République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présenté par :

ABDALLAH Sihem

Étude des équations différentielles par la méthode de Sous et sur solutions

Encadreur :

Amin BENAISSA CHERIF

Maitre Conférence "A" à USTO-Oran.

Soutenu le 02/06/2019

Devant le jury composé de :

Président :	Mr. Khiar Hamid	M.C.B	C.U.B.B.A.T
Examinateur :	Mme. Mekhalfi Kheira	M.C.B	C.U.B.B.A.T
Encadreur :	Mr. Benaissa Cherif Amin	M.C.A	U.S.T.O.M.B

Année Universitaire : 2018 – 2019

Remerciements

*Tout d'abord je tiens à remercier "*ALLAH*" pour tout ce qui m'a été donné de force , courage et surtout de connaissances a fin d'accomplir ce travail modeste.*

Je tiens à exprimer toute ma profonde reconnaissance à mon Encadreur Monsieur A.BENAISSA CHERIF *qui a proposé le thème de ce mémoire et pour ses conseils et ses dirigés du début à la fin de ce travail.*

Mes remerciements vont également à Monsieur H.KHIAR *d'avoir accepté d'être président de jury de cette mémoire.*

Mes remerciements vont aussi à Mme K. MEKHALFI *pour sa participation au jury.*

Je voudrais remercier tout les professeurs des mathématique a centre universitaire BELHADJ BOUCHAIB *Ain Temouchent.*

Pour finir , il est important pour moi de remercier ma famille : mes parents , mes frères, mes cousines, et tout mes amies qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.

Dédicaces

Ce travail modeste est dédié :

À ma belle mère,

À mon cher père,

À tous mes proches de la famille ABDALLAH *et plus particulièrement mes frères :*

SOUFIANE , ILYES , KHALED *et* FARES,

À tout mes chers amis,

Et à tous ce qui ont enseigné moi au long de ma vie scolaire .

Table des matières

Introduction générale

Les équations différentielles jouent un rôle important en mathématiques et plus particulièrement en dynamique de population ,en physique, en électronique, en électrodynamique, en biomathématique, ...

Les résultats d'existence et unicité des solutions des équations différentielles ordinaire (EDO) ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche .

Plusieurs auteurs ont travaillé sur les équations différentielles et leur différent applications, on cite à titre d'exemple les auteurs : Euler, Cauchy, Jean-Pierre,.....

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre divers problèmes le plus souvent représentée par des (EDO), nous citerons par exemple les méthodes Variationnelles, la méthode du Degré Topologique, la méthode de Point Fixe, et la méthode de Sous et Sur solutions.

Dans ce mémoire, en utilisant la méthode des sous et sur solutions pour étudier l'existence des solutions du problèmes aux limites non linéaires du premier ordre.

La méthode de sous et sur solution qui a été introduit par Picard en 1890 pour l'équation aux dérivés partielles (EDP), en 1893 pour les équation différentielles ordinaires qui a utilisé des itérations monotones pour la sur solution. C 'est le point de départ d'utilisation de la sous et sur solution par les méthodes itératives.

Ce mémoire est réparti en trois chapitres.

Le premier chapitre intitulé "Préliminaires" est consacré aux définitions, Théorèmes et autre résultats auxiliaires utilisé dans ce mémoire.

Le deuxième chapitre a pour étudier l'existence des solutions du problème aux limites pour les équations non linéaire du premier ordre par la méthode de sous et sur solution, donnée par :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T] \\ g(u(0), u(T)) = 0. \end{cases}$$

Où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ des fonctions continues.

Ce problème à été présenté par D. Franco et al.[2].

Le troisième chapitre, en utilisant la méthode de sous et sur solution pour l'existence des solution de problème aux limites non linéaire dans l'ordre inverse, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t), u(\theta(t)), & t \in [0, T], \\ g(u(0)) = u(T). \end{cases}$$

Où $T > 0$ et $f \in \mathcal{C}(([0, T] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$, $\theta \in \mathcal{C}([0, T], [0, T])$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Ce chapitre est basé sur les travaux de W.Wang et al.[6].

Mots clé :

Equations différentielles ordinaires, Problèmes aux limites, sous-solutions, sur-solutions, Points fixes.

Notation générale

$\mathbb{R}$	: ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	: ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^n$	: espace euclidien de dimension n
$\|.\|$	: norme
$\overline{\Omega}$	: fermeture de Ω
$\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$	: espace des fonctions continues sur $[0,T]$, avec $T>0$.
$\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R})$	: l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ qui nuls au point 0.
$\mathcal{C}^n([0,T],\mathbb{R})$	: espace des fonctions dérivables jusqu'à l'ordre n.
$\mathcal{C}(X,Y)$	: espace des applications linéaires continues de X dans Y .
f^{-1}	: fonction réciproque de f.

Chapitre 1

Préliminaire

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions, notions et résultats d'analyse fonctionnelle(espaces, opérateurs,...) et quelques théorèmes de point fixe qui nous seront utiles dans les autres chapitres.

1.1 Espaces vectoriels normé

Cette section est consacrée à quelques définitions sur les espaces vectoriels normé. On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1.1.1 (Espace normé)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle une norme sur E tout application $N : E \to \mathbb{R}^+$ telle que*

(i) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$

(iii) $\forall x, y \in E : N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

Une norme est généralement notée $\|.\|$ et la couple $(E, \|.\|)$ est dit espace vectoriel normé.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.1. *On définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ de la maniérer suivantes*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Définition 1.1.2 (Suites convergentes)**.** $(E.\|.\|)$ *un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *converge dans* E *s'il existe* $x \in E$ *telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_0 \quad \textit{implique} \quad \|x_n - x\| \leq \varepsilon.$$

On écrit alors $x_n \to x$ *ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge si elle ne converge pas.*

Définition 1.1.3 (Suitede Cauchy)**.** *Soit* $(E.\|.\|)$ *un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *est une suite de Cauchy si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$m, n \geq n_0 \quad \textit{implique} \quad \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.4 (Espaces de Banach)**.** *Un espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *est appelé espace de Banach , si tout suit de Cauchy converge dans* E.

Exemple 1.1.2. *L'espace* $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *est espace de Banach.*

Remarque 1.1.1.

i) l'espace $\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$ *est un sous espace fermé dans* $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$.

ii) l'espace $\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R})$ *est espace de Banach.*

iii) On a $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}) = \mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$.

Lemme 1.1.1 (Produit de deux espaces)**.** *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $((F, \|.\|_F)$ *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés.*
Pour $(x, y) \in E \times F$, *on pose*

$$N(x, y) := \max\left\{\|x\|_E, \|y\|_F\right\}.$$

Alors, N *est une norme sur* $E \times F$.

Proposition 1.1.1. *Soient* $(E, \|.\|_E)$*et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces vectoriels normés. Soit* $\mathcal{F} : E \to F$ *une application linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

i) L'application $\mathcal{F}$ *est continue sur* E.

ii) L'application est $\mathcal{F}$ *est continue en* 0.

iii) Il existe $M > 0$, *telle que* $\|\mathcal{F}(x)\|_F \leq M \|x\|_E$, *pour tout* $x \in E$.

1.2 Introduction à l'Analyse Fonctionnelle

Dans la suite $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ désignent des espaces de Banach.

Définition 1.2.1. *On dit qu'une partie* A *de* $(E, \|.\|_E)$ *est bornée s'il existe une boule fermée* $\overline{B}(a, r)$ *telle que* $A \subset \overline{B}(a, r)$ *i.e.*

$$\exists r > 0, \qquad \exists a \in E, \qquad A \subset \overline{B}(a, r).$$

Où

$$\exists r > 0, \qquad A \subset \overline{B}(0, r).$$

Définition 1.2.2. *Soit* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *une application. On dit que* $\mathcal{F}$ *est bornée si elle envoie les parties bornées de* E *sur des parties bornées de* F *i.e.* $\mathcal{F}$ *(bornée) est bornée.*

Remarque 1.2.1. *Soit* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *une application bornée, i.e, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *tel que*

$$\textit{pour tout } x \in E : \|x\|_E \leq \varepsilon \qquad \textit{implique} \qquad \|\mathcal{F}(x)\|_F \leq \delta.$$

Définition 1.2.3. *Soient* $a \in E$ *et* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$. *On dit que* $\mathcal{F}$ *est continue au point* a *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$, *pour* $x \in E$, *on a*

$$\|x - a\|_E < \delta \qquad \textit{implique} \qquad \|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(a)\| < \varepsilon.$$

Définition 1.2.4. *On dit que* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est* $k-$*lipschitzienne si,* *pour tout* $x, y \in E$, *on a*

$$\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E .$$

Lorsque $k < 1$, *on dira que* $\mathcal{F}$ *est contractante.*

Proposition 1.2.1. *Une application* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est continue au point* x, *si et seulement si pour tout suite* $(x_n)_n$ *converge vers* x *dans* E, *alors* $(\mathcal{F}(x_n))_n$ *converge vers* $\mathcal{F}(x)$ *dans* F.

Définition 1.2.5. *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *Un ensemble* $M \subset E$ *est dit convexe si*

$$\forall u, v \in M, \qquad \forall \lambda \in [0, 1], \qquad \text{on a} \qquad \lambda u + (1 - \lambda)v \in M.$$

Définition 1.2.6. *Un ensemble* M *est relativement compact si* $\overline{M}$ *est compact.*

Définition 1.2.7. *Soient* $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach. L'application* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est dite compacte si :*

i) $\mathcal{F}$ *est continue sur* E.

ii) $\mathcal{F}(E)$ *est relativement compact dans* F.

Définition 1.2.8. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *deux espaces de Banach. L'application* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *est dite complètement continue si :*

i) $\mathcal{F}$ *est continue sur* E.

ii) Pour tout sous-ensemble borné A *de* E, *implique que* $\mathcal{F}(A)$ *est relativement compacte dans* F.

1.3 Théorèmes du point fixe

Définition 1.3.1. *Soit* $\mathcal{F} : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *une application. Un élément* x_0 *de* E *est dit point fixe de* $\mathcal{F}$ *si :*

$$\mathcal{F}x_0 = x_0.$$

Théorème d'Arzéla-Ascoli

Définition 1.3.2 (Equicontinuité). *Soit* $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ *espaces normés et* $\mathcal{H}$ *une partie de* $\mathcal{C}(E, F)$. *On dira que* $\mathcal{H}$ *est équicontinue en* x_0 *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$, *tel que*

$$\forall x \in E, \quad \|x - x_0\|_E < \eta \qquad \textit{implique} \qquad \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{H}.$$

On dira que $\mathcal{H}$ *est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de* E.

Remarque 1.3.1. *Le point important,* η *ne dépend pas de* f.

Théorème 1.3.1 (Arzéla-Ascoli). *[5]Soit* K *un sous-ensemble compact dans* E *et* $(F, \|.\|_F)$ *un espace de Banach. Soit* $\mathcal{H}$ *une partie de* $\mathcal{C}(K, F)$. *Alors,* $\mathcal{H}$ *est relativement compacte dans* $\mathcal{C}(K, F)$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i) $\mathcal{H}$ *est équicontinue*

ii) $\forall x \in K$, $H_x = \{f(x) : f \in \mathcal{H}\}$ *est relativement compacte dans* F.

Théorème du point fixe de type Leray Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.3.2 (Schauder). *[1] Soit* M *un sous-ensemble de* E *fermé et convexe et* $\mathcal{F} : M \to M$ *une application continue telle que* $\mathcal{F}(M)$ *est relativement compact. Alors* $\mathcal{F}$ *possède un point fixe.*
Plus généralement, si M *est un compact convexe alors toute fonction continue de* M *sur* M *possède un point fixe.*

Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.3.3 (Principe de contraction de Banach). *[1] Soit* $(E, \| . \|_E)$ *un espace de Banach et* $\mathcal{F} : E \to E$ *une contraction, s'il existe* $0 < k < 1$, *tel que :*

$$\forall y_1, y_2 \in E, \qquad \|\mathcal{F}(y_1) - \mathcal{F}(y_2)\|_E \leq k \|y_1 - y_2\|_E\,,$$

alors l'opérateur $\mathcal{F}$ admet un point fixe unique $x \in E$.

Chapitre 2

Théorèmes d'existence pour les problèmes aux limites non linéaires du premier ordre

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'existence des solutions de l'équation non linéaire en utilisant la méthode de sous et sur solution, on considère le problème suivant :

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad t \in [0, T]. \tag{2.1}$$

Avec $T > 0$. Satisfaisant la condition :

$$g(u(0), u(T)) = 0. \tag{2.2}$$

Où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Remarque 2.1.1.

i) Si $g(x, y) = x - c$, avec $c \in \mathbb{R}$, la condition initiale (2.2) est devient

$$u(0) = c. \tag{2.3}$$

ii) *Si* $g(x,y) = x - y$, *la condition initiale* (2.2) *est devient la condition périodique :*

$$u(0) = u(T). \tag{2.4}$$

iii) *Si* $g(x,y) = x + y$, *la condition initiale* (2.2) *est devient la condition antipériodiques*

$$u(0) = -u(T). \tag{2.5}$$

Définition 2.1.1. *[2]Nous disons qu'une fonction* $\alpha \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$ *est une sous-solution de l'équation* (2.1) *si :*

$$\alpha^{'}(t) \leq f(t, \alpha(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

Et nous disons que $\beta \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$ *est une sur-solution de* (2.1) *si :*

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

Avec

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

ou :

$$\beta(t) \leq \alpha(t), \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

Notation 2.1.1. *Pour* $u, v \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$, *tel que*

$$u\left(t\right) \leq v\left(t\right), \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

On définit l'ensemble :

$$[u,v] = \{w \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}) : u(t) \leq w(t) \leq v(t), \textit{ pour tout } t \in [0,T]\}.$$

2.2 Lemmes fondamentaux

Remarque 2.2.1. *L'espaces* $\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ *est un espace de Banach pour la norme de produit de deux espaces, i.e, pour tout* $(u,\lambda)\in\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R})\times\mathbb{R}$*, on a*

$$\|(u,\lambda)\| = \max\left\{\|u\|_\infty, |\lambda|\right\}.$$

Lemme 2.2.1. *[2]Soient* λ, a *et* b *sont des constants réels. L'opérateur suivant* $L:\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})\to\mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R})\times\mathbb{R}$ *défini par :*

$$[Lu](t) = \left(u(t)-u(0)+\lambda\int_0^t u(s)ds, au(0)+bu(T)\right), \text{ pour tout } t\in[0,T].$$

est continue.

Démonstration.
Il est claire que l'application L est linéaire. En appliquons la condition (iii) de la proposition 1.1.1 pour montre la continuité. On a

$$\left|u(t)-u(0)+\lambda\int_0^t u(s)ds\right| \leq (2+|\lambda|T)\|u\|_\infty, \text{ pour tout } t\in[0,T].$$

Et

$$|au(0)+bu(T)| \leq (|a|+|b|)\|u\|_\infty.$$

Alors

$$\begin{aligned}\|Lu\| &= \max\left((2+|\lambda|T)\|u\|_\infty, (|a|+|b|)\|u\|_\infty\right)\\ &= \max\left\{2+|\lambda|T, |a|+|b|\right\}\|u\|_\infty.\end{aligned}$$

d'où $M=\max\left\{2+|\lambda|T, |a|+|b|\right\}$.Par conséquent L est continue. □

Lemme 2.2.2. *[2]Si* $a+be^{-\lambda T}\neq 0$*, alors l'opérateur* L *est inversible, et son inverse est*

$$[L^{-1}(y,\gamma)](t) = e^{-\lambda t}A + y(t) - \lambda\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}y(s)ds.$$

Avec

$$A = \frac{\gamma + b\lambda\int_0^T e^{-\lambda(T-s)}y(s)ds - by(T)}{a+be^{-\lambda T}}.$$

Démonstration.

Étape 1 **:** (L est injective).

Comme L est application linéaire, il suffit de montrer que $\ker L = \{u \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}) : Lu = 0\} = \{0\}$. En effet

$$Lu = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{P}) : \begin{cases} u(t) - u(0) + \lambda \int_0^t u(s)ds = 0, \text{ pour tout } t \in [0,T], \\ au(0) + bu(T) = 0. \end{cases}$$

La solution à ce problème est équivalent

$$\begin{cases} u'(t) = -\lambda u(t), \text{ pour tout } t \in (0,T), \\ au(0) + bu(T) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Alors la solution de (2.6) est donnée par :

$$u(t) = ce^{-\lambda t}, \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Avec $c \in \mathbb{R}$, d'autre part, on a

$$0 = au(0) + bu(T) = c\left(a + be^{-\lambda T}\right).$$

Comme $a + be^{-\lambda T} \neq 0$, alors $c = 0$, donc la solution est nulle.

Par conséquent L est injective.

Étape 2 **:**(L est surjective).

Pour montrer que L est surjective, il suffit de montrer, pour tout $(y,\gamma) \in \mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, l'éqution $Lu = (y,\gamma)$ admet au moin une solution dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$. En effet, soit $u^* : [0,T] \to \mathbb{R}$ défini par :

$$u^*(t) = e^{-\lambda t}A + y(t) - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}y(s)ds, \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Maintenent, montrons que $Lu^* = (y,\gamma)$. Puisque $y \in \mathcal{C}_0([0,T],\mathbb{R})$, alors $y(0) = 0$, donc

$$u^*(0) = A + y(0) = A. \tag{2.7}$$

Part intégration par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
\lambda \int_0^t u^*(s)ds &= A\left(1-e^{-\lambda t}\right) + \lambda \int_0^t y(s)ds - \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda s}\left(\int_0^s e^{\lambda \tau} y(\tau)d\tau\right) ds \\
&= A\left(1-e^{-\lambda t}\right) + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda \tau} y(\tau)d\tau \\
&= A - Ae^{-\lambda t} + \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} y(\tau)d\tau, \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$au(0) + bu(T) = A\left(a + be^{-\lambda T}\right) + by(T) - b\lambda \int_0^T e^{-\lambda(T-s)} y(s)ds = \gamma. \qquad (2.9)$$

Par (2.7), (2.8) et (2.9), on obtient $Lu^* = (y, \gamma)$, d'où L est surjective.

Étape 3 **:** (L est continue).

En effet, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
\left|L^{-1}(y,\gamma)(t)\right| &= \left|Ae^{-\lambda t} + y(t) - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} y(s)ds\right| \\
&\leq |A| + (1 + |\lambda| T) \|y\|_\infty \\
&\leq \frac{|\gamma|}{|a+be^{-\lambda T}|} + \frac{1}{|a+be^{-\lambda T}|}\left|b\lambda \int_0^T e^{-\lambda(T-s)} y(s)ds - by(T)\right| + (1 + |\lambda| T) \|y\|_\infty \\
&\leq C_1 |\gamma| + C_2 \|y\|_\infty .
\end{aligned}$$

Avec

$$C_1 := \frac{1}{|a+be^{-\lambda T}|} \qquad \text{et} \qquad C_2 := \left(\frac{|b|}{|a+be^{-\lambda T}|} + 1\right)(1 + |\lambda| T) .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left\|L^{-1}(y,\gamma)\right\|_\infty &\leq C_1 |\gamma| + C_2 \|y\|_\infty \\
&\leq (C_1 + C_2) \max\left(|\gamma|, \|y\|_\infty\right) \\
&= (C_1 + C_2) \|(y,\gamma)\| .
\end{aligned}$$

Ce qui nous convainc de la continuité de L^{-1}. $\square$

2.3 Les sous-solutions et les sur-solutions

Définition 2.3.1. *[2]S'il existe α sous-solution et β sur-solution de (2.1). pour tout $\lambda > 0$, on définit le problème modifié suivant*

$$\begin{cases} u'(t) + \lambda u(t) = F^*(t, u(t)), & \textit{pour tout } t \in [0, T], \\ u(0) = g^*(u(0), u(T)). \end{cases} \tag{2.10}$$

où

$$F^*(t, u) = \begin{cases} f(t, \beta(t)) + \lambda\beta(t), & \textit{si } \beta(t) < u, \\ f(t, u) + \lambda u, & \textit{si } \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), \\ f(t, \alpha(t)) + \lambda\alpha(t), & \textit{si } u \geq \alpha(t), \end{cases}$$

$$g^*(x, y) := p(0, x) - g(p(0, x), p(T, y)), \qquad \textit{pour tout } x, y \in \mathbb{R},$$

et

$$p(t, x) = \max\{\alpha(t), \min\{x, \beta(t)\}\}, \qquad \textit{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Définition 2.3.2. *[2]S'il existe α sous-solution et β sur-solution de (2.1). Définissons l'opérateur $N_1 : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0([0, T], \mathbb{R})$ par :*

$$[N_1 u](t) = \int_0^t F^*(s, u(s))ds, \quad \textit{pour tout } t \in [0, T].$$

Proposition 2.3.1. *S'il existe α sous-solution et β sur-solution de (2.1). L'opérateur $N_1 : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0([0, T], \mathbb{R})$ est compact.*

Démonstration.

Montrons tout d'abord la continuité de l'opérateur.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ convergeant vers u dans $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} &F^*(s, u_n(s)) - F^*(s, u(s)) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } \beta(s) < u, \beta(s) < u_n \text{ ou } \alpha(s) > u, \alpha(s) > u_n, \\ f(s, u_n) - f(t, u) + \lambda(u_n - u), & \text{si } \alpha(s) \leq u \leq \beta(s) \text{ et } \alpha(s) \leq u_n \leq \beta(s), \\ f(s, u_n) - f(s, \beta(s)) + \lambda(u_n - \beta(s)), & \text{si } \alpha(s) \leq u_n \leq \beta(s) \text{ et } \beta(s) < u, \\ f(s, u_n) - f(s, \alpha(s)) + \lambda(u_n - \alpha(s)), & \text{si } \alpha(s) \leq u_n \leq \beta(s) \text{ et } u < \alpha(s), \\ f(s, \beta(s)) - f(s, \alpha(s)) + \lambda(\beta(s) - \alpha(s)), & \text{si } \beta(s) < u_n \text{ et } \alpha(s) > u. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, pour tout $s \in [0,T]$, on a

$$|F^*(s,u_n(s)) - F^*(s,u(s))| \leq |f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))| + \lambda|u_n(s) - u(s)|. \quad (2.11)$$

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné, c'est-à-dire, il existe $r > 0$, tel que

$$\|u_n\| \leq r, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, f est uniformément continue sur $[0,T] \times [-r,r]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2\lambda T}$, tel que pour tous $t_1, t_2 \in [0,T]$ et $u_1, u_2 \in [-r,r]$, on a

$$|t_1 - t_2| < \delta, \quad |u_1 - u_2| < \delta \quad \text{implique} \quad |f(t_1,u_1) - f(t_2,u_2)| < \frac{\varepsilon}{2T}. \quad (2.12)$$

Par la définition de la converge de suite dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq n_0$, on

$$|u_n(t) - u(t)| \leq \delta, \qquad \text{pour tout } t \in [0,T]. \quad (2.13)$$

Par (2.11), (2.12) et (2.13), on trouve

$$|F^*(s,u_n(s)) - F^*(s,u(s))| \leq \frac{\varepsilon}{T}.$$

Alors, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned}
|N_1u_n(t) - N_1u(t)| &= \left| \int_0^t F^*(s,u_n(s))ds - \int_0^t F^*(s,u(s))ds \right| \\
&\leq \int_0^t |F^*(s,u_n(s)) - F^*(s,u(s))|\, ds \\
&\leq \int_0^T |F^*(s,u_n(s)) - F^*(s,u(s))|\, ds \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\text{pour tout } n \geq 0 : \|N_1u_n - N_1u\| \leq \varepsilon.$$

On conclure que :

$$\lim_{n\to\infty} \|N_1u_n - N_1u\| = 0,$$

D'où la continuité de N_1.

Montrons que N_1 envoie touts ensembles bornés en ensemble uniformément borné dans $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$.

En effet ,il suffit de montrer pour tout $r>0$, il existe une constante positive $M>0$, tel que pour tout $u\in\overline{B}(0,r)=\{u\in\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}):\|u\|_\infty\leq r\}$, on obtient $\|N_1u\|\leq M$.

Par définition de F^*, on a

$$|F^*(t,u)|\leq\begin{cases}|f(t,\beta(t))|+\lambda|\beta(t)|, & \text{si } \beta(t)<u,\\ |f(t,u)|+\lambda|u|, & \text{si } \alpha(t)\leq u\leq\beta(t),\\ |f(t,\alpha(t))|+\lambda|\alpha(t)|, & \text{si } u<\alpha(t).\end{cases}\tag{2.14}$$

Comme $\beta,\alpha\in\mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$, alors il existe $C\in\mathbb{R}$, tel que

$$-C\leq\beta\left(t\right)\leq C\quad\text{et}\quad-C\leq\alpha\left(t\right)\leq C,\quad\text{pour tout } t\in[0,T].$$

Ainsi, $[0,T]\times[-C,C]$ est un ensemble compact et f étant continue sur $[0,T]\times[-C,C]$, nous pouvons déduire l'existence d'une constante $A>0$, telle que

$$|f(t,u)|\leq A,\qquad\text{pour tout }\ (t,u)\in[0,T]\times[-C,C].\tag{2.15}$$

Par (2.14) and (2.15), nous avons

$$|F^*(t,u)|\leq A+\lambda C,\qquad\text{pour tout } t\in[0,T].\tag{2.16}$$

Donc

$$\begin{aligned}|N_1u(t)|&=\left|\int_0^T F^*(s,u(s))ds\right|\leq\int_0^T|F^*(s,u(s))|ds\\&\leq T\left(A+\lambda C\right).\end{aligned}$$

d'où $\|N_1u\|\leq T\left(A+\lambda C\right):=M$.

L'opérateur N_1 envoie tout ensembles bornés en ensemble équicontinue de $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$.

En effet ,il suffit de montrer pour tout $r>0$, $N_1(\overline{B}(0,r))=\{N_1u:\|u\|_\infty\leq r\}$ est équicontinue.

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
|N_1 u(t_1) - N_1 u(t_2)| &= \left| \int_0^{t_1} F^*(s, u(s))ds - \int_0^{t_2} F^*(s, u(s))ds \right| \\
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} F^*(s, u(s))ds \right| \\
&\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} |F^*(s, u(s))| \, ds \right|.
\end{aligned}$$

Comme $\|u\|_\infty \leq r$, alors par (2.16), nous avons

$$\begin{aligned}
|N_1 u(t_1) - N_1 u(t_2)| &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} |F^*(s, u(s))| \, ds \right| \\
&\leq (A + \lambda C) \, |t_1 - t_2| \\
&= k |t_1 - t_2|.
\end{aligned}$$

Avec $k = A + \lambda C$. Alors les fonctions de $N_1(\overline{B}(0, r))$ sont k-lipschitzienne. Donc, l'ensemble $N_1(\overline{B}(0, r))$ est équicontinue.
Par le Théorème d'Arzelé-Ascolie, on obtient que l'ensemble $N_1(\overline{B}(0, r))$ est relativement compacte. Ainsi, $N_1 : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0([0, T], \mathbb{R})$ est compacte. □

Définition 2.3.3. *[2]S'il existe α sous-solution et β sur-solutions de* (2.1)*. Définissons l'opérateur $N_2 : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par :*

$$N_2 u = g^*(u(0) - u(T)).$$

Remarque 2.3.1. *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite converge vers x dans $\mathbb{R}$ et soit $y \in \mathbb{R}$, on a*

i) la suite $\min(x_n, y)$ converge vers $\min(x, y)$ dans $\mathbb{R}$.

ii) la suite $\max(x_n, y)$ converge vers $\max(x, y)$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.3.2. *[2]S'il existe α sous-solution et β sur-solutions de* (2.1)*. L'opérateur $N_2 : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration.
Étape 1 : (N_2 est continue).
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ convergent vers u dans $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$.

En déduire que $u_n(0) \to u(0)$ et $u_n(T) \to u(T)$ dans $\mathbb{R}$.

Par la remarque prétendent, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} p(0, u_n(0)) = \lim_{n\to\infty} \max\{\alpha(0), \min\{u_n(0), \beta(0)\}\} = p(0, u(0)), \tag{2.17}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} p(T, u_n(T)) = \lim_{n\to\infty} \max\{\alpha(T), \min\{u_n(T), \beta(T)\}\} = p(T, u(T)).$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left(p(0, u_n(0)), p(T, u_n(T))\right) = \left(p(0, u(0)), p(T, u(T))\right).$$

Par l'hypothèse, on a g étant fonction continue sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$\lim_{n\to\infty} g(p(0, u_n(0)), p(T, u_n(T))) = g(p(0, u(0)), p(T, u(T))). \tag{2.18}$$

Par (2.17) et (2.18) , nous avons

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} g^*(u_n(0), u_n(T)) &= \lim_{n\to\infty} \left[p(0, u_n(0)) - g(p(0, u_n(0)), p(T, u_n(T)))\right] \\
&= g^*(u(0), u(T)).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $(N_2 u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(N_2 u)$ dans $\mathbb{R}$. D'où la continuité de N_2.

D'autre part, comme l'image de l'opérateur N_2 dans $\mathbb{R}$ et N_2 continue, alors N_2 est compact. □

Définition 2.3.4. *[2]S'il existe α sous-solution et β sur-solution de* (2.1)*. Définissons l'opérateur $N : \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0([0,T], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ par :*

$$[Nu](t) = \left([N_1 u](t), Nu_2\right).$$

Corollaire 2.3.1. *[2]S'il existe α sous-solution et β sur-solution de* (2.1)*. L'opérateur $N : \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0([0,T], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ est compact.*

Démonstration.

Par les proposition 2.3.1 et 2.3.2, en déduire que L'opérateur N est compact. □

Théorème 2.3.1. *[2]S'il existe α sous-solution et β sur-solution de* (2.1) $-$ (2.2)*. Supposons que*

(H_1) *Les fonctions* $h_\alpha(x) = g(\alpha(0), x)$ *et* $h_\beta(x) = g(\beta(0), x)$ *sont monotones sur* $[\alpha(T), \beta(T)]$.

(H_2) $\max\{g(\alpha(0), \alpha(T)), g(\alpha(0), \beta(T))\} \leq 0 \leq \min\{g(\beta(0), \beta(T)), g(\beta(0), \alpha(T))\}$.

Alors le problème (2.1)-(2.2) *posséde une solution* $u \in [\alpha, \beta]$.

Démonstration.

Si le problème (2.10) admet une solution $u \in [\alpha, \beta]$, alors u est une solution de (2.1) − (2.2).

Car, si u est solution de (2.10), telle que $u \in [\alpha, \beta]$, alors

$$F^*(t, u(t)) = f(t, u(t)) + \lambda u(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

donc

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

Comme $u \in [\alpha, \beta]$, alors $\alpha(0) \leq u(0) \leq \beta(0)$ et $\alpha(T) \leq u(T) \leq \beta(T)$, nous avons

$$p(0, u(0)) = u(0) \qquad \text{et} \qquad p(T, u(T)) = u(T),$$

donc

$$\begin{aligned} g^*(u(0), u(T)) &= p(0, u(0)) - g(p(0, u(0)), p(T, u(T))) \\ &= u(0) - g(u(0), u(T)). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Comme $g^*(u(0), u(T)) = u(0)$, par (2.19), on trouve :

$$g(u(0), u(T)) = u(0) - u(0) = 0.$$

Ce qui montre que u est une solution de (2.1) − (2.2).

Soit l'opérateur $L : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0([0, T], \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ défini par :

$$[Lu](t) = \left(u(t) - u(0) + \lambda \int_0^t u(s)ds, u(0)\right), \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

D'après le lemme 2.2.2, avec $a = 1$ et $b = 0$, en déduire que L^{-1} existe et continue. Comme l'opérateur N est compact, alors $L^{-1} \circ N : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ est continue et compact.

Ainsi, par le Théoréme de point fixe de Schauder, $L^{-1} \circ N$ admet un point fixe.

C'est-à-dire, il existe au mois $u \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$, tel que

$$Nu = Lu \Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^t F^*(s,u(s))ds = u(t) - u(0) + \lambda \int_0^t u(s)ds, \text{ pour tout } t \in [0,T], \\ g^*(u(0),u(T)) = u(0). \end{cases}$$

Par dérivation, on trouver le problème (2.10).

Il reste à montrer que $u \in [\alpha,\beta]$, c'est-à-dire

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Montrons que $u(t) - \beta(t) \leq 0$,pour tout $t \in [0,T]$. Supposons l'inverse, c'est-à-dire $t^* \in [0,T]$, tel que $u(t^*) - \beta(t^*) > 0$, alors il existe un $s_0 \in [0,T]$, tel quel

$$u(s_0) - \beta(s_0) = \max_{t\in[0,T]} (u(t) - \beta(t)) > 0.$$

On considérer trois cas :

Si $s_0 \in (0,T]$, alors il existe $\tau \in (0,s_0)$ tel que :

$$0 \leq u(t) - \beta(t) \leq u(s_0) - \beta(s_0), \qquad \text{pour tout } t \in [\tau, s_0].$$

Alors

$$\begin{aligned} \beta(s_0) - \beta(\tau) &\leq u(s_0) - u(\tau) = \int_\tau^{s_0} u'(s)\,ds \\ &= \int_\tau^{s_0} [f(s,\beta(s)) - \lambda(u(s) - \beta(s))]ds \\ &< \int_\tau^{s_0} f(s,\beta(s))ds \\ &\leq \int_\tau^{s_0} \beta'(s)\,ds = \beta(s_0) - \beta(\tau). \end{aligned}$$

Cela donne une contradiction.

Si $s_0 = 0$ et h_β est décroissant

Alors $0 < u(0) - \beta(0)$, par l'hypothèse (H_2), nous obtenons que :

$$g(\alpha(0),\alpha(T)) \leq 0 \leq g(\beta(0),\beta(T)).$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} u(0) &= g^*(u(0), u(T)) \\ &= \beta(0) - g(\beta(0), p(T, u(T))) \\ &\leq \beta(0) - g(\beta(0), \beta(T)) \leq \beta(0). \end{aligned}$$

Ceci contredit $0 < u(0) - \beta(0)$.

Si $s_0 = 0$ et h_β est croissant.

Alors $0 < u(0) - \beta(0)$, par l'hypothèse (H_2), nous obtenons que :

$$g(\alpha(0), \beta(T)) \leq 0 \leq g(\beta(0), \alpha(T)).$$

Donc,

$$\begin{aligned} u(0) &= g^*(u(0), u(T)) = \beta(0) - g(\beta(0), p(T, u(T))) \\ &\leq \beta(0) - g(\beta(0), \alpha(T)) \leq \beta(0). \end{aligned}$$

Ceci contredit $0 < u(0) - \beta(0)$.

Par conséquent, $u(t) \leq \beta(t)$, pour tout $t \in [0, T]$.

De même, montrer que $\alpha\,(t) \leq u\,(t)$, pour tout $t \in [0, T]$. $\square$

Corollaire 2.3.2. *S'il existe α sous-solution et β sur-solutions de* $(2.1) - (2.3)$*, tel que*

$$\alpha\,(0) \leq u_0 \leq \beta\,(0)\,. \tag{2.20}$$

Alors le problème (2.1)-(2.3) *posséde une solution $u \in [\alpha, \beta]$.*

Corollaire 2.3.3. *S'il existe α sous-solution et β sur-solutions de* $(2.1) - (2.4)$*, tel que*

$$\beta(0) \geq \beta(T) \qquad \textit{et} \qquad \alpha(0) \geq \alpha(T).$$

Alors le problème (2.1)-(2.4) *posséde une solution $u \in [\alpha, \beta]$.*

Exemple 2.3.1. *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} u' = u^2 + (t^2 - t)\,u - t^3, \; \textit{pour tout } t \in [0,1]\,, \\ u\,(0) = 1. \end{cases} \tag{2.21}$$

Ici $f(t,u) := u^2 + (t^2 - t)\,u - t^3$ *est continue sur* $[0,1] \times \mathbb{R}$ *et* $g(x,y) = x - 1$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$. *Soit*

$$\alpha(t) = t \qquad et \qquad \beta(t) = 2 - t^2, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Pour tout $t \in [0,1]$, *on a*

$$f(t, \alpha(t)) = 0, \quad \alpha^{'}(t) = 1, \quad f(t, \beta(t)) = 4 - 2t - 2t^2 \quad et \quad \beta^{'}(t) = -2t.$$

Donc α *est une sous-solution et* β *est une sur-solution de* (2.21). *Comme la condition* (2.20) *est vérifiée. Le Corollaire 2.3.2 implique que l'équation* (2.21) *admet une solution* u *telle que*

$$t \leq u(t) \leq 2 - t^2, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Exemple 2.3.2. *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} u' = -u^2 + tu, & \text{pour tout } t \in [0,1], \\ u(0) = u(1). \end{cases} \tag{2.22}$$

Ici $T = 1$, $f(t,u) = -u^2 + tu$, *est continue sur* $[0,1] \times \mathbb{R}$ *et* $g(x,y) = x - y$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$. *Soit*

$$\alpha(t) = t \qquad et \qquad \beta(t) = 1, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

Pour tout $t \in [0,1]$, *on a*

$$f(t, \alpha(t)) = 0, \quad \alpha^{'}(t) = 1, \quad f(t, \beta(t)) = t - 1 \quad et \quad \beta^{'}(t) = 0.$$

Donc α *est une sous-solution et* β *est une sur-solution de* (2.22). *Ainsi,*

$$g(\alpha(0), \alpha(T)) = g(\alpha(0), \beta(T)) = -1 \qquad et \qquad g(\beta(0), \beta(T)) = g(\beta(0), \alpha(T)) = 0.$$

L'hypothèse (H_2) *du Théorème 2.3.1 est vérifiée.*
Alors par le Théorème 2.3.1 implique que l'équation (2.21) *admet une solution* u

telle que

$$t \leq u\,(t) \leq 1, \qquad \textit{pour tout } t \in [0,1].$$

Théorème 2.3.2. *S'il existe α sous-solution et β sur-solution de (2.1) − (2.2). Supposons que*

(H_1) *Les fonctions $h_\alpha(x) = g(x, \alpha(T))$ et $h_\beta(x) = g\,(x, \beta(T))$ sont monotones sur $[\beta(0), \alpha(0)]$.*

(H_2) $\max\{g(\alpha(0), \alpha(T)), g(\alpha(0), \beta(T))\} \leq 0 \leq \min\{g(\beta(0), \beta(T)), g(\beta(0), \alpha(T))\}$.

Alors le problème (2.1) − (2.2) posséde une solution $u \in [\beta, \alpha]$.

Démonstration.

Pour tout $\lambda > 0$, considérons le problème modifié suivant

$$\begin{cases} u'(t) - \lambda u(t) = F^*(t, u(t)), & \text{pour tout } t \in [0,T], \\ u(0) = g^*(u(0), u(T)). \end{cases} \tag{2.23}$$

où

$$F^*(t,u) = \begin{cases} f(t, \beta(t)) - \lambda\beta(t), & \text{si } \beta(t) < u, \\ f(t,u) - \lambda u, & \text{si } \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), \\ f(t, \alpha(t)) - \lambda\alpha(t), & \text{si } u \geq \alpha(t), \end{cases}$$

$$g^*(x,y) := p(T,x) - g(p(0,x), p(T,y)), \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R},$$

et

$$p(t,x) = \max\{\beta(t), \min\{x, \alpha(t)\}\}, \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Maintenant la preuve est analogue à la preuve du Théorème 2.3.1. □

Corollaire 2.3.4. *S'il existe α sous-solution et β sur-solutions de (2.1) − (2.3), tel que*

$$\beta\,(0) \leq u_0 \leq \alpha\,(0)\,. \tag{2.24}$$

Alors le problème (2.1)-(2.3) posséde une solution $u \in [\beta, \alpha]$.

Corollaire 2.3.5. *S'il existe α sous-solution et β sur-solutions de (2.1) − (2.4), tel que*

$$\alpha(0) \leq \beta(T) \qquad \textit{et} \qquad \beta(0) \geq \beta(T).$$

Alors le problème (2.1)-(2.4) posséde une solution $u \in [\alpha, \beta]$.

Chapitre 3

Théorèmes d'existence pour les problèmes aux limites non linéaires à retard du premier ordre

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'existence d'une solution de problème aux limite pour l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t), u(\theta(t))), & t \in [0, T], \\ g(u(0)) = u(T). \end{cases} \tag{3.1}$$

Où $T > 0$, on impose les conditions suivantes :

(C_1) $f \in \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\theta \in \mathcal{C}([0,T], [0,T])$.

(C_2) $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $g(0) \leq 0$. Il existe des constantes $M > 0$, $N \geq 0$, $r > 0$, tel que :

$$r \leq g'(t) < \left(1 + N \int_0^T e^{M(\theta(t)-t)} dt\right) e^{MT}, \qquad \text{pour tout } t \in [0, T], \tag{3.2}$$

$$(M + N)T \leq \frac{r}{1 + r}. \tag{3.3}$$

Ils ont introduit un nouveau concept de sous et sur solutions et ont obtenu un résultat d'existence de solutions extrêmes en présence d'une sous-solution α et d'une sur solution β avec la condition classique $\alpha \leq \beta$ sur $[0, T]$.

3.2 Lemmes fondamentaux

Remarque 3.2.1. *Par (3.2), on conclut que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc l'inverse de g existe.*
On note G l'inverse de g.

Pour la simplification, on note

$$c(t) := 1 - \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right), \qquad \text{pour tout } t \in [0, T]\,.$$

Définition 3.2.1. *[6]Les fonctions $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^1([0, T]\,, \mathbb{R})$ sont appelées sous-solution et sur-solution de l'équation (3.1) si*

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), \alpha(\theta(t))) + a_\alpha(t), \qquad t \in [0, T]\,.$$

$$\beta'(t) \geq f(t, \beta(t), \beta(\theta(t))) - b_\beta(t), \qquad t \in [0, T]\,.$$

Où

$$a_\alpha\,(t) := \begin{cases} 0, & si\ g(\alpha(0)) \leq \alpha(T), \\ (c'(t) - Mc(t) - Nc(\theta(t)))(\alpha(0) - G(\alpha(T))), & si\ g(\alpha(0)) \geq \alpha(T), \end{cases}$$

$$b_\beta\,(t) := \begin{cases} 0, & si\ g(\beta(0)) \geq \beta(T), \\ (c'(t) - Mc(t) - Nc(\theta(t)))(\beta(T) - G(\beta(0))), & si\ g(\beta(0)) \leq \beta(T), \end{cases}$$

Théorème 3.2.1. *[6]Supposons que $u \in \mathcal{C}^1([0, T]\,, \mathbb{R})$, tel que*

$$\begin{cases} u'(t) \geq Mu(t) + Nu(\theta(t)), & t \in [0, T]\,, \\ g(u(0)) \geq u(T). \end{cases}$$

Alors

$$u(t) \leq 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [0, T]\,.$$

Démonstration.
Supposons l'inverse, c'est-à-dire, il existe $t^* \in [0, T]$, tel que $u\,(t^*) > 0$.

Nous considérons deux cas.

1er cas : Si $u(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$. On pose

$$x(t) := e^{-Mt}u(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0,T]\,. \tag{3.4}$$

Alors $x(t) \geq 0$, pour tout $t \in [0,T]$. D'autre part, pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned} x^{'}(t) &= -Me^{-Mt}u(t) + e^{-Mt}u^{'}(t) \\ &\geq -Me^{-Mt}u(t) + e^{-Mt}\left(Mu(t) + Nu(\theta(t))\right) \\ &= Ne^{-Mt}u(\theta(t)) \geq 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

donc, la fonction x est croissant sur $[0,T]$. Par (3.4) et (3.5), on trouve

$$x^{'}(t) \geq Ne^{-Mt}u(\theta(t)) = Ne^{M(\theta(t)-t)}x(\theta(t)), \qquad \text{pour tout } t \in [0,T]\,. \tag{3.6}$$

$$g(x(0)) \geq e^{MT}x(T). \tag{3.7}$$

Comme $\theta(t) \geq 0$, pour $[0,T]$ et x est croissant sur $[0,T]$, alors $x(\theta(t)) \geq x(0)$, pour $[0,T]$. Par (3.6), on a

$$x^{'}(t) \geq Ne^{M(\theta(t)-t)}x(0), \qquad \text{pour tout } t \in [0,T]\,.$$

En intégrant la dernière inégalité entre 0 à t, on obtient

$$\begin{aligned} x(t) &\geq x(0) + Nx(0)\int_0^t e^{M(\theta(s)-s)}ds \\ &\geq \left(1 + N\int_0^t e^{M(\theta(s)-s)}ds\right)x(0). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Par (3.7) et (3.8), on a

$$\left(1 + N\int_0^T e^{M(\theta(s)-s)}ds\right)e^{MT}x(0) \leq x(T)e^{MT} \leq g\left(x(0)\right).$$

Par le Théorème des accroissements finis, on a

$$g\left(x(0)\right) = g(0) + x(0)\,g^{'}(\xi) \leq x(0)\,g^{'}(\xi)\,.$$

où $\xi \in (0, x(0))$. Par conséquent

$$\left(1 + N \int_0^T e^{M(\theta(t)-t)} dt\right) e^{MT} x(0) \leq g'(\xi) x(0).$$

Par l'hypothèse (3.2) implique que $x(0) = 0$.

Puisque $0 \leq x(T) \leq e^{-MT} g(x(0)) \leq 0$, alors $x(T) = 0$.

Comme la x est croissant sur $[0, T]$, alors

$$x(0) \leq x(t) \leq x(T), \qquad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Alors $x(t) \equiv 0$ sur $[0, T]$. Ainsi $u(t) \equiv 0$ sur $[0, T]$.

2$^{\text{éme}}$ cas : Il existe $t_1, t_2 \in [0, T]$, tel que

$$u(t_1) > 0 \qquad \text{et} \qquad u(t_2) < 0.$$

On pose

$$u(t_0) = \min_{t \in [0,T]} u(t) = -\lambda,$$

alors $\lambda > 0$. Pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} u'(t) &\geq Mu(t) + Nu(\theta(t)) \\ &\geq -\lambda(M + N). \end{aligned}$$

En intégrant la dernière inégalité entre 0 à t_1, on obtient

$$u(t_1) - u(0) \geq -\lambda(M + N) t_1,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} u(0) &\leq \lambda(M + N) t_1 + u(t_1) \\ &\leq \lambda(M + N) T - \lambda. \end{aligned}$$

Si $t_0 = 0$, alors $u(0) \leq -\lambda + \lambda(M + N)T$.

Si $t_0 > 0$, par le Théorème des accroissements finis, il existe $t_* \in [0, t_0]$, tel que

$$\begin{aligned} u(0) &= u(t_0) - u'(t_*)t_0 \\ &< -\lambda + \lambda(M+N)T. \end{aligned}$$

Par le Théorème des accroissements finis, il existe $t^* \in [t_1, T]$, tel que :

$$\begin{aligned} u(T) &= u(t_1) + u'(t^*)(T - t_1) \\ &> -\lambda(M+N)T. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} -\lambda + \lambda(M+N)T &> u(0)) \\ &\geq g^{-1}\left(u(T)\right) \\ &= G\left(u(T)\right) \\ &\geq G(-\lambda(M+N)T). \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} -\lambda + \lambda(M+N)T &> G(-\lambda(M+N)T) \\ &= G(0) - G'(\rho)\lambda(M+N)T. \end{aligned}$$

Par le Théorème des accroissements finis, il existe $\rho \in (-\lambda(M+N)T, 0)$, tel que

$$G(-\lambda(M+N)T) = G(0) - G'(\rho)\lambda(M+N)T,$$

Comme $G(0) \geq 0$ et $0 < G'(t) \leq \dfrac{1}{r}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda + \lambda(M+N)T &> G(0) - G'(\rho)\lambda(M+N)T \\ &\geq -\frac{\lambda(M+N)T}{r}. \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$r[-\lambda + \lambda(M+N)T] > -\lambda(M+N)T.$$

Donc

$$(M+N)T > \frac{r}{r+1},$$

d'où la contradiction. $\square$

Corollaire 3.2.1. *[6] Suppose que $u \in \mathcal{C}^1([0,T],\mathbb{R})$, tel que*

$$\begin{cases} u'(t) \geq Mu(t) + Nu(\theta(t)) - (c'(t) - Mc(t) - Nc(\theta(t)))(G(u(T)) - u(0)), & t \in [0,T], \\ g(u(0)) < u(T). \end{cases}$$

Alors

$$u(t) \leq 0, \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

Démonstration.
Soit

$$y(t) = u(t) + c(t)(G(u(T)) - u(0)), \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Comme $u(T) > g(u(0))$, alors

$$G(u(T) \geq G\left(g(u(0))\right) = u\left(0\right),$$

donc

$$y(t) \geq u(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

et

$$y(0) = G(u(T)), \qquad y(T) = u(T).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} y'(t) - My(t) - Ny(\theta(t)) &= u'(t) - Mu(t) - Nu(\theta(t)) \\ &\quad + [c'(t) - Mc(t) - Nc(\theta(t))](G(u(T)) - u(0)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{cases} y'(t) \geq My(t) + Ny(\theta(t)), & t \in [0,T], \\ g(y(0)) = u(T). \end{cases}$$

Par le Théorème 3.2.1, on obtient que

$$y(t) \leq 0, \qquad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

ce qui implique

$$u(t) \leq c(t)\,(u(0) - G(u(T)))) \leq 0, \qquad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

□

3.3 Problèmes aux limites pour les équations différentielles linéaires

Considérons le problème aux limites pour l'équation différentielle linéaire :

$$\begin{cases} u'(t) - Mu(t) - Nu(\theta(t)) = \delta(t), & t \in [0, T]. \\ g(u(0)) = u(T). \end{cases} \tag{3.9}$$

Où $\delta \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$.

Théorème 3.3.1. *[6]Supposer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$ qui sont sous et sur solution de (3.9), tel que*

$$\beta(t) \leq \alpha(t), \qquad \textit{pour tout } t \in [0, T].$$

Alors le problème (3.9) posséde une solution unique $u \in [\beta, \alpha]$.

Démonstration.
Montrons que l'équation (3.9) admet une solution unique.
Supposons que u_1 et u_2 deux solutions de (3.9).
On pose $v = u_1 - u_2$, alors

$$v'(t) - Mv(t) - Nv(\theta(t)) = 0, \qquad t \in [0, T].$$

Par le Théorème 3.2.1, il exite τ_1 entre $u_1(0)$ et $u_2\,(0)$, tel que

$$\begin{aligned} v(T) &= g(u_1(0)) - g(u_2(0)) \\ &= (u_1(0) - u_2(0))\, g'(\tau_1) \\ &= g'(\tau_1)v(0). \end{aligned}$$

Comme $r \leq g'(\tau_1)$, d'après le théorème 3.2.1, on a $v\,(t) \leq 0$, pour tout $t \in [0,T]$, donc $u_1\,(t) \leq u_2\,(t)$, pour tout $t \in [0,T]$. De même, on obtient que $u_2\,(t) \leq u_1\,(t)$, pour tout $t \in [0,T]$, d'où $u_1 = u_2$.
En suite, montrons que, si u est un solution de l'équation (3.9), on a

$$\beta\,(t) \leq u\,(t) \leq \alpha\,(t)\,, \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Soit $m\,(t) = u\,(t) - \alpha\,(t)$, pour $t \in [0,T]$.
Si $g(\alpha(0)) \leq \alpha(T)$, alors $a_\alpha(t) = 0$, pour $t \in [0,T]$, donc

$$\begin{cases} m'(t) - Mm(t) - Nm(\theta(t)) \geq 0, \qquad t \in [0,T]. \\ m(T) \leq g(u(0)) - g(\alpha(0)) = g'(\tau_2)m(0), \end{cases}$$

Où τ_2 entre $u(0)$ et $\alpha(0)$.
Par le Théorème 3.2.1, nous avons

$$m\,(t) = u\,(t) - \alpha\,(t) \leq 0, \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Si $g(\alpha(0)) \geq \alpha(T)$, alors

$$a_\alpha(t) = (c'(t) - Mc(t) - Nc(\theta(t)))(\alpha(0) - G(\alpha(T))), \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
m'(t) - Mm(t) - Nm(\theta(t)) &= u'(t) - Mu(t) - Nu(\theta(t)) - \alpha'(t) + M\alpha(t) + N\alpha(\theta(t)) \\
&\geq -(c'(t) - Mc(t) - Nc(\theta(t)))(\alpha(0) - G(\alpha(T)) - u(0) + G(u(T))) \\
&= -(c'(t) - Mc(t) - Nc(\theta(t)))(G(u(T)) - G(\alpha(T)) - m(0)) \\
&= -(c'(t) - Mc(t) - Nc(\theta(t))) \left(\frac{m(T)}{g'(\tau_3)} - m(0) \right).
\end{aligned}$$

Où τ_3 entre $u(T)$ et $\alpha(T)$. Ainsi

$$m(0) \leq G(u(T)) - G(\alpha(T)) = \frac{1}{g'(\tau_3)} m(T).$$

Par corollaire 3.2.1, on trouve que $u\,(t) \leq \alpha\,(t)$, pour tout $t \in [0, T]$.

De même, montrer que $u\,(t) \geq \alpha\,(t)$, pour tout pour tout $t \in [0, T]$.

Finalement, nous montrons que l'équation (3.9) a une solution dans $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$.

Soit

$$p(t) := \begin{cases} \alpha(t), & \text{si } g(\alpha(0)) \leq \alpha(T), \\ \alpha(t) - c(t)(\alpha(0) - G(\alpha(T))), & \text{si } g(\alpha(0)) \geq \alpha(T), \end{cases}$$

$$q(t) = \begin{cases} \beta(t), & \text{si } g(\beta(0)) \geq \beta(T), \\ \beta(t) + c(t)(G(\beta(T)) - \beta(0)), & \text{si } g(\beta(0)) \leq \beta(T), \end{cases}$$

Montrons que p, q sont des sous et sur solutions de (3.9) respectivement, et

$$\beta\,(t) \leq q\,(t) \leq p\,(t) \leq \alpha\,(t)\,, \qquad \text{pour tout } t \in [0, T]. \tag{3.10}$$

Il est claire que,

$$g(p(0)) \leq p(T) \qquad \text{et} \qquad g(q(0)) \geq q(T),$$

D'autre part, on a

$$p'(t) - Mp(t) - Np(\theta(t)) \leq \delta(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

et

$$q'(t) - Mq(t) - Nq(\theta(t)) \geq \delta(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

Il est claire que, $\beta\,(t) \leq p\,(t)$ et $q\,(t) \leq \alpha\,(t)$pour tout $t \in [0, T]$.

Soit $m(t) = q(t) - p(t)$, alors

$$m'(t) - Mm(t) - N(m(\theta(t)) \geq 0, \qquad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

et

$$m(T) \leq g(q(0)) - g(p(0)) = g'(\eta)m(0),$$

où η entre $p(0)$ et $q(0)$.

D'après le Théorème 3.2.1, on trouve que

$$q(t) \leq p(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

donc (3.10) est vérifiée.

Nous considérons le problème suivante :

$$\begin{cases} u'(t) - Mu(t) - Nu(\theta(t)) = \delta(t), & \text{pour tout } t \in [0, T], \\ u(T) = \lambda, \end{cases} \tag{3.11}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que l'équation (3.11) a une solution unique $u(t, \lambda)$ et la fonction $u(t, .)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit l'opérateur $A : \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ définir par :

$$Au(t) = \lambda - \int_t^T [\delta(s) + Mu(s) + Nu(\theta(s))] \, ds \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Montrons que A admet un point fixe unique, il suffit de prouver que A est une contraction.

En effet, soient $x, y \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$, on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |(Ax)(t) - (Ay)(t)| &\leq \int_0^T [M\,|y(s) - x(s)| + N\,|x(\theta(s)) - y(\theta(s))|] \, ds \\ &\leq (M + N)T \, \|x - y\| \, . \end{aligned}$$

Et par suite

$$\|Ax - Ay)\| \leq (M + N)T \, \|x - y\| \, .$$

Donc de (3.3) on peut déduire que A est une contraction et d'après le Théorème de

Banach le problème (3.11) à une seule solution qui est le point fixe de A.

Soient $u(t,\lambda_1)$ et $u(t,\lambda_2)$ les solutions des problèmes suivantes

$$\begin{cases} u'(t) - Mu(t) - Nu(\theta(t)) = \delta(t), & t \in [0,T], \\ u(T) = \lambda_i, \qquad i = 1,2. \end{cases}$$

Alors,

$$u(t,\lambda_i) = \lambda_i - \int_t^T \left[\delta(s) - Mu(s,\lambda_i) - Nu\left(\theta(s),\lambda_i\right)\right] ds, \qquad i = 1,2,$$

Par suite

$$\max_{t\in[0,T]} |u(t,\lambda_1) - u(t,\lambda_2)| \leq \frac{1}{1-(M+N)T} \left|\lambda_1 - \lambda_2\right|.$$

D'autre part, montrons que

$$q(0) \leq u(0,\lambda) \leq p(0).$$

Pour tout $\lambda \in [g(q(0)), g(p(0))]$, où $u(t,\lambda)$ est une unique solution de (3.11) .

Soit $m(t) = u(t,\lambda) - p(t)$. Supposons que $u(0,\lambda) > p(0)$, alors

$$m(0) = u(0,\lambda) - p(0) > 0,$$

$$m(T) = u(T,\lambda) - p(T) \leq u(T,\lambda) - g(p(0)) \leq 0$$

et

$$m'(t) - Mm(t) - Nm(\theta(t)) \geq 0.$$

D'après le Théorème 3.2.1, on trouve que $m(t) \leq 0$, pour tout $t \in [0,T]$, d'où la contradiction.

Soit $n(t) = q(t) - u(t,\lambda)$. Supposons que $u(0,\lambda) < q(0)$, alors

$$n(0) > 0, \qquad n(T) = q(T) - u(T,\lambda) \leq g(q(0)) - u(T,\lambda) \leq 0,$$

et

$$n'(t) - Mn(t) - Nn(\theta(t)) \geq 0.$$

Par le Théorème 3.2.1, on obtient que $n(t) \leq 0$, pour tout $t \in [0,T]$, d'où la contradiction.

Soit $P(\lambda) = g(u(0,\lambda)) - \lambda$, où $u(t,\lambda)$ est une unique solution de (3.11). On a

$$P(g(q(0)))P(g(p(0))) \leq 0.$$

Puisque P est continue sur $\mathbb{R}$, alors il existe $\lambda_0 \in [g(q(0)), g(p(0))]$, tel que $g(u(0,\lambda_0)) = \lambda_0$.

D'où $u(., \lambda_0)$ est une unique solution de (3.9). □

3.4 Les sous-solutions et les sur-solutions

Théorème 3.4.1. *[6]Supposons que*

(H_1) *Les fonctions α, β sont sous et sur solution pour le problème aux limites (3.1) respectivement, tel que*

$$\beta(t) \leq \alpha(t), \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T].$$

(H_2) *La fonction f est satisfaire*

$$f(t,x,y) - f(t,\overline{x},\overline{y}) \leq M(x-\overline{x}) + N(y-\overline{y}), \ \textit{pour} \begin{cases} \beta(t) \leq \overline{x} \leq x \leq \alpha(t), \\ \beta(\theta(t)) \leq \overline{y} \leq y \leq \alpha(\theta(t)), \end{cases}, \ t \in [0,T]. \tag{3.12}$$

Alors il existe deux suites monotones $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ décroissante et croissante, respectivement, sachant que $\alpha_0 = \alpha$ et $\beta_0 = \beta$ qui convergent uniforméments vers les solutions du problème aux limites (3.1) dans $[\beta, \alpha]$.
Où

$$[\beta, \alpha] = \left\{ u \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{R}) : \beta(t) \leq x(t) \leq \alpha(t) \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T] \right\}.$$

Démonstration.

Pour tout $\gamma \in [\beta, \alpha]$, considérons l'équation suivante :

$$\begin{cases} u'(t) - Mu(t) - N(\theta(t)) = f(t, \gamma(t), \gamma(\theta(t))) - M\gamma(t) - N\gamma(\theta(t)), & t \in [0, T], \\ g(u(0)) = u(T), \end{cases} \tag{3.13}$$

Puisque α et β sont sous et sur solution de (3.1), par l'hypothése (H_2), on a

$$\begin{aligned} \alpha'(t) - M\alpha(t) - N\alpha(\theta(t)) &\leq f(t, \alpha(t), \alpha(\theta(t))) - M\alpha(t) - N\alpha(\theta(t)) + a_\alpha(t) \\ &\leq f(t, \gamma(t), \gamma(\theta(t))) - M\gamma(t) - N\gamma(\theta(t)) + a_\alpha(t), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta'(t) - M\beta(t) - N\beta(\theta(t)) &\geq f(t, \beta(t), \beta(\theta(t))) - M\beta(t) - N\beta(\theta(t)) - b_\beta(t) \\ &\leq f(t, \gamma(t), \gamma(\theta(t))) - M\gamma(t) - N\gamma(\theta(t)) - b_\beta(t). \end{aligned}$$

Donc α et β sont sous et sur solution de (3.13).

D'après le Théorème 3.3.1, on trouve que l'équation (3.13) admet une solution unique $u \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R})$.

On définit un opérateur $\mathcal{T}$ par : $u = \mathcal{T}\gamma$, alors $\mathcal{T}$ est un opérateur de $[\beta, \alpha]$ à $[\beta, \alpha]$, d'où $\alpha \geq \mathcal{T}\alpha$, $\mathcal{T}\beta \geq \beta$.

Ensuite, montrons que

$$\text{si } \beta \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \alpha, \text{ on a } \mathcal{T}\mu_1 \leq \mathcal{T}\mu_2.$$

Soit $m = \mathcal{T}\mu_1 - \mathcal{T}\mu_2$, alors par l'hypothése (H_2) et (3.13) , on a

$$\begin{aligned} m'(t) - Mm(t) - Nm(\theta(t)) &= f(t, \mu_1(t), \mu_1(\theta(t))) - f(t, \mu_2(t), \mu_2(\theta(t))) \\ &\quad - M(\mu_1(t) - \mu_2(t)) - N(\mu_1(\theta(t)) - \mu_2(\theta(t))) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Par le Théorème des accroissements finis, il existe ζ entre $\mu_1(0)$ et $\mu_2(0)$, tel que

$$m(T) = \mu_1(T) - \mu_2(T) = g(\mu_1(0)) - g(\mu_2(0)) = g'(\zeta)m(0),$$

Par le Théorème 3.2.1, on a $m(t) \leq 0$, pour tout $t \in [0,T]$, ce qui implique $\mathcal{T}\mu_1 \leq \mathcal{T}\mu_2$, d'où $\mathcal{T}$ est croissant sur $[\beta,\alpha]$.
Définir les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\alpha_n = \mathcal{T}\alpha_{n-1}, \quad \beta_n = \mathcal{T}\beta_{n-1} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = \alpha, \quad \beta_0 = \beta \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\beta_1(t) \leq \beta_2(t) \leq ... \leq \beta_n(t) \leq \alpha_n(t) \leq ... \leq \alpha_2(t) \leq \alpha_1(t), \text{ pour tout } t \in [0,T].$$

Les fonctions $\alpha_n \beta_n \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ satisfait

$$\begin{cases} \alpha_n'(t) - M\alpha_n(t) - N\alpha_n(\theta(t)) = f(t,\alpha_{n-1}(t),\alpha_{n-1}(\theta(t))) - M\alpha_{n-1} - N\alpha_{n-1}(\theta(t)), & t \in [0,T], \\ g(\alpha_n(0)) = \alpha_n(T), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \beta_n'(t) - M\beta_n(t) - N\beta_n(\theta(t)) = f(t,\beta_{n-1}(t),\beta_{n-1}(\theta(t))) - M\beta_{n-1} - N\beta_{n-1}(\theta(t)), & t \in [0,T], \\ g(\beta_n(0)) = \beta_n(T). \end{cases}$$

Donc, il existe deux fonctions $e, r \in \mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$, tel que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(t) = e(t), \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n(t) = r(t) \text{ uniformément sur } [0,T].$$

Donc e et r sont des solutions de (3.1).
Finalement, nous pouvons que, si $x \in [\beta,\alpha]$ est une solution de (3.1), alors

$$r(t) \leq x(t) \leq e(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Puisque

$$\beta(t) \leq x(t) \leq \alpha(t) \qquad \text{et} \qquad x = \mathcal{T}x, \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Comme l'application $\mathcal{T}$ est croissant sur $[\beta,\alpha]$, on obtient que

$$\beta_1(t) \leq x(t) \leq \alpha_1(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0,T].$$

Par conséquent, on trouve

$$\beta_n(t) \leq x(t) \leq \alpha_n(t), \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient

$$r(t) \leq x(t) \leq e(t), \qquad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

$\square$

Exemple 3.4.1. *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{10}\left(1 + x^2(t)\right) + \dfrac{2}{5}\sin x\left(\dfrac{t}{10}\right), & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2}x(0) - \dfrac{1}{4}\sin\left(x(0)\right) = x\left(\dfrac{1}{4}\right), & \end{cases} \tag{3.14}$$

Ici,

$$T = \frac{1}{4}, \quad f(t, x, y) = \frac{1}{10}\left(1 + x^2\right) + \frac{2}{5}\sin y, \quad g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(x), \quad \theta(t) = \frac{t}{10}.$$

Alors

$$g(0) = 0 \quad \textit{et} \quad g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos(x).$$

Pour $M = \frac{1}{5}$, $N = \frac{2}{5}$, $r = \frac{1}{4}$, *les conditions* (3.2) *et* (3.3) *sont satisfait.*
Soit

$$\alpha(t) = 0 \qquad \textit{et} \qquad \beta(t) = -1, \qquad \textit{pour tout } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

Alors α *et* β *sont sous et sur solutions de* (3.14).

D'autre part, on a la condition (3.12) *est satisfait.*

Alors par le Théorème 3.4.1 implique que l'équation (3.14) *admet une solution* x *telle que*

$$-1 \leq x(t) \leq 0, \qquad \textit{pour tout } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

Exemple 3.4.2. *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{1}{20}\left(3x(1-t) - x(t)\right), & 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) - p = x(1), & \end{cases} \tag{3.15}$$

où $p>0$ *une constante.*

Ici

$$T=1,\quad f(t,x,y)=\frac{1}{20}(3y-x),\quad g(x)=x-p,\quad \theta(t)=1-t.$$

Pour $M=\frac{1}{20}$, $N=\frac{3}{20}$, $r=1$, *les conditions* (3.2) *et* (3.3) *sont satisfait.*

Soit $\alpha\equiv 0$ *est une sous solution de* (3.15). *Supposons que* $\beta(t)=-20p$, *pour* $t\in[0,1]$.

On a $\beta(0)-p<\beta(1)$ *et* $G(\beta(1))-\beta(0)=p$, *alors*

$$\begin{aligned}\beta'(t)=0&>\frac{3\beta(1-t)-\beta(t)}{20}-(c'(t)-Mc(t)-N(\theta(t)))(G(\beta(T))-\beta(0)),\\&=\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2}+Mc(t)+Nc(\theta(t))-2\right)p.\end{aligned}$$

Donc β *est une sur solution de* (3.15).

Par le Théorème 3.4.1 implique que l'équation (3.15) *admet une solution* x *telle que*

$$-20p\le x(t)\le 0,\qquad \textit{pour tout } t\in[0,1].$$

Conclusion

L'idée c'était d'exploiter certaines propriétés afin de trouver la solution recherchée, plus précisément on a montrer que si on peut trouver une sous solution α et une sur solution β d'un problème aux limites alors il existe une solution u entre α et β dans les deux cas : $\alpha \leq \beta$, $\alpha \geq \beta$.

Bibliographie

[1] A. Granas, and J. Dugundji, Fixed point theory. Springer Science & Business Media, (2013).

[2] D. Franco, J. Nieto, D. O'Regan, Upper and Lower Solutions for First Order Problems with Nonlinear Boundary Conditions, Extracta mathematicae, pp :153 − 160, 18 (2003).

[3] D. Guo and V. Lakshmikantham, Nonlinear Problems in Abstract Cones, Academic Press, San Diego 1988.

[4] J. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, collection grenoble sciences, presses universitaires de grenoble, 1996.

[5] S. Lang, Analyse réelle. Cours. Mathématiques. Inter-Editions, (1977).

[6] W.Wang, X.Yang, J. Shenc, Boundary value problems involving upper and lower solutions in reverse order, Journal of Computational and Applied Mathematics, pp :1 − 7, 230(2009).

Résume :

Dans ce travail, nous étudions l'existence des solutions pour un problème aux limites non linéaire d'équation différentielle du premier ordre en utilisant la méthode de sous et sur solution et certaine théorèmes de point fixe comme théorème de Leray Schauder et contraction de Banach.

Abstarct :

In this work, we study the existence of a solution for a nonlinear boundary problem of first order differential equation using the method of upper and lower solutions and some fixed point theorems like Larey Schauder theorem and contraction of Banach.

ملخص

في هذَا العمل، ندرس وجدَانية الحلول للمعدلَات التفَاضلية مِن الدرجة الأُولَى بَاستعمَال الحل الفوقي وَ الحل التحتَى مع نظريَات النقطة الثَابتة كنظرية لرَاي شَاودر وَ نظَرية بَانَاخ.