République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique

Option : Équations différentielles et modélisation

Présenté par :
Melle. Houaria LAHMER

Existence de solution pour des équations différentielles semi-linéaires

Encadrant :
Kheira MEKHALFI
Maitre de conférences "B" à C.U.B.B.A.T.

Soutenu en 05/06/2018

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. Ahmed HAMMOUDI (Professeur)	C.U.B.B.A.T.
Examinateurs :	Mr. Abd Rahmen BENIANI (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	Mme. Kheira MEKHALFI (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mes très chéres père et mère source d'amour et tendresse, qui m'accompagné

le long de ma duré d'étude et qui sacrifient toujours pour me voir réussir.

A mes frères et ma sœur

A toute ma famille. A toute mes amis.

Et à tous ceux qui ont contribué de loin pour que ce

projet soit possible, je vous dis merci.

Remerciement

Avant toute chose, nous tenons à remercier « **Allah** » le tous puisant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Je remercie mon encadreur madame **MEKHALFI Kheira**, je tiens à lui exprimer ici ma reconnaissance pour son enthousiasme et son solution sans faille durant la réalisation de cette thème. Il a toujours été disponible pour me prodiguer ses conseils.

Je suis sensible à l'honneur que me fait monsieur **HAMMOUDI Ahmed**, en présidant le jury de cette thème. Je rends hommage à ses qualités et scientifiques. Je lui adresse mes vifs remerciements.

Je suis heureuse également de remercier, monsieur **BENIANI Abd Rahmen**, d'avoir accepté d'examiner cette thème et de participer au jury. Je sensible à sa générosité qu'il m'a témoignée.

A touts les enseignants du département mathématique sans exceptions qui ont contribué à ma formation.

Je remercie particulièrement mes parents qui m'ont stimulée et encouragée pendant la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

LAHMER Houaria.

Table des matières

Introduction **2**

1 Préliminaires **4**

1.1 Notations et Définitions 4

1.2 Théorie des semi-groupes 6

1.2.1 C_0-semi-groupes 6

1.2.2 Cosinus fortement continue 8

1.3 Quelques exemples 10

1.4 Théorèmes De Point Fixe 16

2 Équations différentielles semi-linéaires à valeur initiale **17**

2.1 Introduction 17

2.2 Résultats Principaux 19

3 Équations différentielles semi-linéaires avec condition périodique **28**

3.1 Introduction 28

3.2 Résultats Principaux 29

4 Équation différentielle semi-linéaire du second ordre **37**

4.1 Introduction 37

4.2 Résultats Principaux 39

Bibliographie **46**

Resumé

Le but de ce travail est de prouver l'existence et unicité des équations différentielles semi-linéaires de première et second ordre, associe à un opérateur linéaire A définie dans l'espace de Banach.

Pour ce faire, nous utilisons la théorie des C_0-semi-groupes, la théorie des cosinus fortement continues et les théorèmes de point fixe.

Introduction

Il est bien connu, que certains systèmes d'écrits par des équations aux dérivées partielles, peuvent être exprimés par des équations différentielles ordinaires (voir l'ouvrage de Pazy [11]).

La théorie des équations semi-linéaires est devenue importante dans les dernières années. On peut la trouver dans les différentes branches de la science, mathématiques appliqués, certains phénomènes de dynamique des populations, physique, médecine, biologie et écologie,...voir par exemple [6, 3, 9].

Ce travail traite l'existence des solutions pour certains problèmes des équations différentielles semi-linéaire.

Notre approche est basée sur la théorie du point fixe où a utilisé le théorème de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder combinée avec la théorie de C_0-semi-groupe et cosinus fortement continue.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

Le premier chapitre contient les notations, les définitions, théorie de C_0-semi-groupe et cosinus fortement continue, quelques théorèmes de point fixe et des exemples.

Le deuxième chapitre nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour d'équations différentielles semi-linéaires à valeur initiale :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in J = [0, b] \\ u(0) = \xi. \end{cases}$$

Où A est le générateur infinitésimal de la famille de C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur un espace de Banach et $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une fonction continue, avec données initiales ξ.

Le troisième chapitre nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour d'équations différentielles semi-linéaires avec condition périodique :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in J = [0, b] \\ u(0) = u(b). \end{cases}$$

Où A est le générateur infinitésimal de la famille de C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur un espace de Banach et $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une fonction continue.

Le quatrième chapitre nous étudions l'existence et l'unicité des solutions pour d'équations différentielles semi-linéaires du second ordre à valeur initiale :

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in J = [0, b] \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \end{cases}$$

Où A est le générateur infinitésimal de la famille cosinus fortement continue d'opérateurs linéaires bornés $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ dans l'espace de Banach $\mathcal{E}$ et $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une fonction continue, avec données initiales $u_0, u_1 \in \mathcal{E}$.

A la fin de ce travail on donne une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations, définitions, théorèmes de point fixe qui sont utilisées dans ce travail.

1.1 Notations et Définitions

Les notations suivantes serons utilisées dans tout ce qui va suivre. Soit l'intervalle $J=[0,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(\mathcal{E},\|.\|)$ un espace de Banach.

$\mathcal{C}(J,\mathcal{E})$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies de J à valeur dans $\mathcal{E}$ muni de la norme

$$\|u\|_\infty=\sup\Big\{|u(t)|:t\in J\Big\}.$$

$\mathcal{B}(\mathcal{E})$ est l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés définis de $\mathcal{E}$ à valeurs dans $\mathcal{E}$ muni de la norme

$$\|H\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \;=\; \sup\Big\{|H(u)|:|u|=1\Big\}.$$

Définition 1.1.1. *[16] Une fonction mesurable $u:J\longrightarrow\mathcal{E}$ est dite intégrable au sens de Bochner si et seulement si $\|u\|$ est intégrable au sens de Lebesgue.*

$L^1(J,\mathcal{E})$ est l'espace de Banach des fonctions mesurables $u : J \longrightarrow \mathcal{E}$ qui sont Bochner intégrable, muni de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_0^b |u(s)|ds.$$

Définition 1.1.2 (**La convergence dominée de Lebesgue** [8]). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de $L^1(J,\mathbb{R}^n)$ converge presque partout (p.p) vers f.*
Supposons qu'il existe une fonction positive $g \in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad p.p \ \forall x \in J.$$

Alors la fonction f est intégrable et on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\|_{L^1} = 0 \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Définition 1.1.3. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces de Banach et l'opérateur $H : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$. On dit que l'opérateur H est complètement continu si :*

- *H est continu.*

  et

- *H transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact.*

Proposition 1.1.1. *Soit $\mathcal{C}(J,\mathcal{E})$ l'espace des fonctions continues de J vers l'espace de Banach $\mathcal{E}$ et $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}(J,\mathcal{E})$.*
$\mathcal{M}$ est relativement compact ssi

(i) *$\mathcal{M}$ est borné i.e $\exists\, b \geq 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq b$, $\forall f \in \mathcal{M}$,*

(ii) *$\mathcal{M}$ est équicontinu i.e*

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in J : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon, \ \forall f \in \mathcal{M},$$

(iii) *$\forall x \in J$, $\{f(x) : f \in \mathcal{M}\}$ est relativement compact dans $\mathcal{E}$.*

Théorème 1.1.1 (**Arzelà-Ascoli** [18, 1]). *Soit F une famille des fonctions continues définies sur un intervalle $[a,b]$. Alors F est relativement compacte (précompact) dans $\mathcal{C}[a,b]$ si F est équicontinue et uniformément bornée.*

1.2 Théorie des semi-groupes

1.2.1 C_0-semi-groupes

Dans cette section, nous donnons un bref aperçu de la théorie des C_0 semi-groupes, qui est très important dans l'étude des équations différentielles semi-linéaires. Pour plus détails peuvent être trouvés dans les revus : ([11], [5], [17], [15])

Nous commençons par quelques définitions.

Définition 1.2.1. *On appelle C_0-semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{E}$ une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. $T(0) = I$ *(où I est l'opérateur identité de $\mathcal{E}$) ;*
2. $T(t+s) = T(t)T(s), \qquad \forall t, s \geq 0$ *;*
3. $\lim\limits_{t\to 0^+} T(t)x = x, \qquad \forall x \in \mathcal{E}.$

Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe, alors il existe $\omega \geq 0$ et $M > 1$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Dans ce cas, on dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe exponentiellement borné.
En particulier :

a) Les C_0-semi-groupe bornés i.e

$$\|T(t)\| \leq M, \qquad \forall t \geq 0.$$

b) Les C_0-semi-groupe contractions i.e

$$\|T(t)\| \leq 1, \qquad \forall t \geq 0.$$

Définition 1.2.2. *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble :*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{E} \,\middle|\, \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\}$$

par :

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}^+\mathrm{T(t)}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque 1.2.1. *Il est clair que le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe est un opérateur linéaire.*

Pour un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ on note par :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - A \quad \text{est inversible dans } \mathcal{B}(\mathcal{E})\},$$

l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et par :

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{R}(., A) : & \rho(A) & \longrightarrow & \mathcal{B}(\mathcal{E}) \\ & \lambda & \longmapsto & \mathrm{R}(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \end{array}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire A.

Théorème 1.2.1. *Un opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $T(t)$ uniformément continu si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et $T(t) = e^{tA}$.*

Proposition 1.2.1. *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité :*

$$T(t)Ax = AT(t)x, \qquad \forall t \geq 0.$$

Proposition 1.2.2. *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe et A son générateur infinitésimal. Alors l'application :*

$$t \in [0, \infty) \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E},$$

est dérivable sur $[0, \infty)$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ et on a :

$$\frac{d}{\mathrm{d}t} T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \qquad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.2.2 (Hille-Yosida). *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire dans un espace de Banach $\mathcal{E}$. Alors A son générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe satisfaisant $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0$ ssi* *i)* $R(\lambda, A) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

ii) *Pour tout* $\lambda > \omega$ *où* $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $M \geq 1$*, on a :*

$$\|R(\lambda, A)^{(n)}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leqslant \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 1.2.3. *Soit* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$*, un opérateur linéaire fermé.*
Alors :

i) si $\lambda, \mu \in \rho(A)$*, alors*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A);$$

ii) nous avons

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n R(\lambda, A)^{n+1}$$

quels que soient $n \in \mathbb{N}$ *et* $\lambda \in \rho(A)$.

1.2.2 Cosinus fortement continue

Dans cette section, nous donnons un bref aperçu de la théorie des cosinus fortement continues, qui est très important dans l'étude des équations différentielles semi-linéaires du second ordre. Pour plus détails peuvent être trouvés dans les revus : ([13], [14], [12], [2])

Nous commençons par quelques définitions et propriétés.

Définition 1.2.3. *On appelle cosinus fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur* $\mathcal{E}$ *une famille* $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1. $C(0) = I$ *(où* I *est l'opérateur identité de* $\mathcal{E}$ *) ;*
2. $C(t + s) - C(t - s) = 2C(t)C(s), \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}$ *;*
3. *L'application* $t \longrightarrow C(t)x$ *est fortement continue pour tout* $x \in \mathcal{E}$.

• *La famille sinus fortement continue* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *associée à la famille cosinus fortement continue* $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *est définie par :*

$$S(t)x = \int_0^t C(s)xds; \qquad \forall x \in \mathcal{E}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 1.2.4. *Soit une famille* $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *cosinus fortement continue dans* $\mathcal{E}$. *On a les assertions suivantes :*

1) $C(t) = C(-t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *;*

2) L'application $t \longrightarrow S(t)x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *pour chaque* $x \in \mathcal{E}$*;*

3) $S(t) = -S(-t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*;*

4) Il existe des constantes $M \geq 1$ *et* $w \geq 0$ *telle que* $\|C(t)\| \leq Me^{w|t|}$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*;*

Définition 1.2.4. *On appelle générateur infinitésimal d'un cosinus fortement continue* $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, *un opérateur* A *défini sur l'ensemble :*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{E} \Big| \lim_{t\to 0} \frac{2[C(t)x - x]}{t^2} \text{ existe} \right\},$$

par :

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{2[C(t)x - x]}{t^2} = \frac{d^2}{dt^2} C(t)x \Big|_{t=0}, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(A).$$

Proposition 1.2.5. *Soit* $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *une famille cosinus fortement continue dans* $\mathcal{E}$ *et* A *générateur infinitésimal avec*

$$E = \{x \in \mathcal{E} : C(t)x \text{ une fonction continement différntiable en } t\}.$$

On a :

1) Si $x \in E$, *alors* $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $\frac{d}{dt}C(t)x = AS(t)x$ *;*

2) Si $x \in \mathcal{D}(A)$, *alors* $C(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax$ *;*

3) Si $x \in E$, *alors* $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $\frac{d^2}{dt^2}S(t)x = AS(t)x$ *;*

4) Si $x \in \mathcal{D}(A)$, *alors* $S(t)x \in \mathcal{D}(A)$ *et* $AS(t)x = S(t)Ax$ *;*

5) Si $x \in \mathcal{E}$ *et* $t, r \in \mathbb{R}$ *alors* $\int_s^r S(u)xdu \in \mathcal{D}(A)$ *et* $A\int_s^r S(u)xdu = C(s)x - C(r)x$.

1.3 Quelques exemples

Dans cette section, nous allons présenter quelques exemples sur les C_0-semi-groupes

Exemple 1.3.1. *Soit :*

$$\mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \;=\; \{f:[0,\infty)\longrightarrow \mathbb{R}/f\, \textit{est uniformememt continue et bornée}\}.$$

Avec la norme $\|f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} = \sup\limits_{\alpha\in[0,\infty)}|f(\alpha)|$, *l'espace* $\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ *devient un espace de Banach.*
Définissons :

$$(T(t)f)\alpha \;=\; f(t+\alpha), \qquad \forall t\geq 0 \;\textit{et}\; \alpha\in[0,\infty)\,.$$

Évidemment $T(t)$ *est un opérateur linéaire, et en plus, on a :*

- *Pour tout* $f\in\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$. *On a*

$$(T(0)f)\alpha = \;f(0+\alpha)\;=\;f(\alpha).$$

Donc $T(0)=I$.

- *De même, pour tout* $t,s\geq 0$ *et pour tout* $f\in\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ *nous avons*

$$(T(t+s)f)\alpha \;=\; f(t+s+\alpha) = (T(t)f)(s+\alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha).$$

Donc $T(t+s)=T(t)T(s)$.

- *De plus, pour tout* $t\leq 0$ *et tout* $f\in\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ *nous avons*

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+}\|T(t)f-f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} = \lim_{t\longrightarrow 0^+}\{\sup_{\alpha\in[0,\infty)}|f(t+\alpha)-f(\alpha)|\} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{t\longrightarrow 0}T(t)f \;=\; f$.

- *De même, nous avons :*

$$\begin{aligned}
\|T(t)f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} &= \sup_{\alpha\in[0,\infty)}|(T(t)f)(\alpha)| \\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty)}|f(t+\alpha)| \\
&= \sup_{\beta\in[t,\infty)}|f(\beta)| \\
&\leqslant \sup_{\beta\in[0,\infty)}|f(\beta)| = \|f\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)}, \quad \forall t\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Donc elle est bornée et $\|T(t)\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} = 1, \forall t \geq 0$. *Par conséquent* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* $\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$, *nommé le* C_0*-semi-groupe de translation à droite.*

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \longrightarrow \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ *le générateur infinitésimal du* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. *Si* $f \in \mathcal{D}(A)$, *alors on a :*

$$Af(\alpha) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha),$$

uniformément par rapport à α. *Par conséquent :*

$$\mathcal{D}(A) \subset \Big\{ f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)/f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \Big\}$$

si $f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$ *tel que* $f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)$, *alors :*

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} = \sup_{\alpha\in[0,\infty)} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right|$$

Mais :

$$\begin{aligned} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| &= \left| \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} f(\tau)|_{\alpha}^{\alpha+t} - f'(\alpha) \right| \\ &= \frac{1}{t} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+t} [f'(\tau) - f'(\alpha)]\, \mathrm{d}\tau \right| \\ &= \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} |f'(\tau) - f'(\alpha)|\, \mathrm{d}\tau \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

uniformément par rapport à α *pour* $t \to 0$. *Par suite :*

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}_{ub}[0,\infty)} \to 0 \quad si \quad t \to 0$$

d'où $f \in \mathcal{D}(A)$ *et :*

$$\Big\{ f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty)/\, f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \Big\} \subset \mathcal{D}(A)$$

par conséquent

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{ f \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) / \, f' \in \mathcal{C}_{ub}[0,\infty) \Big\}$$

et

$$Af \;=\; f'.$$

Exemple 1.3.2. *Considérons l'espace*

$$L_p(]0,\infty)) = \Big\{ l\text{'ensemble des fonctions mesurable} f \;\Big|\; \int_0^\infty |f(\alpha)|^p d\alpha \leq \infty \Big\},$$

tel que $1 \leq p < \infty$, *avec la norme*

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(\alpha)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L_p(]0,\infty)), 1 \leq p < \infty,$ *devient un espace de Banach.*

Définissons :

$$(T(t)f)\alpha \;=\; f(t+\alpha), \qquad \forall t \geq 0 \text{ et } \alpha \in \,]0,\infty)\,.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\|T(t)f\|_p &= \left(\int_0^\infty |(T(t)f)(\alpha)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^\infty |f(\alpha + t)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_t^\infty |f(\beta)|^p d\beta \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p.
\end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\|_p = 1, \forall t \geq 0.$

Évidemment $T(t)$ *est un opérateur linéaire, et en plus, on a :*

- *Pour tout* $f \in L_p$. *On que*

$$(T(0)f)\alpha = \; f(0+\alpha) \;=\; f(\alpha).$$

Donc $T(0) = I.$

- *De même, pour tout $t, s \geq 0$ et pour tout $f \in L_p$ nous avons*

$$(T(t+s)f)\alpha \;=\; f(t+s+\alpha) = (T(t)f)(s+\alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha).$$

Donc $T(t+s) = T(t)T(s)$.

- *De plus, pour tout $t \leq 0$ et tout $f \in L_p$ nous avons*

$$\begin{aligned}\lim_{t \longrightarrow 0} \|T(t)f - f\|_p &= \lim_{t \longrightarrow 0} \left(\int_0^{\infty} |(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 0} \left(\int_0^{\infty} |f(\alpha+t) - f(\alpha)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = 0.\end{aligned}$$

Donc $\lim_{t \longrightarrow 0} T(t)f \;=\; f$.

Par conséquent $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornées sur $L_p(]0, \infty))$.

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset L_p(]0, \infty)) \longrightarrow L_p(]0, \infty))$ le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Si $f \in \mathcal{D}(A)$, alors on a :

$$Af(\alpha) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} \;=\; \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} \;=\; f'(\alpha),$$

uniformément par rapport à α. Par conséquent :

$$\mathcal{D}(A) \subset \Big\{ f \in L_p(]0, \infty))/f' \in L_p(]0, \infty)) \Big\},$$

si $f \in L_p(]0, \infty))$ tel que $f' \in L_p(]0, \infty))$, alors :

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_p \;=\; \left(\int_0^{\infty} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} \;-\; f'(\alpha) \right| d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mais :

$$\begin{aligned}\left|\frac{(T(t)f)(\alpha)-f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)\right| &= \left|\frac{f(\alpha+t)-f(\alpha)}{t} - f'(\alpha)\right| \\ &= \left|\frac{1}{t}f(\tau)|_{\alpha}^{\alpha+t} - f'(\alpha)\right| \\ &= \frac{1}{t}\left|\int_{\alpha}^{\alpha+t}[f'(\tau)-f'(\alpha)]\,\mathrm{d}\tau\right| \\ &= \frac{1}{t}\int_{\alpha}^{\alpha+t}|f'(\tau)-f'(\alpha)|\,\mathrm{d}\tau \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

uniformément par rapport à α pour $t \to 0$. Par suite :

$$\left\|\frac{T(t)f-f}{t} - f'\right\|_p \to 0 \qquad si \quad t \to 0,$$

et on voit que :

$$\Big\{f \in L_p(]0,\infty))/\, f' \in L_p(]0,\infty))\Big\} \subset \mathcal{D}(A).$$

Par conséquent :

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{f \in L_p(]0,\infty))/\, f' \in L_p(]0,\infty))\Big\},$$

et

$$Af \;=\; f'.$$

Exemple 1.3.3. *Soient $p \in [1,\infty)$ et*

$$l_p = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\middle|\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty\right\}$$

Avec la norme

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\Big)^p.$$

Considérons une suite des nombres réel positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et définissons une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires sur l'espace l_p par :

$$T(t)(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \;=\; (e^{-a_n t}x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, \qquad \forall t \leq 0$$

est un C_0-semi-groupe d'opérateur linéaire bornés sur l_p et son générateur infinitésimal A est défini sur :

$$\mathcal{D}(A) = \Big\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l_p/(a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in l_p\Big\}.$$

par

$$A(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (-a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Exemple 1.3.4. *Soit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ avec la norme de la convergence uniforme, alors la famille $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ définie par :*

$$(T(t)\phi)(x) = \phi(xe^{-t});\ t \geq 0,\ \phi \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), x \in [0,1]$$

est un C_0-semi-groupe sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et son générateur infinitésimal A est défini sur :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A) &= \Big\{\phi \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : \phi'(x) \text{ existe et il est continu pour } x \in [0,1]\Big\}\\ &= \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})\\ \text{par}\quad A\phi &= \phi'.\end{aligned}$$

1.4 Théorèmes De Point Fixe

Dans cette section nous présentons deux Théorèmes de point fixe qui sont utilisés dans la suite pour montrer l'existence et l'unicité de solution.

Théorème 1.4.1 (**Contraction de Banach** [4]). *Soit X un espace de Banach et $f : X \to X$ une contraction. Alors, f a un unique point fixe.*

Théorème 1.4.2 (**Leray-Schauder** [4]). *Soit E un espace de Banach, et $U \subset E$ convexe avec $0 \in U$. Soit $F : U \to U$ est un opérateur complètement continu. Alors ou bien*

(i) *F a un point fixe*

ou bien

(ii) *L'ensemble $\mathcal{N} = \{x \in U : x = \lambda F(x),\ 0 < \lambda < 1\}$ est non borné.*

Chapitre 2

Équations différentielles semi-linéaires à valeur initiale

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le problème à valeur initiale d'équations différentielles semi-linéaires, nous nous intéresserons à l'existence et l'unicité de solution utilisant la théorie de C_0-semi-groupes et l'approche du point fixe.

Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in J = [0, b] & (2.1) \\ u(0) = \xi. & (2.2) \end{cases}$$

Où $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geqslant 0}$ sur un espace de Banach et $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une fonction continue, avec données initiales ξ.

Lemme 2.1.1. *Si u est une solution de problème $(2.1) - (2.2)$ alors est défini par*

$$u(t) = T(t)\xi + \int_0^t T(t-s) f(s, u(s)) \, \mathrm{d}s, \qquad \forall t \in J.$$

Preuve. Si u est une solution de problème $(2.1)-(2.2)$ alors u est solution de problème suivante :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + h(t) & (2.3) \\ u(0) = \xi & (2.4) \end{cases}$$

Soit $T(t)$ un C_0-semi-groupe engendre par A et on défini

$$\begin{aligned} g : \quad [0,t] &\longrightarrow \mathcal{E} \\ s &\longmapsto g(s) = T(t-s)u(s) \end{aligned}$$

est différentiables

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}(s) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[T(t-s)u(s)] \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)[Au(s) + h(s)] \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)h(s) \\ &= T(t-s)h(s), \end{aligned} \tag{2.5}$$

si h une fonction continue alors $T(t-s)h(s)$ est intégrable et en intégrant (2.5) de 0 à t on a :

$$g(t) = g(0) + \int_0^t T(t-s)h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Donc :

$$u(t) = T(t)\xi + \int_0^t T(t-s)h(s)\,\mathrm{d}s. \tag{2.6}$$

■

Avant de prouver nos résultats principaux pour ce chapitre, nous donnons la définition de la solution du problème $(2.1) - (2.2)$.

Définition 2.1.1. *Une fonction $u \in \mathcal{C}(J, \mathcal{E})$ est dite solution de problème $(2.1) - (2.2)$ si u vérifié l'équation intégrable suivant :*

$$u(t) = T(t)\xi + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t \in J.$$

2.2 Résultats Principaux

On va donner un premier résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution de problème $(2.1)-(2.2)$ en utilisant le théorème de la contraction de Banach.

Théorème 2.2.1. *Soit $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ continue. supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(H_1) $\exists M > 0 : \|T(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq M, \forall t \in J.$

(H_2) *Il existe une constante positive k telle que*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq k|u-v|, \quad pour \quad t \in J \quad et \quad u,v \in \mathcal{E}.$$

Si

$$Mkb < 1. \tag{2.7}$$

Alors il existe une solution unique du problème $(2.1)-(2.2)$ sur J.

Preuve. Transformons le problème $(2.1)-(2.2)$ en un problème de point fixe.
On considère l'opérateur $F : \mathcal{C}(J,\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(J,\mathcal{E})$ défini par :

$$F(u)(t) = T(t)\xi + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s \qquad \forall t \in J$$

Soient $u, v \in \mathcal{C}(J,\mathcal{E})$, alors pour tout $t \in J$, on a

$$F(u)(t) - F(v)(t) = \int_0^t T(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))]ds.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|F(u)(t) - F(v)(t)| &= \left| \int_0^t T(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))]ds \right| \\
&\leq \int_0^t |T(t-s)|\ |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\leq \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \int_0^t \ |f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\leq M \int_0^t k|u(s) - v(s)|ds
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,b]} |F(u)(t) - F(v)(t)| &\leq Mk \sup_{t\in[0,b]} |u(s) - v(s)| \int_0^b ds \\ \|F(u) - F(v)\|_\infty &\leq Mkb\|u - v\|_\infty\end{aligned}$$

Par la condition (2.7) l'opérateur F est une contraction et donc F a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach, qui est la solution unique au problème $(2.1) - (2.2)$. ■

Théorème 2.2.2. *Soit $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ continue. Supposons que les condition suivantes sont vérifiées :*

(H_1) *Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ de contraction*

(H_2) *f Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. i.e $\exists\, L > 0$ tel que :*

$$\|f(t,u) - f(t,v)\|_\infty \leq L\,\|u - v\|_\infty.$$

Alors il existe une solution unique du problème $(2.1) - (2.2)$ sur J.

Preuve. Transformons le problème $(2.1) - (2.2)$ en un problème de point fixe. On considère l'opérateur $F : \mathcal{C}(J,\mathcal{E}) \to \mathcal{C}(J,\mathcal{E})$ défini par :

$$Fu(t) = T(t)\xi + \int_0^t T(t-s) f(s,u(s))\,\mathrm{d}s.$$

Soient pour tout $u, v \in (J,\mathcal{E})$, alors pour tout $t \in J$, on a :

$$(Fu)(t) - (Fv)(t) = \int_0^t T(t-s)(f(s,u(s)) - f(s,v(s)))\,\mathrm{d}s.$$

Donc :

$$\|F(u) - F(v)\|_\infty \leq \,L\,t\,\|u - v\|_\infty.$$

On a $F^2 = F \circ F$, alors

$$\begin{aligned}|F^2u(t) - F^2v(t)| &= \left|\int_0^t T(t-s)[f(s,F(u)(s)) - f(s,F(v)(s))]ds\right| \\ &\leq \int_0^t |T(t-s)|\,|f(s,F(u)(s)) - f(s,F(v)(s))|ds\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in J$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\|F^2u - F^2v\|_\infty &\leqslant L\int\limits_0^t \|Fu - Fv\|_\infty \,\mathrm{d}s. \\
&\leqslant L\int\limits_0^t Ls\|u - v\|_\infty \,\mathrm{d}s \\
&= \frac{L^2}{2!}t^2\|u - v\|_\infty \\
\vdots \quad &\vdots \\
\|F^nu - F^nv\|_\infty &\leqslant \frac{L^n}{n!}t^n\|u - v\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Il s'ensuit que

$$
\|F^nu - F^nv\|_\infty \leqslant \frac{L^n}{n!}b^n\|u - v\|_\infty.
$$

Puisque $\dfrac{L^n}{n!}b^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $\exists\, p \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{L^p}{p!}b^p < 1$.
Il en résulte que $F^p = F \circ \cdots \circ F$ est une contraction puis $\exists\,!u \in \mathcal{C}(J, \mathcal{E})$ tel que $F^pu = u$.
On a $Fu = u$.
En effet,
$F^p(u) = u$ implique que $F^{p+1}(u) = Fu$, on peut écrire $F^p(F(u)) = Fu$ il s'ensuit que $F(u)$ est un point fixe de F^p et puisque le point fixe est unique nous obtenons $F(u) = u$.
Nous concluons que $F(u) = u$ est une solution de problème (2.1) − (2.2) sur J, cela est vrai pour tous $b > 0$.
D'où le problème (2.1) − (2.2) a une solution unique sur J. ∎

Ensuite, nous donnons un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder appliquée aux opérateurs complètement continus. Le lemme suivant est essentiel pour la preuve de notre résultat principal

Lemme 2.2.1 (Granwall). *Soient $u, v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues telle que, pour quelque $C \geq 0$, on a :*

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds, \qquad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Alors

$$u(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau\right), \qquad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Preuve. On suppose $C > 0$. On définit les fonction

$$f(t) = C + \int_{t_0}^{t} v(s)u(s)ds,$$

et

$$g(t) = C \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau\right).$$

On veut montrer que si $f(t) \leq u(t)$ alors $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq t_0$. On note que $g(t) > 0$ (par hypothèse $C > 0$ et $u, v \geq 0$) et en plus $f(t_0) = g(t_0)$.
Donc il suffit de démontrer que

$$\frac{d}{dt}\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2} \leq 0.$$

En fait on a (on utilise ici hypothèse $u(t) \leq f(t)$)

$$f'(t) = u(t)v(t) \leq f(t)v(t),$$

et

$$g'(t) = Cv(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau\right) = g(t)v(t).$$

D'où on obtient tout de suite

$$f'(t)g(t) - f(t)g'(t) \leq f(t)v(t)g(t) - f(t)v(t)g(t) = 0.$$

Le cas $C = 0$ on peut l'obtenir comme cas limite quand $C \to 0$. ■

Théorème 2.2.3. *Soit $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ continue. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(C_1) *L'opérateur $T(t)$ est compact dans $\mathcal{E}$ pour tout $t > 0$;*

(C_2) $\exists M > 0 : \|T(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \leq M, \forall t \in J.$

(C_3) *Il existe une fonction $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continue et croissante et $p \in L^1(J, \mathcal{E})$ tel que*

$$|f(t, u)| \leq p(t) g(\|u\|_\infty)$$

et

$$M \int_0^b p(s) ds < \int_c^\infty \frac{ds}{g(s)}$$

avec $c = M\xi$

Alors le problème $(2.1) - (2.2)$ admet au moins une solution sur J.

Preuve. Transformons le problème $(2.1) - (2.2)$ en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $F : \mathcal{C}(J, \mathcal{E}) \to \mathcal{C}(J, \mathcal{E})$ défini comme dans le Théorème 2.2.1. La preuve est donnée en quatre étapes.

Étape 1 : F est continu.

Soit $\{u_n\}$ une suite dans $\mathcal{C}(J, \mathcal{E})$ telle que $u_n \to u$ dans $\mathcal{C}(J, \mathcal{E})$.

Alors pour $t \in J$ on a

$$(Fu)(t) - (Fv)(t) = \int_0^t T(t-s)(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\, \mathrm{d}s.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|F(u_n)(t) - F(u)(t)| &= \left| \int_0^t T(t-s)[f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))] ds \right| \\
&\leq \int_0^t |T(t-s)|\, |f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))| ds \\
&\leq \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \int_0^t |f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))| ds \\
&\leq M \int_0^t |f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))| ds
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur J, on obtient

$$\|F(u_n)-F(u)\|_\infty \;\leq\; Mb\|f(.,u_{n,.})-f(.,u.)\|_\infty$$

Comme $u_n \to u$. Et puisque f est continue on a :

$$f(s,u_n(s)) \longrightarrow f(s,u(s)) \quad lorsque\ n\to\infty$$

Alors d'après le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\|F(u_n)-F(u)\|_\infty \leq Mb\|f(.,u_{n,.})-f(.,u.)\|_\infty \to 0\ lorsque\ n\to\infty$$

Donc F est continu.

Étape 2 : F transforme un ensemble borné en un ensemble uniformément borné dans $\mathcal{C}(J,\mathcal{E})$.

Pour tout nombre positif ρ, soit

$$B_\rho \;=\; \{u\in\mathcal{C}(J,\mathcal{E}) : \|u\|_\infty \leq \rho\}.$$

Alors pour tout ρ, B_ρ est clairement un ensemble borné. Il suffit de montrer que pour tout $\rho>0$ il existe une constante positive δ telle que pour chaque $u\in B_\rho$ nous avons $F(u)\in B_\delta$. Pour chaque $t\in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
|F(u)(t)| &= \left|T(t)\xi+\int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds\right| \\
&\leq \left|T(t)\xi\right| + \left|\int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds\right| \\
&\leq \|T(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\xi + \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\int_0^t |f(s,u(s))|ds \\
&\leq M\xi + M\int_0^t p(s)g(\|u\|_\infty)ds \\
&\leq M\xi + M\|p\|_{L^1}g(\rho)=\delta
\end{aligned}$$

Alors, $\|F(u)\|_\infty \leq \delta$. Donc $F(u)\in B_\delta$.

Étape 3 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $\mathcal{C}(J,\mathcal{E})$.

Nous considérons B_ρ comme dans l'étape 2. Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$ avec $\tau_2 > \tau_1$. Ainsi, si $\epsilon > 0$ et $\epsilon \leq \tau_1 \leq \tau_2$ nous avons

$$\begin{aligned}
|F(u)(\tau_2) - F(u)(\tau_1)| &= \bigg| T(\tau_2)\xi + \int_0^{\tau_2} T(\tau_2 - s) f(s, u(s)) ds \\
&\quad - T(\tau_1)\xi - \int_0^{\tau_1} T(\tau_1 - s) f(s, u(s)) ds \bigg| \\
&\leq \bigg| T(\tau_2) - T(\tau_1) \bigg| \xi + \bigg| \int_0^{\tau_2} T(\tau_2 - s) f(s, u(s)) ds \\
&\quad - \int_0^{\tau_1} T(\tau_1 - s) f(s, u(s)) ds \bigg| \\
&\leq \bigg| T(\tau_2) - T(\tau_1) \bigg| \xi + \bigg| \int_0^{\tau_1 - \epsilon} [T(\tau_2 - s) - T(\tau_1 - s)] \\
&\quad f(s, u(s)) ds \bigg| + \bigg| \int_{\tau_1 - \epsilon}^{\tau_1} [T(\tau_2 - s) - T(\tau_1 - s)] f(s, u(s)) ds \bigg| \\
&\quad + \bigg| \int_{\tau_1}^{\tau_2} T(\tau_2 - s) f(s, u(s)) ds \bigg|
\end{aligned}$$

Comme $\tau_1 \to \tau_2$, le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro et puisque $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un opérateur compact fortement continu, ceci implique la continuité uniforme d'opérateurs.

Puisque $F(B_\rho)$ est une famille équicontinue et uniformément borné. On conclut d'après le Théorème d'Arzelá-Ascoli que l'ensemble l'ensemble $\{F(u)(t) : u \in B_\rho\}$ est relativement compact dans $\mathcal{E}$.

Les étapes précédentes impliquent que $F : \mathcal{C}(J, \mathcal{E}) \to \mathcal{C}(J, \mathcal{E})$ est un opérateur complètement continu.

Étape 4 : Estimations à priori des solutions.

Maintenant, il reste à prouver que l'ensemble

$$\eta = \{u \in \mathcal{C}(J, \mathcal{E}) : u = \lambda F(u), 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $u \in \eta$ un élément arbitraire. Alors, pour tout $t \in J$,

$$u(t) = \lambda F(u)(t) \quad = \quad \lambda\Big[T(t)\xi + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big].$$

Alors

$$|u(t)| \quad \leq \quad |T(t)|\xi + \int_0^t |T(t-s)||f(s,u(s))|\,\mathrm{d}s.$$

Il s'ensuit que

$$\|u\|_\infty \quad \leq \quad M\xi + M\int_0^t p(s)g(\|u\|_\infty)\,\mathrm{d}s.$$

On note par :

$$y(t) = M\xi + M\int_0^t p(s)g(\|u\|_\infty)\,\mathrm{d}s,$$

on a :

$$y(0) = M\xi = c, \quad \|u\|_\infty \leq y(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in J.$$

Et

$$\begin{aligned} y'(t) &= M\,p(t)\,g(\|u\|_\infty) \\ &\leq M\,p(t)\,g(y(t)) \end{aligned}$$

car g est croissante, d'où

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{ds}{g(s)} \leq M\int_0^b p(s)ds < \int_c^\infty \frac{ds}{g(s)}, \quad t \in J.$$

Alors il existe une constante l telle que $y(t) \leq l$ pour tout $t \in J$, d'où $\|u\|_\infty \leq l$ pour tout $t \in J$.

Donc l'ensemble η est borné. En conséquence du Théorème 1.4.2. On en déduit que F a un point fixe qui est une solution du problème $(2.1) - (2.2)$. ■

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problème $(2.1) - (2.2)$.

Théorème 2.2.4. *Supposons que les conditions du Théorème 2.2.3 sont vérifiées. Supposons de plus qu'il existe une constante positive k telle que*

$$|f(t,u)-f(t,v)| \;\leq\; k\|u-v\|_\infty, \qquad \textit{pour } t \in J \textit{ et tout } u,v \in \mathcal{C}(J,\mathcal{E}).$$

Alors le problème $(2.1)-(2.2)$ *a une solution unique sur J.*

Preuve. L'existence d'au moins une solution $u(t)$ de problème $(2.1)-(2.2)$ est assurée par le Théorème 2.2.3. Pour prouver l'unicité de $u(t)$, soit $v(t)$ une autre solution du problème $(2.1)-(2.2)$. Alors, pour chaque $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
|u(t)-v(t)| &= \left|\int_0^t T(t-s)[f(s,u(s))-f(s,v(s))]ds\right| \\
&\leq \int_0^t |T(t-s)|\;|f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds \\
&\leq \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\int_0^t \;|f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds \\
&\leq kM\int_0^t \|u-v\|_\infty ds
\end{aligned}$$

Ce qui implique encore

$$\|u-v\|_\infty \;\leq\; kM\int_0^t \|u-v\|_\infty ds.$$

Maintenant, en utilisant le Lemme 2.2.1 de Gronwall avec $C \equiv 0$ on obtient l'unicité de $u(t)$. ■

Chapitre 3

Équations différentielles semi-linéaires avec condition périodique

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de la solution de l'équation semi-linéaire avec condition périodique sous la forme :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in J = [0, b] & (3.1) \\ u(0) = u(b). & (3.2) \end{cases}$$

Où $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ sur un espace de Banach et $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une fonction continue, $u(b) \in \mathcal{E}$.

Lemme 3.1.1. *Si $I \in \rho(T(b))$ alors le problème* $(3.1) - (3.2)$ *admet une solution défini par*

$$u(t) = T(t)(I - T(b))^{-1} \int_0^b T(b-s)f(s, u(s))ds + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))\mathrm{d}s \ \ \forall t \in J.$$

Preuve. La solution du problème $(3.1) - (3.2)$ est défini par

$$u(t) = T(t)u(0) + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))\,\mathrm{d}s,$$

et on a

$$u(b) = T(t)u(0) + \int_0^b T(b-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s.$$

En utilisant la condition (3.2). En effet

$$\begin{aligned} u(0) - T(b)u(0) &= \int_0^b T(b-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s \\ u(0)(I - T(b)) &= \int_0^b T(b-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s \\ u(0) &= (I - T(b))^{-1}\int_0^b T(b-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Donc la solution du problème $(3.1)-(3.2)$ est dennée par

$$u(t) = T(t)(I - T(b))^{-1}\int_0^b T(b-s)f(s,u(s))ds + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))\mathrm{d}s.$$

■

Avant de prouver nos résultats principaux pour ce chapitre, nous donnons la définition de la solution du problème $(3.1)-(3.2)$.

Définition 3.1.1. *Une fonction $u \in \mathcal{C}(J,\mathcal{E})$ est dite solution de problème* $(3.1)-(3.2)$ *si u vérifié l'équation intégrable suivante :*

$$u(t) = T(t)(I - T(b))^{-1}\int_0^b T(b-s)f(s,u(s))ds + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \ \ \forall t \in J.$$

3.2 Résultats Principaux

Premier résultat d'existence est basé sur le principe de contraction de Banach.

Théorème 3.2.1. *Soit $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ continue. supposons que les hypothèses* $(H_1), (H_2)$ *de Théorème* 2.2.1 *sont satisfaites, si*

$$M^*\|T(t)(I - T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} + M^* < 1. \tag{3.3}$$

Où $M^* = kMb$. *Alors il existe une solution unique du problème* $(3.1) - (3.2)$ *sur* J.

Preuve. Transformons le problème $(3.1) - (3.2)$ en un problème de point fixe. On considère l'opérateur $F : \mathcal{C}(J, \mathcal{E}) \to \mathcal{C}(J, \mathcal{E})$ défini par :

$$F(u)(t) = T(t)(I - T(b))^{-1} \int_0^b T(b-s)f(s, u(s))ds + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s)ds.$$

Montrons que F est un opérateur de contraction. En effet, Soient $u, v \in \mathcal{C}(J, \mathcal{E})$, alors pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|F(u)(t) - F(v)(t)| &= \Big| T(t)(I - T(b))^{-1} \int_0^b T(b-s)[f(s, u(s)) - f(s, v(s))]ds \\
&\quad + \int_0^t T(t-s)[f(s, u(s)) - f(s, v(s))]ds \Big| \\
&\leq |T(t)(I - T(b))^{-1}| \int_0^b |T(b-s)| \, |f(s, u(s)) - f(s, v(s))|ds \\
&\quad + \int_0^t |T(t-s)| \, |f(s, u(s)) - f(s, v(s))|ds \\
&\leq \|T(t)(I - T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \\
&\quad \|T(b-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \int_0^b |f(s, u(s)) - f(s, v(s))|ds \\
&\quad + \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \int_0^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))|ds \\
&\leq Mk\|T(t)(I - T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \int_0^b |u(s) - v(s)|ds \\
&\quad + Mk \int_0^t |u(s) - v(s)|ds.
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in J$, nous avons

$$\|F(u) - F(v)\|_\infty \leq Mkb\|T(t)(I - T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\|u - v\|_\infty + Mkb\|u - v\|_\infty,$$

alors

$$\|F(u)-F(v)\|_\infty \leq (M^*\|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}+M^*)\|u-v\|_\infty.$$

Par la condition (3.3) l'opérateur F est une contraction et donc F a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach, qui donne une solution unique au problème $(3.1)-(3.2)$.

Ensuite, nous donnons un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder appliquée aux opérateurs complètement continus. ■

Théorème 3.2.2. *Soit $f: J\times\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ continue. Supposons que les hypothèses $(C_1),(C_2)$ de Théorème 2.2.3 sont satisfaites, avec la condition suivante sont vérifiée :*

(l_1) *Il existe des fonctions $p,q\in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ tel que*

$$|f(t,u)|\leq p(t)+q(t)\|u\|_\infty, \qquad \forall t\in J.$$

Alors le problème $(3.1)-(3.2)$ admet au moins une solution sur J.

Preuve. Transformons le problème $(3.1)-(3.2)$ en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $F:\mathcal{C}(J,\mathcal{E})\to\mathcal{C}(J,\mathcal{E})$ défini comme dans le Théorème 3.2.1. La preuve est donnée en quatre étapes.

Étape 1 : F est continu.

Soit $\{u_n\}$ une suite dans $\mathcal{C}(J,\mathcal{E})$ telle que $u_n\to u$ dans $\mathcal{C}(J,\mathcal{E})$.

Alors pour $t\in J$ on a

$$\begin{aligned}F(u_n)(t)-F(u)(t) &= T(t)(I-T(b))^{-1}\int_0^b T(b-s)[f(s,u_n(s))-f(s,u(s))]ds\\ &\quad+\int_0^t T(t-s)[f(s,u_n(s))-f(s,u(s))]ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|F(u_n)(t)-F(u)(t)| &= \Big|T(t)(I-T(b))^{-1}\int_0^b T(b-s)[f(s,u_n(s))-f(s,u(s))]ds \\
&\quad + \int_0^t T(t-s)[f(s,u_n(s))-f(s,u(s))]ds\Big| \\
&\leq |T(t)(I-T(b))^{-1}|\int_0^b |T(b-s)|\,|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))|ds \\
&\quad + \int_0^t |T(t-s)|\,|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))|ds \\
&\leq \|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \\
&\quad \int_0^b \|T(b-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\,|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))|ds \\
&\quad + \int_0^t \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\,|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))|ds
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|F(u_n)-F(u)\|_\infty &\leq Mb\|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\|f(.,u_{n,.})-f(.,u.)\|_\infty \\
&\quad + Mb\|f(.,u_{n,.})-f(.,u.)\|_\infty,
\end{aligned}$$

par suite

$$\|F(u_n)-F(u)\|_\infty \leq \Big(Mb\|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}+Mb\Big)\|f(.,u_{n,.})-f(.,u.)\|_\infty.$$

Puisque $f(s,.)$ est continue pour tout $t \in J$ et

$$|f(s,u_n(s))-f(s,u(s))| \leq 2\Big(p(s)+q(s)\|u_n-u\|\Big) \to 0 \; lorsque \; n \to \infty.$$

Alors d'après le Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, nous avons

$$\|F(u_n)-F(u)\|_\infty \leq (Mb\|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}+Mb)\|f(.,u_{n,.})-f(.,u.)\|_\infty \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Donc F est continu.

Étape 2 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné dans

$\mathcal{C}(J,\mathcal{E})$.

Pour tout nombre positif ρ, soit

$$B_\rho = \{u \in \mathcal{C}(J,\mathcal{E}) : \|u\|_\infty \leq \rho\}.$$

Alors pour tout ρ, B_ρ est clairement un ensemble borné. Il suffit de montrer que pour tout $\rho > 0$ il existe une constante positive δ telle que pour chaque $y \in B_\rho$ nous avons $F(u) \in B_\delta$. Pour chaque $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
|F(u)(t)| &= \left|T(t)(I-T(b))^{-1}\int_0^b T(b-s)f(s,u(s))ds + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds\right| \\
&\leq |T(t)(I-T(b))^{-1}| \int_0^b |T(b-s)|\,|f(s,u(s))|ds + \int_0^t |T(t-s)||f(s,u(s))|ds \\
&\leq \|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \int_0^b \|T(b-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\,[p(s)+q(s)\|u\|_\infty]ds \\
&\quad + \int_0^t \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\,[p(s)+q(s)\|u\|_\infty]ds \\
&\leq M\|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}(\|p\|_{L^1}+\|q\|_{L^1}\|u\|_\infty) + M(|p\|_{L^1}+\|q\|_{L^1}\|u\|_\infty) \\
&\leq M\|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}(\|p\|_{L^1}+\|q\|_{L^1}\rho) + M(|p\|_{L^1}+\|q\|_{L^1}\rho) = \delta
\end{aligned}$$

Alors, $\|F(u)\|_\infty \leq \delta$. Donc $F(u) \in B_\delta$.

Étape 3 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $\mathcal{C}(J,\mathcal{E})$. Nous considérons B_ρ comme dans l'étape 2. Soient $\tau_1, \tau_2 \in J$ avec $\tau_2 > \tau_1$. Ainsi, si $\epsilon > 0$ et $\epsilon \leq \tau_1 \leq \tau_2$ nous avons

$$\begin{aligned}
|F(u)(\tau_2) - F(u)(\tau_1)| &\leq \left|[T(\tau_2)-T(\tau_1)](I-T(b))^{-1}\int_0^b T(b-s)f(s,u(s))ds\right| \\
&\quad + \left|\int_0^{\tau_1-\epsilon} [T(\tau_2-s)-T(\tau_1-s)]f(s,u(s))ds\right| \\
&\quad + \left|\int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1} [T(\tau_2-s)-T(\tau_1-s)]f(s,u(s))ds\right| \\
&\quad + \left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} T(\tau_2-s)f(s,u(s))ds\right|
\end{aligned}$$

Comme $\tau_1 \to \tau_2$, le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro et puisque $T(t)_{t\geq 0}$ est un opérateur compact fortement continu, ceci implique la continuité uniforme d'opérateurs.

Puisque $F(B_\rho)$ est une famille équicontinue et uniformément borné. On conclut d'après le Théorème d'Arzelá-Ascoli que l'ensemble l'ensemble $\{F(u)(t) : u \in B_\rho\}$ est relativement compact dans $\mathcal{E}$.

Les étapes précédentes impliquent que $F : \mathcal{C}(J, \mathcal{E}) \to \mathcal{C}(J, \mathcal{E})$ est un opérateur complètement continu.

Étape 4 : Estimations à priori des solutions.

Maintenant, il reste à prouver que la deuxième possibilité du Théorème 1.4.2 est fausse. i.e il reste à prouver que l'ensemble

$$\eta = \{u \in \mathcal{C}(J, \mathcal{E}) : u = \lambda F(u), 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $u \in \eta$ un élément arbitraire. Alors, pour tout $t \in J$,

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda F(u)(t) \\ &= \lambda \Big[T(t)(I - T(b))^{-1} \int_0^b T(b-s) f(s, u(s)) ds + \int_0^t T(t-s) f(s, u(s)) ds \Big]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| T(t)(I - T(b))^{-1} \int_0^b T(b-s) f(s, u(s)) ds + \int_0^t T(t-s) f(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq |T(t)(I - T(b))^{-1}| \int_0^b |T(b-s)| \, |f(s, u(s))| ds + \int_0^t |T(t-s)| \, |f(s, u(s))| ds \\ &\leq \|T(t)(I - T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \int_0^b \|T(b-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \, [p(s) + q(s)\|u\|_\infty] ds \\ &\quad + \int_0^t \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \, [p(s) + q(s)\|u\|_\infty] ds \\ &\leq M \|T(t)(I - T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} (\|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1} \|u\|_\infty) + M(|p\|_{L^1} + \|q\|_{L^1} \|u\|_\infty) \end{aligned}$$

tel que :

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty &\leq M\|p\|_{L^1}\Big[\|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}+1\Big]\\ &\quad+\Big[M\|q\|_{L^1}(\|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}+1)\Big]\|u\|_\infty.\end{aligned}$$

D'aprés le lemme 2.2.1 de Gronwall on a : $\|u\|_\infty \leq l$. Donc l'ensemble η est borné. En conséquence du Théorème 1.4.2 on en déduit que F a un point fixe qui est une solution intégrale du problème $(3.1)-(3.2)$. ■

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problème $(3.1)-(3.2)$.

Théorème 3.2.3. *Supposons que les conditions du Théorème 3.2.2 sont vérifiées. Supposons de plus qu'il existe une constante positive k telle que*

$$|f(t,u)-f(t,v)| \;\leq\; k\|u-v\|_\infty, \qquad \textit{pour } t\in J \textit{ et tout } u,v\in\mathcal{C}(J,\mathcal{E}).$$

Alors le problème $(3.1)-(3.2)$ *a une solution unique sur J.*

Preuve. L'existence d'au moins une solution intégrale $u(t)$ de problème $(3.1)-(3.2)$ est assurée par le Théorème 2.2.3. Pour prouver l'unicité de $u(t)$, soit $v(t)$ une autre solution du problème $(3.1)-(3.2)$. Alors, pour chaque $t\in J$, nous avons

$$\begin{aligned}|u(t)-v(t)| &= \Big|T(t)(I-T(b))^{-1}\int_0^b T(b-s)[f(s,u(s))-f(s,v(s))]ds\\ &\quad+\int_0^t T(t-s)[f(s,u(s))-f(s,v(s))]ds\Big|\\ &\leq |T(t)(I-T(b))^{-1}|\int_0^b |T(b-s)|\,|f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds\\ &\quad+\int_0^t |T(t-s)|\,|f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds\\ &\leq \|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\int_0^b \|T(b-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\,|f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds\\ &\quad+\int_0^t \|T(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\,|f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds\\ &\leq Mk\|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}\int_0^b \|u-v\|_\infty ds+Mk\int_0^t \|u-v\|_\infty ds\end{aligned}$$

Ce qui implique encore

$$\|u-v\|_\infty \leq Mk\left[\|T(t)(I-T(b))^{-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})}+1\right]\int_0^b \|u-v\|_\infty ds$$

Maintenant, en utilisant le Lemme 2.2.1 de Gronwall avec $C \equiv 0$ on obtient l'unicité de $u(t)$. ∎

Chapitre 4

Équation différentielle semi-linéaire du second ordre

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le problème à valeur initiale d'équations différentielles semi-linéaires du second ordre, nous nous intéresserons à l'existence et l'unicité de solutions utilisant la théorie de cosinus fortement continue et l'approche du point fixe.

Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in J = [0, b] & (4.1) \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. & (4.2) \end{cases}$$

Où A est le générateur infinitésimal de la famille cosinus fortement continue d'opérateurs linéaires bornés $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ dans l'espace de Banach $\mathcal{E}$ et $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une fonction continue, avec données initiales $u_0, u_1 \in \mathcal{E}$.

Lemme 4.1.1. *Si u est une solution du problème* $(4.1) - (4.2)$ *alors est défier par*

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t \in J.$$

Preuve. On va dérivons la solution $u(t)$ en utilisant la proposition 1.2.5 et nous a donné :

$$u'(t) = AS(t)u_0 + C(t)u_1 + \int_0^t C(t-t)f(s,u(s))ds.$$

Nous dérivons pour la deuxième fois et obtenons ce qui suit :

$$u''(t) = AC(t)u_0 + AS(t)u_1 + C(t-s)f(t,u(t)). \tag{4.3}$$

Nous avons :

$$Au(t) = A\Big[C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big].$$

Et

$$Au(t) + f(t,u(t)) = A\Big[C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s\Big] + f(t,u(t)).$$

Alors :

$$Au(t) + f(t,u(t)) = AC(t)u_0 + AS(t)u_1 + A\int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s + f(t,u(t)),$$

avec la proposition 1.2.5 on a :

$$Au(t) + f(t,u(t)) = AC(t)u_0 + AS(t)u_1 + C(t-s)f(t,u(t)). \tag{4.4}$$

Dans ce dernier, nous observons l'égalité entre les équation 4.4 et 4.3

$$u''(t) = Au(t) + f(t,u(t))$$

Maintenant reste a vérifié les conditions (4.4).

Pour la première condition :

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s.$$

On remplace t par 0 :

$$u(0) = C(0)u_0 + S(0)u_1 + \int_0^0 S(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s.$$

Et à partit de là, nous trouvons :

$$u(0) = u_0.$$

Pour la deuxième condition

$$u'(t) = AS(t)u_0 + C(t)u_1 + \int_0^t c(t-t)f(s,u(s))ds.$$

On remplace t par 0 :

$$u'(0) = AS(0)u_0 + C(0)u_1 + \int_0^0 c(t-t)f(s,u(s))ds.$$

Nous trouvons :

$$u'(0) = u_1.$$

De cela, nous concluons que $u(t)$ est une solution intégrale de problème $(4.1)-(4.2)$. ■

Avant de prouver nos résultats principaux pour ce chapitre, nous donnons la définition de la solution intégrale de problème $(4.1)-(4.2)$.

Définition 4.1.1. *Une fonction $u \in \mathcal{C}^1(J,\mathcal{E})$ est dite solution de problème $(4.1)-(4.2)$ si u vérifié l'équation intégrable suivant :*

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s, \qquad \forall t \in J.$$

4.2 Résultats Principaux

On va donner un premier résultat concernant l'existence et l'unicité de la solution de problème $(4.1)-(4.2)$ en utilisant le théorème de la contraction de Banach.

Théorème 4.2.1. *Soit $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ continue. supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(H_1) $\exists M : M = \sup\{\|S(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} : (t,s) \in J\}$

(H_2) *Il existe une constante positive k telle que*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq k|u-v|, \quad \textit{pour} \quad t \in J \quad \textit{et} \quad u,v \in \mathcal{E}$$

Si

$$kMb < 1. \tag{4.5}$$

Alors il existe une solution unique du problème $(4.1) - (4.2)$ *sur* J.

Preuve. Transformons le problème $(4.1) - (4.2)$ en un problème de point fixe. On considère l'opérateur $F : \mathcal{C}^1(J,\mathcal{E}) \to \mathcal{C}^1(J,\mathcal{E})$ défini par :

$$F(u)(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [0,b]$$

Soient $u,v \in \mathcal{C}^1(J,\mathcal{E})$, alors pour tout $t \in [0,b]$, on a

$$F(u)(t) - F(v)(t) = \int_0^t S(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))]ds$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|F(u)(t) - F(v)(t)| &= \left|\int_0^t S(t-s)[f(s,u(s)) - f(s,v(s))]ds\right| \\
&\leq \int_0^t |S(t-s)|\;|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\leq \|S(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \int_0^t \;|f(s,u(s)) - f(s,v(s))|ds \\
&\leq \|S(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \int_0^t k|u(s) - v(s)|ds
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,b]} |F(u)(t) - F(v)(t)| &\leq Mk \int_0^b \sup_{t\in[0,b]} |u(s) - v(s)|ds \\
\|F(u) - F(v)\|_\infty &\leq kMb\|u - v\|_\infty
\end{aligned}$$

Par la condition (4.5) l'opérateur F est une contraction et donc F a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach, qui est la solution unique au problème (4.1) – (4.2). ∎

Nous donnons un résultat d'existence basé sur l'alternative non linéaire de Leray-Schauder appliquée aux opérateurs complètement continus.

Théorème 4.2.2. *Soit $f : J \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ continue. Supposons que*

(A_1) Il existe des fonctions $p, q \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}_+)$ tel que

$$|f(t,u)| \leq p(t) + q(t)\|u\|_\infty, \qquad \forall t \in J \quad \textit{et pour } u \in \mathcal{E},$$

avec :

$$\begin{aligned} M &= \sup\{\|C(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} : t \in J\} \\ M' &= \sup\{\|S(t)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} : t \in J\} \end{aligned}$$

(A_2) $\{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$ est compact.

Alors le problème (4.1) – (4.2) admet au moins une solution sur J.

Preuve. Transformons le problème (4.1) – (4.2) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $F : \mathcal{C}^1(J, \mathcal{E}) \to \mathcal{C}^1(J, \mathcal{E})$. La preuve est donnée en quatre étapes.

Étape 1 : F est continu.

Soit $\{u_n\}$ une suite dans $\mathcal{C}^1(J, \mathcal{E})$ telle que $u_n \to u$ dans $\mathcal{C}^1(J, \mathcal{E})$.

Alors pour $t \in J$ on a

$$\begin{aligned} |F(u_n)(t) - F(u)(t)| &= \left| \int_0^t S(t-s)\big[f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\big]ds \right| \\ &\leq \int_0^t |S(t-s)||f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|ds \\ &\leq \|S(t-s)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{E})} \int_0^t |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))|ds \end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in J$, nous avons

$$\|F(u_n) - F(u)\|_\infty \leq Mb\|f(.,u_{n,.}) - f(.,u.)\|_\infty$$

Puisque $f(s,.)$ est continue pour tout $t \in J$

$$\|F(u_n) - F(u)\|_\infty \leq Mb\|f(.,u_{n,.}) - f(.,u.)\|_\infty \to 0$$

lorsque $n \to \infty$. Donc F est continu.

Étape 2 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformément borné dans $\mathcal{C}^1(J,\mathcal{E})$. Pour tout nombre positif ρ, soit

$$B_\rho = \{u \in \mathcal{C}^1(J,\mathcal{E}) : \|u\|_\infty \leq \rho\}.$$

Alors pour tout ρ, B_ρ est clairement un ensemble borné. Il suffit de montrer que pour tout $\rho > 0$ il existe une constante positive δ telle que pour chaque $u \in B_\rho$ nous avons $F(u) \in B_\delta$. Pour chaque $t \in J$, nous avons

$$\begin{aligned}
|F(u)(t)| &= \left|C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds\right| \\
&\leq \left|C(t)u_0\right| + \left|S(t)u_1\right| + \int_0^t \left|S(t-s)f(s,u(s))\right|ds \\
&\leq Mu_0 + M'u_1 + M'\int_0^t |f(s,u(s))|ds \\
&\leq Mu_0 + M'u_1 + M'\int_0^t \big(p(s) + q(s)\|u\|_\infty\big)ds \\
&\leq Mu_0 + M'u_1 + M'\big(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\rho\big)\int_0^t ds
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $t \in J$, nous avons

$$\|F(u)\|_\infty \leq Mu_0 + M'u_1 + M'b\big(\|p\|_\infty + \|q\|_\infty\rho\big) = \delta$$

Donc $F(u) \in B_\delta$.

Étape 3 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $\mathcal{C}^1(J,\mathcal{E})$. Nous considérons B_ρ comme dans l'étape 2. Soient $\tau_1, \tau_2 \in J, \tau_2 > \tau_1$. Ainsi, si $\epsilon > 0$ et

$\epsilon \leq \tau_1 \leq \tau_2$ nous avons

$$\begin{aligned}
|F(u)(\tau_2) - F(u)(\tau_1)| &= \Big|C(\tau_2)u_0 + S(\tau_2)u_1 + \int_0^{\tau_2} S(\tau_2 - s)f(s, u(s))ds \\
&\quad -C(\tau_1)u_0 - S(\tau_1)u_1 - \int_0^{\tau_1} S(\tau_1 - s)f(s, u(s))ds\Big| \\
&\leq \Big|[C(\tau_2) - C(\tau_1)]u_0\Big| + \Big|[S(\tau_2) - S(\tau_1)]u_1\Big| \\
&+ \Big|\int_0^{\tau_1} [S(\tau_2 - s) - S(\tau_1 - s)]f(s, y_s)ds\Big| \\
&+ \Big|\int_{\tau_1}^{\tau_2} S(\tau_2 - s)f(s, u(s))ds\Big|
\end{aligned}$$

Comme $\tau_1 \to \tau_2$ et ϵ suffisament petit, le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro et puisque $\{C(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un opérateur compact fortement continu, ceci implique la continuité uniforme d'opérateurs.

Puisque $F(B_\rho)$ est une famille équicontinue et uniformément borné. On conclut d'après le Théorème d'Arzelá-Ascoli que l'ensemble l'ensemble $\{F(u)(t) : u \in B_\rho\}$ est relativement compact dans $\mathcal{E}$.

Les étapes précédentes impliquent que $F : \mathcal{C}^1(J, \mathcal{E}) \to \mathcal{C}^1(J, \mathcal{E})$ est un opérateur complètement continu.

Étape 4 : Estimations à priori des solutions.

Maintenant, il reste à prouver que l'ensemble

$$\eta = \{u \in \mathcal{C}^1(J, \mathcal{E}) : u = \lambda F(u), 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $u \in \eta$ un élément arbitraire. Alors, pour tout $t \in J$,

$$u(t) = \lambda F(u)(t) = \lambda\Big[C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t - s)f(s, u(s))\,\mathrm{d}s\Big].$$

Alors

$$\begin{aligned}
|u(t)| &\leq Mu_0 + M'u_1 + M'\int_0^t |f(s, u(s))|ds \\
&\leq Mu_0 + M'u_1 + M'\int_0^t \big(p(s) + q(s)\|u\|_\infty\big)ds.
\end{aligned}$$

D'aprés le lemme 2.2.1 de Gronwall on a : $\|u\|_\infty \leq l$. Donc l'ensemble η est borné. En conséquence du Théorème 1.4.2 on en déduit que F a un point fixe qui est une solution intégrale du problème $(4.1)-(4.2)$. ∎

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problème $(4.1)-(4.2)$.

Théorème 4.2.3. *Supposons que les conditions du Théorème 4.2.2 sont vérifiées. Supposons de plus qu'il existe une constante positive k telle que*

$$|f(t,u)-f(t,v)| \leq k\|u-v\|_\infty, \qquad \text{pour } t\in J.$$

Alors le problème $(4.1)-(4.2)$ a une solution unique sur J.

Preuve. L'existence d'au moins une solution intégrale $y(t)$ de problème $(4.1)-(4.2)$ est assurée par le Théorème 3.2.2. Pour prouver l'unicité de $u(t)$, soit $v(t)$ une autre solution du problème $(4.1)-(4.2)$. Alors,

$$u(t) = v(t), \qquad t\in J,$$

et pour chaque $t\in J$, nous avons

$$\begin{aligned} |u(t)-v(t)| &= \left|\int_0^t S(t-s)[f(s,u(s))-f(s,v(s))]ds\right| \\ &\leq M'\int_0^t |f(s,u(s))-f(s,v(s))|ds \\ &\leq kM'\int_0^t \|u-v\|_\infty ds. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le Lemme 2.2.1 de Gronwall avec $C\equiv 0$ on obtient l'unicité de $u(t)$. ∎

Conclusion

La théorie du point fixe joue un rôle important dans l'analyse non linéaire et ce rôle réside dans la preuve de l'existence et l'unicité des solutions des différents types des équations.

Dans ce mémoire nous avons considéré le problème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles semi-linéaires première et second ordre dans l'espace de Banach. Ces résultats sont obtenus à l'aide de les théories des C_0-semi-groupes et cosinus fortement continue et théorèmes de points fixes en particulier théorème de Banach et l'alternative non linéaire de type Leray-Schauder.

Bibliographie

[1] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis,* Walter de Gruyter, Berlin, 1985.

[2] H. O. Fattorini, Ordinary differential equations in linear topological spaces. 5(1968), 72-105.

[3] J. A. Goldstein, *Semigroups of Linear Operators and Applications.* Oxford Univ. Press, New York, 1985.

[4] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[5] H. Hille, *E. Functional Analysis and Semi-Groups.* A.M.S., New York, 1948.

[6] Y. Hino and S. Murakami and T. Naito, Functional Differential Equations with Infinite Delay, *Lecture Notes in Mathematics,* 1473, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[7] J. Kisynski, On cosine operator functions and one parameter groupe of operators, *studai math.* 49(1972)pp. 93-105.

[8] E. Laamri, *Mesures et Intégrations, Convolution et Transformé de Fourier des Fonctions.* Dunod 2001.

[9] M. Matos and D. Pereira, On an hyperbolic equation with strong damping, *Funkcial. Ekvac.* 34 (1991). 303-311.

[10] S. K. Ntouyas and P. Tsamatos, Global existence for semilinear evolution equations with nonlocal conditions. *J.Math. Anal. Appl.* 210(1997)pp. 679-687.

[11] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[12] M. Sova, Cosine operator finctions. *Rozprawy Mat.* 49(1966), 1-47.

[13] C. C. Trvis, and C. F. Webb, Second-order differential equations in Banach spaces, proceeding of the international symposium on nonlinear equations in Abstract spaces, *Academic press.* New York, Ny, (1978) pp. 331-361.

[14] C. C. Trvis, and C. F. Webb, Cosine families and Abstract nonlinear second-order differential equations, *Acta. Math. Hungarica,* Vol. 32(1978) pp. 75-96.

[15] I. I. Vrabie, C_0-*Semigroups and Applications*, Elsevier, New York, 2003.

[16] K. Yosida, *Functional analsis*, 6^{th} end. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[17] Y. Yosida, K. On the différentiabilité and the représentation of one-paramètre semi-groupes of linear operators. *J. Math. Soc. Japan,* **1**(1948), 15-21.

[18] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Applications. Fixed Point Theorems.* Springer-Verlag, New York. 1986.