiabilité, l'intégration et puis on définit la fonction exponentielle sur les échelles de temps.

Le deuxième chapitre est consacré à la résolution d'équation différentielle linéaire du premier ordre.

Dans le troisième chapitre on étudie l'existence des solutions pour les système d'équation différentielle non-linéaire du premier ordre aux échelles de temps.

Mots clés :

Équation différentielle ordinaire, Théorème d'existance, Tube-solution, Sur et sous-solutions

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les échelles de temps et nous présentons également des résultats principaux sur la différentiabilité, l'intégration. De plus, nous définisons la fonction exponentielle sur les échelles de temps. En fin, rappellons quelques théorèmes et définitions.

1.1 La théorie des échelles de temps

Définition 1.1.1. *Une échelle de temps $\mathbb{T}$ est un ensemble non vide fermé de l'ensemble de nombre réels $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1.1. *Les ensembles $\mathbb{R}$,$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont des exemples des échelles de temps.*

Exemple 1.1.2. *Soit h un nombre réel positif fixé. On définit l'échelle de temps par $h\mathbb{Z}$:*

$$h\mathbb{Z} := \{hz : z \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \ldots\}.$$

Exemple 1.1.3. *Soit q un nombre réel positif fixé. On définit l'échelle de temps $\overline{q^{\mathbb{Z}}}$ par :*

$$\overline{q^{\mathbb{Z}}} : = \{q^z : z \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} = \left\{\ldots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, 1, q, q^2, q^3, \ldots\right\} \cup \{0\}.$$

Définition 1.1.2. *soit $\mathbb{T}$ une échelle de temps. Pour $t \in \mathbb{T}$, On définit :*

$i)$ L'opérateur de saut-avant $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ par

$$\sigma(t) : = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

ii) L'opérateur de saut-arriere $\rho\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ *par*

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

iii) La fonction de granulation $\mu\colon \mathbb{T} \to [0, \infty)$ *par*

$$\mu(t) := \sigma(t) - t.$$

Définition 1.1.3. *Par convention, On suppose :* $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$, *i.e* $\sigma(t)=t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un maximum* t, $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$, *i.e* $\rho(t)=t$ *si* $\mathbb{T}$ *admet un minimum* t.

Définition 1.1.4. *Soit* $\mathbb{T}$ *échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$ *:*

1) *Si* $\sigma(t) > t$, *on dit que* t *est un point dispersé à droite.*
2) *Si* $\sigma(t) = t$ *et* $t < \sup \mathbb{T}$, *on dit que* t *est un point dense à droite .*
3) *Si* $\rho(t) < t$, *on dit que* t *est un point dispersé à gauche.*
4) *Si* $\rho(t) = t$ *et* $t > \inf \mathbb{T}$, *on dit que* t *est un point dense à gauche.*
5) *Si un point est dispersé à droite et à gauche,(i.e* $\rho(t) < t < \sigma(t)$*), on dit qu'il est isolé.*
6) *Si un point est dense à droite et à gauche,(i.e* $t=\sigma(t)=\rho(t)$*), on dit qu'il est dense*

Définition 1.1.5. *Soit* $\mathbb{T}$ *échelle de temps,* $t \in \mathbb{T}$ *:*

i) Si $\mathbb{T}$ *admet un maximum* M *dispersé à gauche, on pose* $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{M\}$, *sinon* $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$.

ii) Si $\mathbb{T}$ *admet un minimum* m *dispersé à droite, on pose* $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - \{m\}$, *sinon* $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$.

Définition 1.1.6. *Soit* $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonciton on définit la fonction* $f^\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *par*

$$f^\sigma(t) := (f \circ \sigma)(t) = f(\sigma(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

1.1.1 Différentiabilité

Définition 1.1.7. *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $t \in \mathbb{T}^k$. *On dit que* f *est* Δ*-différentiable en* t *s'il existe un nombre réel* $f^\Delta(t) \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage* $\mathcal{U}$ *de* t *(i.e,* $\mathcal{U} = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ *pour certain* $\delta > 0$*) tel que*

$$\left| f^\sigma(t) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \qquad \textit{pour tout } s \in \mathcal{U}.$$

On appelle $f^{\Delta}(t)$ *la* Δ*-dérivée de* f *en* t.

Si f *est* Δ*-différentiable en tout* $t \in \mathbb{T}^k$, *alors* $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ *est appelée la delta dérivée de* f *sur* $\mathbb{T}^k$.

Définition 1.1.8. *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, $t \to f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$ *une fonction et soit* $t \in \mathbb{T}^k$. *On dit que* f *est* Δ*-différentiable en* t *si les fonctions* $\{f_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *sont* Δ*-différentiable en* t. *On définie* $f^{\Delta} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^n$ *par :*

$$f^{\Delta}(t) = \left(f_1^{\Delta}(t), f_2^{\Delta}(t), ..., f_n^{\Delta}(t)\right), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Théorème 1.1.1. *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction et soit* $t \in \mathbb{T}^k$.

1) *Si* f *est* Δ*-différentiable en* t, *alors* f *est continue en* t.

2) *Si* t *est dispersé à droite et* f *est une fonction continue en* t, *alors* f *est différentiable en* t *et*
$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

3) *Si* t *est dense à droite alors* f *est différentiable (*Δ*-diff ´erentiable)en* t, *si seulement si* $\lim\limits_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ *existe et finie. Dans ce cas on a*
$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

4) *Si* f *est différentiable en* t, *alors*
$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t). \tag{1.1}$$

Théorème 1.1.2. *Soient* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions* Δ*-différentiables en* $t \in \mathbb{T}^k$ *alors :*

1) $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*
$$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

2) *Pour tout constante* $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*
$$(\alpha f)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t).$$

3) f,$g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*
$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)). \tag{1.2}$$

4) *Si* $f(t)f^{\sigma}(t) \neq 0$, *alors* $\dfrac{1}{f}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}.$$

5) *Si* $g(t)g^{\sigma}(t) \neq 0$, *alors* $\dfrac{f}{g}$ *est* Δ*-différentiable en* t *et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}. \tag{1.3}$$

Définition 1.1.9. *Une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *est dite rd-continue si les fonctions* $(f_i)_{i=1}^{i=n}$ *sont continues en tout point dense à droite de* $\mathbb{T}$ *et si sa limite à gauche existe est finie en tout point dense à gauche de* $\mathbb{T}$.
On note l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *rd-continue sur* $\mathbb{T}$ *par :*

$$\mathcal{C}_{rd} = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n).$$

et l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *est* Δ*-différentiable et ses dérivées rd-continue sur* $\mathbb{T}^k$ *par :*

$$\mathcal{C}^1_{rd} = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n).$$

Théorème 1.1.3. *Soient* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions, on a*

i) si f *est continue, alors* f *est rd-continue.*

ii) L'opérateur de saut avant σ *est rd-continue.*

iii) si f *est rd-continue et* g *continue, alors* $g \circ f$ *est rd-continue.*

Enfin, nous présentons la propriété de la composée $(f \circ g)^{\Delta}$, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Elle a été démontrée par Christian Pötzsche en 1988.

Théorème 1.1.4. *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continûment différentiable et* $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *une fonction* $\Delta-$*différentiable. Alors* $f \circ g$ *est* $\Delta-$*différentiable et on a la formule suivante :*

$$(f \circ g)^{\Delta}(t) = \left\{ \int_0^1 f'\left(g(t) + h\mu(t)\, g^{\Delta}(t)\right) dh \right\} g^{\Delta}(t). \tag{1.4}$$

1.1.2 Intégration

Définition 1.1.10. *Nous dirons qu'une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est régulière si sa limite à droite existe en tout point dense à droite de $\mathbb{T}$ et sa limite à gauche existe en tout point dense à gauche de $\mathbb{T}$.*

Théorème 1.1.5. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, alors il existe une fonction F qui est pré-différentiable avec une region de differentiation D tel que :*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \qquad \textit{pour tout } t \in D.$$

Définition 1.1.11. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction réguliére, on définit l'intégrale indéfinie par :*

$$\int f(t)\Delta(t) = F(t) + C.$$

ou C est une constante arbitraire et F est la primitive de f.

Définition 1.1.12. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ une fonction réguliére, on définit l'intégrale de Cauchy par*

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a), \qquad \textit{pour tout } a, b \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.1.13. *La fonction $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelée la primitive de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, telle que*

$$F^{\Delta}(t) = f(t), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Théorème 1.1.6. *Toute fonction rd-continue posséde une primitive. En particulier,si $t_0 \in \mathbb{T}$, alors la fonction F définit par :*

$$F(t) := \int_{t_0}^t f(\tau)\Delta(\tau), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

est une primitive de f.

Théorème 1.1.7. *Soit $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, on a*

1) *Si f est continue, alors f est rd-continue.*

2) *Si f est rd-continue, alors f est régulière.*

3) *L'opérateur de saut avant σ est rd-continue.*

Théorème 1.1.8. *Si $a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors*

1. $\displaystyle\int_a^b [\alpha f(t) + g(t)]\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t.$
2. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t.$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t.$
4. $\displaystyle\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t.$
5. $\displaystyle\int_a^a f(t)\Delta t = 0.$
6. *Si* $|f(t)| \leq g(t)$ *sur* $[a,b) \cap \mathbb{T}$*, alors* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$
7. *Si* $f(t) \geq 0$*, pour tout* $a \leq t \leq b$*, alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0.$
8. *Pour tout* $t \in \mathbb{T}$*, alors* $\displaystyle\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta(\tau) = \mu(t)f(t).$

Définition 1.1.14. *On dira qu'une fonction* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *est* Δ*-intégrable, si les fonctions* $\{f_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *sont* Δ*-intégrable sur* $\mathbb{T}$ *et on note*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\Delta t \quad &: = \int_a^b (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))\,\Delta t \\ &= \left(\int_a^b f_1(t)\,\Delta t, \int_a^b f_2(t)\,\Delta t, \ldots, \int_a^b f_n(t)\,\Delta t\right).\end{aligned}$$

Théorème 1.1.9. *Soit* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ *est* Δ*-intégrable, alors* $t \to \|f(t)\|$ *est* Δ*-intégrable et on a*

$$\left\|\int_a^b f(t)\,\Delta t\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\Delta t.$$

1.1.3 Fonction exponentielle

Dans cette section, nous définissons une fonction importante sur une échelle de temps qui généralise la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e_p(., t_0)$.

Définition 1.1.15. *Pour* $h > 0$*, nous definissons les nombres complexes de Hilger , axe reel et l'axe imaginaire de Hilger*

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_h &= \{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{-1}{h}\}, \\ \mathbb{R}_h &= \{z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R},\ z > \frac{-1}{h}\}, \\ \mathbb{Z}_h &= \{z \in \mathbb{C} : \frac{-\pi}{h} < Im(z) \leq \frac{\pi}{h}\}.\end{aligned}$$

Pour $h = 0$*, on a* $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$, $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

Définition 1.1.16. *Une fonction $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est dite régressive si :*

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

On note l'ensemble des fonctions régressives et rd-continues par :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}).$$

et on note l'ensemble des fonctions régressives positives par

$$\mathcal{R}^+ = \{p : \mathbb{T} \to \mathbb{R} : 1 + \mu(t)p(t) > 0, \ \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k\}.$$

Définition 1.1.17. *On munit cet ensemble de l'addition définie pour tout $p, q \in \mathcal{R}$ par :*

$$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)\,q(t), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Remarque 1.1.1.

1) *Le groupe $(\mathcal{R}, \oplus)$ est dit groupe regressif.*

2) *Le conjugué de chaque élément p de $\mathcal{R}$ noté par $\ominus p$ est donnée par :*

$$(\ominus p)(t) := \frac{-p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Définition 1.1.18. *Si $p \in \mathcal{R}$, alors on définie la fonction exponentielle par :*

$$e_p(t, s) := \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right), \qquad \textit{pour tout } t, s \in \mathbb{T} \tag{1.5}$$

ou $\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h$ est la transformation cylindrique définie par :

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\ln(1 + zh), & \textit{si } h > 0, \\ z, & \textit{si } h = 0. \end{cases}$$

Ou ln *désigne le logarithme nipérien.*

Théorème 1.1.10. *Si $p, q \in \mathcal{R}$, alors*

1) $e_0(t, s) \equiv 1$ *et* $e_p(t, t) \equiv 1$.

2) $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$.

3) $e_p(t, s) = \dfrac{1}{e_p(s, t)} = e_{\ominus p}(s, t)$.

4) $e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$.

5) $e_p(t, \sigma(s))e_p(s, r) = \dfrac{e_p(t, r)}{1 + \mu(s)p(s)}$.

6) $[e_p(., s)]^{\Delta} = pe_p(., s)$.

1.2 Théorème du point fixe de Schauder

Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces de Banach et $A \subset E$ une partie non vide.

Définition 1.2.1 (Opérateurs compacts non linéaires)**.** *Une application $T : A \to F$ est dite compacte si et seulement si elle est continue et l'image de tout ensemble borné $B \subset A$ est un ensemble relativement compact de F, c'est- a-dire, $\overline{f(B)}$ est un compact.*

Théorème 1.2.1. *Soit C un sous-ensemble de E fermé et convexe et $f : C \to C$ une application continue telle que $f(C)$ est relativement compact. Alors f possède un point fixe. Plus généralement, si C est un compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.*

1.3 Théorème d'Azéla-Ascoli

Définition 1.3.1 (Equicontinuité)**.** *Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques et $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}(E, F)$. On dira que $\mathcal{H}$ est équicontinue en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \ \forall x \in E, \quad d(x_0, x) < \eta \Rightarrow \delta\left(f(x), f(x_0)\right) < \varepsilon, \ \forall f \in \mathcal{H}.$$

On dira que $\mathcal{H}$ est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de E.

Remarque 1.3.1. *Le point important, η ne dépend pas de f.*

Théorème 1.3.1. *Soit (K, d) un espace métrique compact et (F, δ) un espace métrique complet. Soit $\mathcal{H}$ une partie de $\mathcal{C}(K, F)$. Alors, $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(K, F)$ si et seulement si $\mathcal{H}$ est équicontinue et $\forall x \in K$, $\mathcal{H}_x = \{f(x) : f \in \mathcal{H}\}$ est relativement compacte dans F.*

Chapitre 2

Les équations différentielles linéaires du premier ordre sur les échelles de temps

Dans ce chapitre, nous présentons des définitions de l'équation différentielle sur les échelle de temps et nous établirons des Théorèmes concerne la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre.

2.1 Définitions

Définition 2.1.1. *Une équation différentielle du premier ordre sur les échelles de temps $\mathbb{T}$ est donnée de la forme suivante*

$$x^{\Delta}(t) = f\left(t, x(t), x^{\sigma}(t)\right), \qquad t \in \mathbb{T}^{k}. \tag{2.1}$$

Avec $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exemple 2.1.1. *On considère la relation récurrences suivantes*

$$x(t+1) = tx(t) + t^2 x^2 (t+1), \qquad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

donc

$$\Delta x(t) = (t-1)\, x(t) + t^2 x^2 (t+1), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

d'où la relation (2.2) est une équation différentielle sur $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Définition 2.1.2. *Une équation différentielle linéaire du premier ordre sur les échelles de temps $\mathbb{T}$ est donnée de la forme*

$$x^{\Delta}(t) = a(t)\, x^{\sigma}(t) + b(t)\, x(t) + c(t), \qquad t \in \mathbb{T}^{k}. \tag{2.3}$$

Avec $a, b, c : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

Si $c(t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{T}^{k}$ est dite homogène. Elle est dite non homogène dans le cas contraire.

2.2 Les équations différentielles linéaires homogènes

Théorème 2.2.1. *On suppose que $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, pour $a \in \mathbb{T}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. Alors le problème à valeur initiale*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = p(t)x(t), & \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^{k}. \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

admet une solution unique donnée par

$$x(t) = x_0 e_p(t, a), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^{k}.$$

Démonstration.

Pour l'existence, par le Théorème 1.1.10 la fonction $x_0 e_p(., a)$ vérifié l'équation $x^{\Delta}(t) = p(t)x(t)$.

On démontre en premier lieu l'unicité.

On supposant qu'il existe x solution de (2.4). D'après le définition de la fonction exponentielle généralise, on a

$$\begin{aligned} \left[\frac{x(t)}{x_0 e_p(t,a)}\right]^{\Delta} &= \frac{x^{\Delta}(t)\, e_p(t,a) - x(t)\, e_p^{\Delta}(t,a)}{x_0 e_p(t,a)\, e_p^{\sigma}(t,a)} \\ &= \frac{x^{\Delta}(t) - p(t)\, x(t)}{x_0 e_p^{\sigma}(t,a)} = 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique $\dfrac{x}{x_0 e_p(., a)}$ que la fonction est constante, donc

$$\frac{x(t)}{x_0 e_p(t,a)} = \frac{x(a)}{x_0 e_p(a,a)} = 1.$$

□

Corollaire 2.2.1. *On suppose que* $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, *pour* $a \in \mathbb{T}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$ *fixé. La solution unique du problème*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = -p(t)x^{\sigma}(t), & \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}, \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

est donné par

$$x(t) = x_0 e_{\ominus p}(t, a), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Démonstration.

Par (1.1) et (2.5), on a

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= -p(t)x^{\sigma}(t) \\ &= -p(t)x(t) - \mu(t)\,p(t)x^{\Delta}(t). \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$(1 + \mu(t)\,p(t))\,x^{\Delta}(t) = -p(t)x(t).$$

Puisque $1 + \mu(t)\,p(t) \neq 0$, pour tout $t \in \mathbb{T}^k$, alors (2.5) est de la forme

$$x^{\Delta}(t) = \frac{-p(t)}{1 + \mu(t)\,p(t)} x(t) = \ominus p(t)\,x(t).$$

Ainsi, par le Théorème 2.2.1, la solution existe et unique, car la fonction $\ominus p \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

Et la solution est $x(t) = x_0 e_{\ominus p}(t, a)$, pour tout $t \in \mathbb{T}^k$ □

2.3 Les équations différentielles linéaires non homogènes

Théorème 2.3.1. *On suppose que* $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *et* $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, *pour* $a \in \mathbb{T}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$ *fixé. La solution unique du problème*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = -p(t)x^{\sigma}(t) + f(t), & \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k. \\ x(a) = x_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

est donné par

$$x(t) = e_{\ominus p}(t, a)x_0 + \int_a^t e_{\ominus p}(t, s)f(s)\Delta s, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.

On a

$$x^{\Delta}(t) = -p(t)x^{\sigma}(t) + f(t), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

On va multiplier les deux membre par $e_p(t,a)$, on obtient

$$\begin{aligned} e_p(t,a)f(t) &= e_p(t,a)x^{\Delta}(t) + p(t)e_p(t,a)x^{\sigma}(t) \\ &= e_p(t,a)x^{\Delta}(t) + [e_p(t,a)]^{\Delta} x^{\sigma}(t) \\ &= [e_p(t,a)x(t)]^{\Delta}. \end{aligned}$$

Par intégration entre a à t, on trouve

$$\begin{aligned} \int_a^t e_p(s,a)f(s)\Delta s &= \int_a^t [e_p(s,a)x(s)]^{\Delta} \Delta s \\ &= e_p(t,a)x(t) - e_p(a,a)x(a) \\ &= e_p(t,a)x(t) - x(a). \end{aligned}$$

Par le Théorème 1.1.10, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{e_p(t,a)} \left[x(a) + \int_a^t e_p(s,a)f(s)\Delta s \right] \\ &= x(a)e_{\ominus p}(t,a) + \int_a^t e_{\ominus p}(t,a)e_p(s,a)f(s)\Delta s \\ &= x(a)e_{\ominus p}(t,a) + \int_a^t e_{\ominus p}(t,a)e_{\ominus p}(a,s)f(s)\Delta s \\ &= x(a)e_{\ominus p}(t,a) + \int_a^t e_{\ominus p}(t,s)f(s)\Delta s. \end{aligned}$$

□

On suppose que l'échelle de temp $\mathbb{T}$ bornée où $a = \min \mathbb{T}$ et $b = \max \mathbb{T}$.

Théorème 2.3.2. *On suppose que $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. La solution du problème*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = -x^{\sigma}(t) + f(t), & \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{2.7}$$

est donné par

$$x(t) = \frac{1}{e_1(t,a)} \left[\frac{1}{e_1(b,a) - 1} \int_a^b e_1(s,a)f(s)\Delta s + \int_a^t e_1(s,a)f(s)\Delta s \right], \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.

On a $b \neq a$ et $p(t) \equiv 1 \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors $e_1(b,a) - 1 \neq 0$,on note

$$m := \frac{1}{e_1(b,a) - 1} \int_a^b e_1(s,a) f(s) \Delta s$$

Par le Théorème 1.1.10, alors

$$x(t) = e_{\ominus 1}(t,a) \left[m + \int_a^t e_1(s,a) f(s) \Delta s \right], \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Par (1.2), on obtient

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= e^{\Delta}_{\ominus 1}(t,a) \left[m + \int_a^t e_1(s,a) f(s) \Delta s \right] + e^{\sigma}_{\ominus p}(t,a) e_1(t,a) f(t) \\ &= \frac{-1}{(1+\mu(t)) e_1(t,a)} \left[m + \int_a^t e_1(s,a) f(s) \Delta s \right] + \frac{f(t)}{1+\mu(t)} \\ &= \frac{-1}{e_1^{\sigma}(t,a)} \left[m + \int_a^t e_1(s,a) f(s) \Delta s \right] + \frac{f(t)}{1+\mu(t)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} x^{\sigma}(t) &= \frac{1}{e_1^{\sigma}(t,a)} \left[m + \int_a^{\sigma(t)} e_1(s,a) f(s) \Delta s \right] \\ &= \frac{1}{e_1^{\sigma}(t,a)} \left[m + \int_a^t e_1(s,a) f(s) \Delta s + \int_t^{\sigma(t)} e_1(s,a) f(s) \Delta s \right] \\ &= \frac{1}{e_1^{\sigma}(t,a)} \left[m + \int_a^t e_1(s,a) f(s) \Delta s + \mu(t) e_1(t,a) f(t) \right] \\ &= \frac{1}{e_1^{\sigma}(t,a)} \left[m + \int_a^t e_1(s,a) f(s) \Delta s \right] + \frac{\mu(t)}{1+\mu(t)} f(t). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Par (2.8) et (2.9), on obtient

$$x^{\Delta}(t) + x^{\sigma}(t) = f(t).$$

Comme $x(a) = x(b) = m$, alors x est une solution du problème (2.7) . □

Théorème 2.3.3. *On suppose que $p \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, pour $a \in \mathbb{T}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. La solution du problème*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = p(t)x(t) + f(t), & \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}, \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{2.10}$$

est donné par

$$x(t) = x_0 e_p(t,a) + \int_a^t e_p(t, \sigma(s)) f(s) \Delta s. \tag{2.11}$$

Démonstration.

Par (1.1) et (2.10), on a

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= p(t)\left(x^{\sigma}(t) - \mu(t)\, x^{\Delta}(t)\right) + f(t) \\ &= p(t)x^{\sigma}(t) - \mu(t)\, p(t)x^{\Delta}(t) + f(t), \end{aligned}$$

Puisque $1 + \mu(t)\, p(t) \neq 0$, pour $t \in \mathbb{T}^{k}$, on a

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= \frac{p(t)}{1 + \mu(t)\, p(t)} x^{\sigma}(t) + \frac{f(t)}{1 + \mu(t)\, p(t)} \\ &= -\ominus p(t)\, x^{\sigma}(t) + \frac{f(t)}{1 + \mu(t)\, p(t)}. \end{aligned}$$

Par application du Théorème 2.3.1, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e_{\ominus\ominus p}(t, a) + \int_a^t e_{\ominus\ominus p}(t, s) \frac{f(s)}{1 + \mu(s)\, p(s)} \Delta s \\ &= x_0 e_p(t, a) + \int_a^t e_p(t, s) \frac{f(s)}{1 + \mu(s)\, p(s)} \Delta s \end{aligned}$$

Par le Théorème 1.1.10, on a

$$\begin{aligned} \frac{e_p(t, s)}{1 + \mu(s)\, p(s)} &= \frac{1}{e_p(s, t)\left(1 + \mu(s)\, p(s)\right)} \\ &= \frac{1}{e_p(\sigma(s), t)} = e_p(t, \sigma(s)). \end{aligned}$$

d'où, on trouver la formule (2.11) . $\square$

Exemple 2.3.1. *On considère le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = 2x(t) + 3^{t}, & \textit{pour tout } t \in \mathbb{N}, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Alors, ce système est sous la forme (2.10)*, avec* $p(t) \equiv 2,\ f(t) = 3^{t},\ a = 0$ *et* $x_0 = 0$. *Comme* $p \in \mathcal{R}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$*, alors la fonction* $e_2(.,.)$ *existe et donnée par*

$$e_2(t, s) = 3^{t-s}, \qquad \textit{pour tout } t, s \in \mathbb{N}.$$

Par le Théorème 2.3.3*, la solution de* (2.12) *est*

$$x(t) = \int_0^t e_2(t, \sigma(s)) 3^{s} \Delta s = \int_0^t 3^{s+t-\sigma(s)} \Delta s = t3^{t-1}.$$

Théorème 2.3.4. *On suppose que $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. La solution du problème*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = x(t) + f(t), & \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}, \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{2.13}$$

est donné par

$$x(t) = e_1(t,a)\left[\frac{e_1(b,a)}{1-e_1(b,a)}\int_a^b \frac{f(s)}{e_1(\sigma(s),a)}\Delta s + \int_a^t \frac{f(s)}{e_1(\sigma(s),a)}\Delta s\right].$$

Démonstration.

On a $b \neq a$ et $p(t) \equiv 1 \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, alors $e_1(b,a) - 1 \neq 0$,on note

$$m := \frac{e_1(b,a)}{1-e_1(b,a)}\int_a^b \frac{f(s)}{e_1(\sigma(t),a)}\Delta s$$

Alors

$$x(t) = e_1(t,a)\left[m + \int_a^t \frac{f(s)}{e_1(\sigma(s),a)}\Delta s\right]$$

Par le Théorème 1.1.2, on a

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= e_1^{\Delta}(t,a)\left[m + \int_a^t \frac{f(s)}{e_1(\sigma(s),a)}\Delta s\right] + \frac{e_1^{\sigma}(t,a)}{e_1(\sigma(t),a)} f(t) \\ &= e_1(t,a)\left[m + \int_a^t \frac{f(s)}{e_1(\sigma(s),a)}\Delta s\right] + f(t) \\ &= x(t) + f(t) \end{aligned}$$

Puisque $x(a) = x(b) = m$.

Ce qu'il falait démontrer. □

Corollaire 2.3.1. *On suppose que $p, q \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, pour $a \in \mathbb{T}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé. La solution du problème*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = -p(t)x^{\sigma}(t) + q(t)x(t) + f(t), & \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{2.14}$$

est donné par

$$x(t) = x_0 e_{p\ominus q}(t,a) + \int_a^t \frac{e_{p\ominus q}(t,\sigma(t))}{1+\mu(t)p(t)} f(s)\Delta s. \tag{2.15}$$

Démonstration.

Par (1.1) et (2.14), on a

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= -p(t)x^{\sigma}(t) + q(t)x(t) + f(t) \\ &= (q(t) - p(t))\, x(t) - p(t)\mu(t)\, x^{\Delta}(t) + f(t). \end{aligned}$$

Puisque $1+\mu\left(t\right)p\left(t\right)\neq 0$, pour tout $t\in\mathbb{T}^{k}$,

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= \frac{(q(t)-p(t))}{1+\mu\left(t\right)p\left(t\right)}x(t)+\frac{f(t)}{1+\mu\left(t\right)p\left(t\right)} \\ &= \left(p\ominus q\right)\left(t\right)x(t)+\frac{f(t)}{\left(1+\mu\left(t\right)p\left(t\right)\right)} \end{aligned}$$

On sait que $(\mathcal{R},\oplus)$ est une groupe, alors $p\ominus q\in\mathcal{R}\left(\mathbb{T},\mathbb{R}\right)$. Par application du Théorème 2.3.3, on obtien (2.15). $\square$

Chapitre 3

Existence de solution pour systéme d'équation non-linéaire aux échelles de temps

Dans ce chapitre, nous établirons des théoremes d'existance pour les systèmes suivants.

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = f(t, x(t)), & \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = f(t, x(\sigma(t))), & \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k. \\ x \in (BC). \end{cases} \tag{3.2}$$

ici, $\mathbb{T}$ est une echelle de temps bornnée ou on notera $a = \min \mathbb{T}$, $b = \max \mathbb{T}$ et $\mathbb{T}_0 = \mathbb{T} - \{b\}$. De plus, $f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue et (BC) désigne une condition de bord suivante :

$$x(a) = x_0. \tag{3.3}$$

$$x(a) = x(b). \tag{3.4}$$

Pour les deux problèmes nous présenterons un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe de Schauder. De plus, nous présenterons les notions de tube-solution, i.e. on peut trouver des fonctions $v \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ et $M \in \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ telles que $\|x(t) - v(t)\| \leq M(t)$, pour tout $t \in \mathbb{T}$. Ces résultats sont dus à H. Gilbert [2].

3.1 Les espaces $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$

Définition 3.1.1. *L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ qui sont rd-continues (resp : continues) sur $\mathbb{T}$ est noté par $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$ (resp : $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$).*

Proposition 3.1.1. *Les espaces $\mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Banach pour la norme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \|f(t)\|.$$

Démonstration.
La preuve est similaire la preuve de l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$. $\square$

3.2 Principes du maximum

Les principes du maximum suivant seront utilisés pour obtenir la majoration a priori des solutions pour les systèmes d'équation aux échelles de temps du premier ordre.

Lemme 3.2.1. *Soit une fonction $r \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T})$, telle que*

$$r^{\Delta}(t) < 0, \qquad \text{pour tout } t \in \{t \in \mathbb{T}_0 : r(\sigma(t)) > 0\}.$$

Si une des condition suivantes est satisfaite,

(i) $r(a) \leq 0$,

(ii) $r(a) \leq r(b)$,

alors $r(t) \leq 0$, pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Démonstration.
On note

$$A = \{s \in \mathbb{T}_0 : r(\sigma(s)) > 0\}.$$

Supposons qu'il éxiste un $t \in \mathbb{T}$ tel que $r(t) > 0$. Comme r est continue sur $\mathbb{T}$, alors il existe un $t_0 \in \mathbb{T}$, tel que

$$r(t_0) = \max_{t\in\mathbb{T}} r(t) > 0.$$

On considère deux cas.

Si $\rho(t_0)$ est un point dispersé à droite, i.e $t_0 > \rho(t_0)$, alors $\mu((\rho(t_0))) = t_0 - \rho(t_0) > 0$ et comme $r \in \mathcal{C}_{rd}(\mathbb{T})$, donc $r^{\Delta}(\rho(t_0))$ existe est donnée par

$$r^{\Delta}(\rho(t_0)) = \frac{r(t_0) - r(\rho(t_0))}{t_0 - \rho(t_0)} \geq 0.$$

Par hypothèse, nous avons

$$r^{\sigma}(\rho(t_0)) = r(t_0).$$

D'autre part, on a $\rho(t_0) \in A$, donc hypothèse, on trouver

$$r^{\Delta}(\rho(t_0)) < 0.$$

d'où la contradiction.

Si $\rho(t_0)$ est un point dense à droite, i.e $t_0 = \rho(t_0) > a$, alors il existe un intervalle $[t_1, \rho(t_0))$ tel que

$$r(\sigma(t)) > 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, \rho(t_0)).$$

Alors, $t \in A \cap [t_1, \rho(t_0))$, par hypothèse, nous avons

$$r^{\Delta}(s) < 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_1, \rho(t_0)).$$

donc,

$$\begin{aligned} r(t_0) &= r(t_1) + \int_{[t_1, t_0)_{\mathbb{T}}} r^{\Delta}(s)\Delta s \\ &= r(t_1) + \int_{[t_1, \rho(t_0))_{\mathbb{T}}} r^{\Delta}(s)\Delta s \\ &< r(t_1). \end{aligned}$$

Ceci contredit la maximalité de $r(t_0)$.

Le cas $t_0 = a$ est impossile si l'hypothèse (i) est vrai, alors que si $r(a) \leq r(b)$, il faudrait que $r(a) = r(b)$.

En prenant $t_0 = b$, par ce qui précède, on trouvrait que $r(b) \leq 0$, ce que nous mène directement à la conclusion. □

Lemme 3.2.2. *Soit une fonction $r \in \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T})$, telle que*

$$r^{\Delta}(t) > 0, \qquad \textit{pour tout } t \in \left\{t \in \mathbb{T}^k : r(t) > 0\right\}.$$

Si $r(a) \geq r(b)$, alors $r(t) \leq 0$, pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Démonstration.

On note

$$A := \left\{t \in \mathbb{T}^k : r(t) > 0\right\}.$$

Supposons qu'il éxiste un $t \in \mathbb{T}$, tel que $r(t) > 0$, Comme r est continue sur $\mathbb{T}$, alors il existe un $t_0 \in \mathbb{T}$, tel que

$$r(t_0) := \max_{t\in\mathbb{T}} r(t) > 0.$$

On considère deux cas.

Si t_0 est un point dispersé à droite, alors $r^\Delta(t_0)$ existe est donnée par

$$r^\Delta(t_0) = \frac{r^\sigma(t_0) - r(t_0)}{\mu(t_0)} \leq 0.$$

Comme $r(t_0) > 0$, alors par hypothèse, $r^\Delta(t_0) < 0$, d'où la contradiction.

Si t_0 est un point dense à droite,i.e $t_0 = \sigma(t_0) < b$, alors il existe un intervalle $[t_0, t_1]$ tel que

$$r(t) > 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_0, t_1],$$

Alors, $t \in A \cap [t_0, t_1]$, par hypothèse, nous avons

$$r^\Delta(s) > 0, \qquad \text{pour tout } t \in [t_0, t_1].$$

donc

$$r(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} r^\Delta(s)\Delta s + r(t_0) > r(t_0).$$

Ce qui contredit la maximalité de $r(t_0)$.

Finalement, si $t_0 = b$, alors par hypothèse, il faudrait que $r(a) = r(b)$.

En prenant $t_0 = a$, par ce qui précède, on trouvrait que $r(a) \leq 0$. □

3.3 Théorème d'existance pour le problème (3.1)

Voici la notion de tube-solution pour le problème (3.1). Cette hypothèse sera cruciale dans l'obtention du résultat d'existence.

Définition 3.3.1. *Soit* $(v, M) \in \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, [0, \infty))$*.On dira que* (v, M) *est un tube-solution de* (3.1)*, si* *(i)* $\left\langle x - \upsilon(t), f(t,x) - \upsilon^{\Delta}(t) \right\rangle \geq M(t)M^{\Delta}(t)$, *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\|x - \upsilon(t)\| = M(t)$,

(ii) $\upsilon^{\Delta}(t) = f(t, \upsilon(t))$ *et* $M^{\Delta}(t) = 0$, *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$ *et* $M(t) = 0$,

(iii) $\|\upsilon(a) - \upsilon(b)\| \leq M(b) - M(a)$.

Définition 3.3.2. *S'il existe* (v, M) *un tube-solution de* (3.1)*, on définit le probleme modifié suivant*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) - x(t) = f(t, \overline{x}(t)) - \overline{x}(t), & \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, \\ x(a) = x(b), \end{cases} \tag{3.5}$$

où

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{M(t)}{\|x - \upsilon(t)\|}(x(t) - \upsilon(t)) + \upsilon(t), & \text{si } \|x(t) - \upsilon(t)\| > M(t), \\ x(t) & \text{si non.} \end{cases}$$

Définition 3.3.3. *Définissons l'opérateur* $T_{p^*} : \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ *par*

$$T_{p^*}(x)(t) = e_1(t,a) \left[\frac{e_1(b,a)}{1 - e_1(b,a)} \int\limits_{[a,b)\cap\mathbb{T}} \frac{f(s, \overline{x}(s) - \overline{x}(s)}{e_1(\sigma(s), a)} \Delta s + \int\limits_{[a,t)\cap\mathbb{T}} \frac{f(s, \overline{x}(s) - \overline{x}(s)}{e_1(\sigma(s), a)} \Delta s \right],$$

où la fonction $e_1(t,a)$ *et définie en* (1.5)*, avec* $p(t) = 1$.

Proposition 3.3.1. *S'il existe* (v, M) *un tube-solution de* (3.1)*, alors l'opérateur* $T_{p^*} : \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ *est compact.*

Démonstration.
Montrons tout d'abord la continuité de l'opérateur.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ convergeant vers x dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$.
Par le Théorème 1.1.9, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|T_{p^*}(x_n)(t) - T_{p^*}(x)(t)\| &\leq \|e_1(t,a)\| (1 + C) \left\| \int\limits_{[a,b)\cap\mathbb{T}} \frac{f(s, \overline{x}_n(s)) - f(s, \overline{x}(s)) - (\overline{x}_n(s) - \overline{x}(s))}{e_1(\sigma(s), a)} \Delta s \right\| \\ &\leq \frac{K(1+C)}{m} \int\limits_{[a,b)\cap\mathbb{T}} (\|f(s, \overline{x}_n(s) - f(s, \overline{x}(s)\| + \|\overline{x}_n(s) - \overline{x}(s)\|) \Delta s, \end{aligned}$$

avec

$$K := \max_{t\in\mathbb{T}} |e_1(t,a)|, \qquad m := \min_{t\in\mathbb{T}} |e_1(t,a)| \qquad \text{et} \qquad C := \left| \frac{e_1(b,a)}{1 - e_1(b,a)} \right|.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\|\overline{x}(t)\| &\leq |M(t)| + \|v(t)\| \\ &\leq \|M\|_{\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R})} + \|v\|_{\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)} := R\end{aligned}$$

Donc $\|\overline{x}\|_{\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)} < R$, et

$$\|\overline{x}_n\|_{\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)} \leq R, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, f est uniformément continue sur $\mathbb{T}^k \times \overline{B}(0,R)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une $\delta > 0$, tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x-y\| < \delta < \frac{\varepsilon m}{2K(C+1)(b-a)} \Rightarrow \|f(s,y) - f(s,x)\| < \frac{\varepsilon m}{2K(C+1)(b-a)}, \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{T}^k.$$

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x dans $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$, alors la suite $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $\overline{x}$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \qquad \|\overline{x}_n - \overline{x}\|_{\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)} < \delta, \qquad \text{pour tout } n \geq n_1.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\|T_{p^*}(x_n)(t) - T_{p^*}(x)(t)\| &< \frac{2K(1+C)}{m} \int_{[a,b)\cap\mathbb{T}} \frac{\varepsilon m}{2K(1+C)(b-a)} \Delta s \\ &\leq \varepsilon,\end{aligned}$$

Ce qui nous convainc de la continuité de T_{p^*}.

Montrons maintenant que l'ensemble $T_{p^*}(\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n))$ est relativement compacte.

Considérons une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $T_{p^*}(\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n))$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une $(x_n)_n \in \mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$, tel que

$$y_n = T_{p^*}(x_n), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par le Théorème 1.1.9, nous avons

$$\|T_{p^*}(x_n)(t)\| \leq \frac{K(1+C)}{M} \left(\int_{[a,b)\cap\mathbb{T}} \|f(s,\overline{x}_n(s)\| \, \Delta s + \int_{[a,b)\cap\mathbb{T}} \|\overline{x}_n(s)\| \, \Delta s \right).$$

Puisque

$$\|\overline{x}_n(s)\| \leq R, \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{T} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\mathbb{T}^k \times \overline{B}(0,R)$ est un ensemble sur $\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n$ et f étant continue sur $\mathbb{T}^k \times \overline{B}(0,R)$, nous pouvons déduire l'existance d'une constante $A > 0$, telle que

$$\|f(s,\overline{x}_n(s)\| \leq A, \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{T}^k \quad \text{et} \quad \text{tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\|y_n(t)\| = \|T_{p^*}(x_n)(t)\| \leq \frac{1}{m}K(1+C)\,(A+R)\,(b-a) < \infty.$$

Ainsi, la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée sur $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$.
D'autre part, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned}
\|T_{p^*}(x_n)(t_2) - T_{p^*}(x_n)(t_1)\| &\leq B_n\,|e_1(t_2,a) - e_1(t_1,a)| + K\left\|\int_{[t_1,t_2)\cap\mathbb{T}} \frac{f(s,\overline{x}_n(s) - \overline{x}_n(s)}{e_1\left(\sigma(s),a\right)}\Delta s\right\| \\
&\leq B_n\,|e_1(t_2,a) - e_1(t_1,a)| + \frac{K(A+R)}{m}\,|t_2 - t_1|\,.
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
B_n &= \left\|\frac{e_1(b,a)}{1-e_1(b,a)}\int_{[a,b)\cap\mathbb{T}} \frac{f(s,\overline{x}_n(s) - \overline{x}_n(s)}{e_1\left(\sigma(s),a\right)}\Delta s + \int_{[a,t_1)\cap\mathbb{T}} \frac{f(s,\overline{x}_n(s) - \overline{x}_n(s)}{e_1\left(\sigma(s),a\right)}\Delta s\right\| \\
&\leq (C+1)\int_{[a,b)\cap\mathbb{T}} \frac{\|f(s,\overline{x}_n(s) - \overline{x}_n(s)\|}{e_1\left(\sigma(s),a\right)}\Delta s \\
&\leq \frac{C+1}{m}\int_{[a,b)\cap\mathbb{T}} \|f(s,\overline{x}_n(s)\| + \|\overline{x}_n(s)\|\,\Delta s \\
&\leq \frac{(C+1)\,(A+R)\,(b-a)}{m}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
|e_1(t_2,a) - e_1(t_1,a)| &= \left|\int_{t_1}^{t_2} e_1^{\Delta}(s,a)\Delta s\right| \\
&\leq \left|\int_{t_1}^{t_2} e_1(s,a)\Delta s\right| \leq L\,|t_2 - t_1|\,.
\end{aligned}$$

Avec $L := \sup_{t\in\mathbb{T}} |e_1(s,a)|\,$, alors les fonctions $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont k-lipschitzienne.
Donc, la suite $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.
Par le Théorème d'Arzelà-Ascolie, on obtient que l'ensemble $\{T_{p^*}x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compacte. Ainsi,T_{p^*} est compacte. $\square$

Lemme 3.3.1. *Soit une fonction $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ est Δ-différentiable en $t \in \mathbb{T}^k$. Si $\|x\,(t)\| > 0$, alors la fonction $\|x\| : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est Δ-différentiable en t. De plus on a*

$$\|x\,(t)\|^{\Delta} = \frac{\left\langle x^{\Delta}\,(t)\,, x^{\sigma}\,(t)\right\rangle + \left\langle x^{\Delta}\,(t)\,, x\,(t)\right\rangle}{\|x\,(\sigma\,(t))\| + \|x\,(s)\|}. \tag{3.6}$$

Démonstration.

Par le Théorème 1.1.1, nous avons

$$\begin{aligned}\|x(t)\|^{\Delta} &= \lim_{t\to s}\frac{\|x(\sigma(t))\|-\|x(s)\|}{\sigma(t)-s}\\ &= \lim_{t\to s}\frac{\|x(\sigma(t))\|^2-\|x(s)\|^2}{(\sigma(t)-s)\left(\|x(\sigma(t))\|+\|x(s)\|\right)}\\ &= \lim_{t\to s}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{x_i^2(\sigma(t))-x_i^2(s)}{(\sigma(t)-s)\left(\|x(\sigma(t))\|+\|x(s)\|\right)}.\end{aligned}$$

Comme x est Δ-différentiable en $t\in\mathbb{T}^k$, alors les composantes x_i sont Δ-différentiable en t, donc

$$\begin{aligned}\|x(t)\|^{\Delta} &= \sum_{i=1}^{i=n}\lim_{t\to s}\frac{(x_i(\sigma(t))-x_i(s))(x_i(\sigma(t))+x_i(s))}{(\sigma(t)-s)\left(\|x(\sigma(t))\|+\|x(s)\|\right)}\\ &= \sum_{i=1}^{i=n}\frac{x_i^{\Delta}(t)(x_i(\sigma(t))+x_i(t))}{\|x(\sigma(t))\|+\|x(s)\|}\\ &= \frac{\left\langle x^{\Delta}(t),x^{\sigma}(t)\right\rangle+\left\langle x^{\Delta}(t),x(t)\right\rangle}{\|x(\sigma(t))\|+\|x(s)\|}.\end{aligned}$$

$\square$

Définition 3.3.4. *S'il existe (v,M) un tube-solution de (3.1), on définit l'ensemble de $T(v,M)$ par*

$$T(v,M):=\{x\in\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n):\|x(t)-v(t)\|\le M(t),\quad \textit{pour tout } t\in\mathbb{T}\}.$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème d'éxistence.

Théorème 3.3.1. *S'il existe (v,M) un tube-solution de (3.1), alors le problème (3.1) possède une solution $x\in\mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)\cap T(v,M)$.*

Démonstration.

Par la proposition 3.3.1 l'opérateur T_{p^*} est compacte. Ains, par le Théorème de point fixe de Shaulder 1.2.1, T_{p^*} admet un point fixe.

Le théorème 2.3.4 nous assure que ce point fixe est une solution du problème (3.5).

Il suffit donc de démontrer que pour tout solution x de (3.5), $x\in T(v,M)$.

Cosidérons l'ensemble A par

$$A=\left\{t\in\mathbb{T}^k:\|x(t)-v(t)\|>M(t)\right\}.$$

Si $t\in A$ est dense à droit, par (3.6), on trouve

$$\left(\|x(t)-v(t)\|-M(t)\right)^{\Delta}=\frac{\left\langle x(t)-v(t),x^{\Delta}(t)-v^{\Delta}(t)\right\rangle}{\|x(t)-v(t)\|}-M^{\Delta}(t).$$

Si $t \in A$ est disperé à droite, nous avons que

$$\begin{aligned}
(\|x(t)-\upsilon(t)\|-M(t))^{\Delta} &= \frac{\|x(\sigma(t))-\upsilon(\sigma(t))\|-\|x(t)-\upsilon(t)\|}{\mu(t)}-M^{\Delta}(t)\\
&= \frac{\|x(\sigma(t))-\upsilon(\sigma(t))\|\,\|x(t)-\upsilon(t)\|-\|x(t)-\upsilon(t)\|^{2}}{\mu(t)\,\|x(t)-\upsilon(t)\|}-M^{\Delta}(t)\\
&\geq \frac{\langle x(t)-\upsilon(t),x(\sigma(t))-\upsilon(\sigma(t))-(x(t)-\upsilon(t))\rangle}{\mu(t)\,\|x(t)-\upsilon(t)\|}-M^{\Delta}(t)\\
&= \frac{\left\langle x(t)-\upsilon(t),x^{\Delta}(t)-\upsilon^{\Delta}(t)\right\rangle}{\|x(t)-\upsilon(t)\|}-M^{\Delta}(t).
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que si $t \in A$, alors $(\|x(t)-\upsilon(t)\|-M(t))^{\Delta} > 0$. Si $t \in A$ et $M(t) > 0$, alors par hypothèse du tube solution

$$\begin{aligned}
(\|x(t)-\upsilon(t)\|-M(t))^{\Delta} &\geq \frac{\left\langle x(t)-\upsilon(t),f(t,\overline{x}(t))+(x(t)-\overline{x}(t))-\upsilon^{\Delta}(t)\right\rangle}{\|x(t)-\upsilon(t)\|}-M^{\Delta}(t)\\
&= \frac{\left\langle \overline{x}(t)-\upsilon(t),f(t,\overline{x}(t))-\upsilon^{\Delta}(t)\right\rangle}{M(t)}-(M(t)-\|x(t)-\upsilon(t)\|)\\
&\quad -M^{\Delta}(t)\\
&\geq \frac{M(t)\,M^{\Delta}(t)}{M(t)}-M^{\Delta}(t)=0.
\end{aligned}$$

De plus, si $M(t)=0$, alors par hypothèse du tube-solution

$$\begin{aligned}
(\|x(t)-\upsilon(t)\|-M(t))^{\Delta} &\geq \frac{\left\langle x(t)-\upsilon(t),f(t,\overline{x}(t))+(x(t)-\overline{x}(t))-\upsilon^{\Delta}(t)\right\rangle}{\|x(t)-\upsilon(t)\|}-M^{\Delta}(t)\\
&= \frac{\left\langle \overline{x}(t)-\upsilon(t),f(t,\overline{x}(t))-\upsilon^{\Delta}(t)\right\rangle}{\|x(t)-\upsilon(t)\|}+\|x(t)-\upsilon(t)\|-M^{\Delta}(t)>0.
\end{aligned}$$

En posant

$$r(t) := \|x(t)-\upsilon(t)\|-M(t), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Il en résulte que

$$r^{\Delta}(t) > 0, \qquad \text{pour tout } t \in \left\{t \in \mathbb{T}^{k} : r(t) > 0\right\}.$$

De plus, par hypothèse du tube-solution, remarquons que

$$r(b)-r(a) \leq \|\upsilon(b)-\upsilon(a)\|-(M(b)-M(a)) \leq 0.$$

Ainsi, les hypothéses du Lemme 3.2.2 sont satisfaites, ce qui démontre le théorème.

□

L'exemple suivant d'application de Théorèmes 3.3.1.

Exemple 3.3.1. *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = -\|x(t)\|^2 x(t) + (t-a)^4 x(t), & t \in \mathbb{T}^k \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{3.7}$$

Ici, $f(t,x) = -\|x\|^2 x + (t-a)^4 x$, *est continue sur* $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$. *Soit* $M(t) = (t-a)^2$, *pour* $t \in \mathbb{T}$. *Montrons que* $(0, M)$ *est un tube-solution de* (3.7). *En effet, si* $\|x\| = M(t)$, *pour* $t \in \mathbb{T}$, *on a*

$$\langle x, f(t,x) \rangle = -\|x\|^4 + (t-a)^4 \|x\|^2 = 0.$$

Si $t = a$, *on a* $M^{\Delta}(a) = 0$ *et* $f(a,0) = 0$. *D'autre part, nous avons* $M(b) \geq 0$.
Du Théorème 3.3.1, *on déduit que le problème* (3.7) *admet une solution* x *telle que*

$$\|x(t)\| \leq (t-a)^2, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Corollaire 3.3.1. *Soit* $f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue, tels que* $f(t,0) = 0$ *et*

$$\langle x, f(t,x) \rangle \geq 0, \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k \textit{ et pour } \|x\| = 1.$$

Alors le problème (3.1) *possède une solution* x *telle que*

$$\|x(t)\| \leq 1, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Démonstration.
En prenant $v = 0$ et $M = 1$, on obtient (v, M) est un tube-solution de (3.1), alors par le Théorème 3.3.1, on obtient que le problème possède une solution $x \in T(v, M)$, c'est-à-dire

$$\|x(t)\| \leq 1, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

□

Exemple 3.3.2. *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = (1 - \|x(t)\|) x(t) + (t-a) x(t), & t \in \mathbb{T}^k, \\ x(a) = x(b). \end{cases} \tag{3.8}$$

Ici, $f(t,x) = (1 - \|x\|) x + (t-a) x$ *est continue sur* $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$. *On a* $f(t,0) = 0$ *et*

$$\langle x, f(t,x) \rangle = (1 - \|x\|) \|x\|^2 + (t-a) \|x\|^2, \qquad \textit{pout tout } (t,x) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n.$$

Si $\|x\| = 1$, *on a trouver que*

$$\langle x, f(t,x)\rangle = t - a \geq 0, \qquad \text{pout tout } (t,x) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n.$$

Le corollaire 3.3.1 implique que l'équation (3.8) admet une solution x *telle que* $\|x(t)\| \leq 1$, *pour tout* $\mathbb{T}$.

3.4 Théorème d'existance pour le problème (3.2)

Voici la notion de tube-solution pour le problème (3.2). Cette hypothèses sera cruciale dans l'obtention du résultat d'existence.

Définition 3.4.1. *Soit* $(v, M) \in \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, [0, \infty))$.*On dira que* (v, M) *est un tube-solution de* (3.2), *si*

(i) $\left\langle x - v(\sigma(t)), f(t,x) - v^{\Delta}(t)\right\rangle \geq M^{\sigma}(t)M^{\Delta}(t)$, *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$ *et tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\|x - v^{\sigma}(t)\| = M^{\sigma}(t)$,

(ii) $v^{\Delta}(t) = f(t, v^{\sigma}(t))$ *et* $M(t) = 0$, *pour tout* $t \in \mathbb{T}^k$ *tel que* $M^{\sigma}(t) = 0$,

(iii) *Si* (BC) *représente* (3.3),

$$\|x_0 - v(a)\| \leq M(a),$$

si (BC) *représente* (3.4), *alors*

$$\|v(v) - v(a)\| \leq M(a) - M(b).$$

Définition 3.4.2. *S'il existe* (v, M) *un tube-solution de* (3.2), *on définit le problème modifié suivant*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) + x(\sigma(t)) = f(t, \overline{x}(\sigma(t))) - \overline{x}(\sigma(t)), & \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k, \\ x \in (BC). \end{cases}$$

Théorème 3.4.1. *S'il existe un tube-solution* (v, M) *de* (3.2), *alors le problème* (3.2) *possède une solution* $x \in \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n) \cap T(v, M)$.

Définition 3.4.3. *Définissons les opérateurs* $T_I : \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^n)$ *par*

$$T_I(x)(t) = e_1(a,t)\left(x_0 + \int_{[a,t)\cap\mathbb{T}} \left(f(s, \overline{x}(s) + \overline{x}(s)\right) e_1(s,a)\Delta s\right).$$

et

$$T_p(x)(t) = \frac{1}{e_1(t,a)}\left[\frac{1}{e_1(b,a)-1}\int_{[a,b)\cap\mathbb{T}}\left(f(s,\overline{x}(s)+\overline{x}(s)\right)e_1(s,a)\Delta s\right.$$
$$\left.+\int_{[a,t)\cap\mathbb{T}}\left(f(s,\overline{x}(s)+\overline{x}(s)\right)e_1(s,a)\Delta s\right].$$

Proposition 3.4.1. *S'il existe (v,M) un tube-solution de (3.2), alors les opérateurs $T_I, T_p : \mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$ sont compacts.*

Démonstration.

La preuve suit le même raisonnement que dans le Théorème 3.3.1. □

Théorème 3.4.2. *S'il existe (v,M) un tube-solution de (3.2), alors le problème (3.2) possède une solution $x \in \mathcal{C}^1_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R}^n) \cap T(v,M)$.*

Démonstration.

On démontre que toute solution du problème (3.2) est élément de $T(v,M)$ à l'aide du Lemme 3.2.1 et le Théorème 3.3.1. □

Corollaire 3.4.1. *Soit $f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. S'il existe des constantes $L \geq 0$ et $N \geq 0$, telles que*

$$\|f(t,x)\| \leq -L\langle x, f(t,x)\rangle + N, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k \textit{ et tout } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.9}$$

Alors le problème (3.2), (3.3) possède au moins une solution x telle que

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + 1 + \frac{N}{L}(t-a), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Démonstration.

Par (3.9), on obtient

$$\langle x, f(t,x)\rangle \leq -\frac{1}{2N}\|f(t,x)\| + \frac{L}{N} \leq \frac{L}{N}, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k. \tag{3.10}$$

Définissons la fonction $M : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ par

$$M(t) := \|x_0\| + 1 + \frac{L}{N}(t-a) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

Alors,

$$M(t)^{\Delta} = \frac{L}{N}, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k. \tag{3.11}$$

De (3.10) et (3.11), on obtient

$$\langle x, f(t,x)\rangle \leq \frac{L}{N} \leq M(t)^{\Delta} M^{\sigma}(t), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k \text{ et tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ainsi, en prenant $v = 0$, on obtient que (v, M) est un tube-solution de (3.2) et (3.3) (v, M), alors par le Théorème 3.4.2, le problème possède une solution x telle que

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + 1 + K(t-a), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}.$$

□

Corollaire 3.4.2. *Soit $f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. S'il existe des constantes $K > 0$, telle que*

$$\langle x, f(t,x)\rangle \leq K, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k \textit{ et tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors le problème (3.2), (3.3) *possède au moins une solution telle que*

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + 1 + K(t-a), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

Démonstration.

La preuve suit le même raisonnement que dans le corollaire précédent. □

Exemple 3.4.1. *Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = \dfrac{x^{\sigma}(t)}{1 + \|x^{\sigma}(t)\|^2}, & t \in \mathbb{T}^k, \\ x(a) = x_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Ici, $f(t,x) = \dfrac{x}{1+\|x\|^2}$ est continue sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$. On a

$$\langle x, f(t,x)\rangle = \frac{\|x\|^2}{1+\|x\|^2} \leq 1, \qquad \textit{pout tout } (t,x) \in \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n.$$

Le corollaire 3.4.2 implique que l'équation (3.12) damet une solution x telle que

$$\|x(t)\| \leq t + (\|x_0\| + 1 - a), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

3.5 Sur et sous-solutions

Si nous considérons maintenant le problème (3.1) comme une équation avec $n = 1$, alors le tube-solution de la définition (3.3.1) généralise les notions de sous et sur solutions.

Définition 3.5.1 (Sur-solution). *Une fonction $\beta : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelé une sur-solution de* (3.1)*, si*

$$\begin{cases} f\left(t, \beta(t)\right) \geq \beta^{\Delta}(t), & \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^{k}, \\ \beta\left(a\right) = \beta\left(b\right). \end{cases} \tag{3.13}$$

Définition 3.5.2 (Sous-solution). *Une fonction $\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ est appelé une sous-solution de* (3.1)*, si*

$$\begin{cases} f\left(t, \alpha(t)\right) \leq \alpha^{\Delta}(t), & \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^{k}, \\ \alpha\left(a\right) = \alpha\left(b\right). \end{cases} \tag{3.14}$$

Corollaire 3.5.1. *Si l'équation* (3.1) *possède une sous-solution α et une sur-solution β telle que*

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^{k},$$

alors cette équation possède une solution x, telle que

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t), \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{T}^{k}.$$

Démonstration.

Nous définissons la fonction v et M par :

$$v(t) := \frac{\beta(t) + \alpha\left(t\right)}{2}, \qquad M\left(t\right) := \frac{\beta(t) - \alpha\left(t\right)}{2}, \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^{k}.$$

Montrons que (v, M) est un tube-solution de (3.1).
Si $|x - v\left(t\right)| = M\left(t\right)$, alors $x = \alpha\left(t\right)$ ou $x = \beta\left(t\right)$, pour tout $t \in \mathbb{T}^{k}$.
Pour $x = \alpha\left(t\right)$, on a

$$\begin{aligned} \left(x - v(t)\right)\left(f(t, x) - v^{\Delta}(t)\right) &= \frac{1}{2}\left(\alpha(t) - \beta\left(t\right)\right)\left(f(t, \alpha\left(t\right)) - \frac{1}{2}\left(\beta^{\Delta}(t) + \alpha^{\Delta}\left(t\right)\right)\right) \\ &= -M\left(t\right)\left(f(t, \alpha\left(t\right)) - \frac{1}{2}\left(\beta^{\Delta}(t) + \alpha^{\Delta}\left(t\right)\right)\right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Comme α est une sur-solution de (3.1), nous avons

$$\left(x - v(t)\right)\left(f(t, x) - v^{\Delta}(t)\right) \geq M\left(t\right) M^{\Delta}(t).$$

Si $x = \beta\left(t\right)$, en utiliser que β est une sous-solution de (3.1), on obtient (3.15).
Si $M\left(t\right) = 0$, c'est-à-dire $\alpha\left(t\right) = \beta\left(t\right)$, pour tout $t \in \mathbb{T}^{k}$, nous avons

$$M^{\Delta}(t) = 0, \quad v(t) = \alpha\left(t\right) = \beta\left(t\right) \quad \text{et} \quad v^{\Delta}(t) = \alpha^{\Delta}(t) = \beta^{\Delta}(t), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^{k}.$$

De (3.13) et (3.14), nous obtenons

$$f(t, v(t)) = v^{\Delta}(t), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

et

$$v(a) = v(b) \qquad \text{et} \qquad M(b) - M(a).$$

Du Théorème 3.3.1, on déduit que l'équation (3.1) admet une solution x telle que

$$\alpha(t) \leq x\,(t) \leq \beta(t), \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{T}^k.$$

□

Exemple 3.5.1. *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = x^2\,(t) + (t^2 - t)\,x\,(t) - t^3, & \textit{pour tout } t \in [0,1]\,, \\ x\,(0) = x\,(1)\,. \end{cases} \tag{3.16}$$

Ici, $f\,(t,x) = x^2 + (t^2 - t)\,x - t^3$ *est continue sur* $[0,1] \times \mathbb{R}$. *Soit*

$$\alpha\,(t) = t \qquad \textit{et} \qquad \beta\,(t) = 2 - t^2, \qquad \textit{pour tout } t \in [0,1]\,.$$

Alors $f\,(t, \alpha\,(t)) = 0,\ \alpha'\,(t) = 1,\ f\,(t, \beta\,(t)) = 4 - 2t - 2t^2$ *et* $\beta'\,(t) = -2t$, *pour tout* $t \in [0,1]\,.$

Donc α *est une sous-solution et* β *est une sur-solution de* (3.16). *Le corollaire* 3.5.1 *implique que l'équation* (3.16) *admet une solution* x *telle que*

$$t \leq x\,(t) \leq 2 - t^2, \qquad \textit{pour tout } t \in [0,1]\,.$$

Bibliographie

[1] A. Benaissa cherif, A. Hammoudi, F. Z. Ladrani, Density problems in $L^p_\Delta(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ space, Ele. J. Math. Anal. Appl. Vol. 1(2) July 2013, pp. 178-187.

[2] H. Gilbert, Existence Theorems for First-Order Equations on Time Scales with $\Delta-$Carathéodory Functions, Adv. Diff. Equ, 2010.

[3] H. Brezis, Analyse fonctionelle, Théorie et applications, Masson, Paris 1987.

[4] M. Bohner, A.C.Peterson, Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications. Birkäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

[5] M. Bohner, A.C. Peterson, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

[6] M. Bohner, A. Peterson, First and second order linear dynamic equations on measure chains, J. Diff. Equ. Appl.,7(6)-(2001),pp.767-792.

[7] R. Agarwal, M. Bohner, D. O'Regan, A. Peterson, Dynamic equations on time scales : A survey, J. Comput. Appl.Math.,141(1-2)2002,pp.1-26.

[8] R. Agarwal, D. O'Regan, Nonlinear boundary value problems on time scales, Nonlin. analys,44(2001),527-535.

[9] S. Hilger, Analysis on measure chains a uni ed approach to continuous and discrete calculus, Results Math.18 (1990), 18-56.

[10] Sh. Guseinov, Integration on time scales, J. Math. Anal. Appl. 285(1), 2003, 107-127.

Résume Ce memoire porte sur l'existence de solutions pour deux types de systèmes d'équations aux échelles de temps du premier ordre. Les résultats d'existence pour ces deux problèmes ont été obtenus grâce à des notions de tube-solution adaptées à ces systèmes.

Abstarct This memoire concerns the existence of solutions for two kind of systems of first order time scales equations. Existence results for these problems are obtained with new notions of solution-tube adapted to these systems.

ملخص

هَذَه المَذكِرَة تَهتَم بِوُجُد الحُلول لِنَوعُين مِن جَمَل المُعَادَلَات التَفَاضليَة مِن الدَرجَة الُاولَي في المقَايِيس الزَمَنية. اِلنَتيجَة الَّتي تَخص هَاتِيَن النِوعُين اعُتَمَدَت علَى مَفَاهِيم انبوبَ الحَل الَّتي تَتَنَاسَب معُ هذَه انوَاعُ مِن الجُمَل.