République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématique
Option : Equations Différentielles et Modélisation

Présentée par : **Melle Si bachir Fatima**

Etude de quelques Equations Différentielles d'ordre fractionnaire
Au sens de Caputo

Encadrant :
MEKHALFI Kheira
Maitre de Conférence "B" à C.U.B.B.A.T

Soutenu en 2018

Devant le jury composé de :

Président : **Belattar zokha (M.A.A)** C.U.B.B.A.T

Examinateurs : **Benaissa Cherif Amine (M.C.B)** C.U.B.B.A.T

Encadrant : **MEKHALFI Kheira (M.C.B)** C.U.B.B.A.T

Etude de quelques équations differentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo

Dédicaces

A mes très chers parents

A mes très chers soeurs et frères

A toute ma famille

A mes amies

A tous les enseignants et enseignantes qui ont contribué à ma formation.

Je dédie ce travail

Remerciement

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans la volonté de **DIEU** qui m'a offert santé, force, courage et volonté. Je vous remercie **DIEU** pour ça et pour tout le reste.

Je tiens à remercier sincèrement Madame Mekhalfi Kheira, non seulement pour avoir accepté de m'encadrer et aussi me faire profiter de ses connaissances, mais aussi pour sa patience et pour le totale confiance qu'elle m'a accordée.

Je remercie Madame Belattar Zokha enseignante au département de mathématique du centre universitaire de Ain Temouchent de l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes remerciements vont également a Monsieur Benaissa Cherif Amine enseignant au département de mathématique du centre universitaire d'Ain Temouchent d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie aussi tout mes enseignants du centre universitaire d'Ain Temouchent.

Les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection a mes parents qui m'ont constamment encouragée et soutenue tout au long de ce master.

Merci à tous et à toutes
Si bachir Fatima

Table des matières

Introduction générale

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Notons que cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel.
Historiquement, Isaac Newton $(1642 - 1727)$ et Gottfried Wihelm Leibniz (1646- 1716) a découvert indépendamment le calcul au $17^{ème}$ siècle voir [9]. En mathématiques, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse, qui étudie la généralisation de la différentiation et d'intégration ordinaire à l'ordre non-entier(arbitraire).
L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale vers la fin du $17^{ème}$ siècle, le sujet est aussi vieux que le calcul différentiel et remonte aux temps quand Leibniz, Newton ont inventé ce type de calcul [1], Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ pour désigner la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction $(n \in \mathbb{N})$ quand il a signalé cela dans une lettre adressée à l'Hôpital [11] datée du 30 septembre 1695 et l'Hôpital a posé la question de ce que serait le résultat si $n = \frac{1}{2}$.
Leibniz lui a repondu : «Cela conduirait à un paradoxe à partir duquel un jour, on pourra tirer des conséquences utiles»[23]. De ces paroles là est né le calcul fractionnaire.
Le calcul fractionnaire est utilisé dans une variété des régions d'applications, par exemples : Viscoélasticité, la mécanique, théorie de contrôle, éléctricité, biologie, électromagnétique...., le lecteur pourra consulter [12, 18, 13, 24, 27, 28].

Ce mémoire a pour objet l'étude d'existence et d'unicité des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Ce mémoire est composé en quatres chapitres qui est organisée selon le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous évoquerons quelques préliminaires concernant les outils de base du calcul fractionnaire ainsi que quelques théorèmes de point fixe.

Le deuxième chapitre intitulé "Equation différentielle d'ordre fractionnaire", nous traiterons quelques résultats d'existante et d'unicité des solutions du problème au limite d'équation différentielle fractionnaire suivant :

$$ {}^cD^\alpha y(t) \;=\; f(t,y(t)) \qquad \textit{pour tout}\, t \in J=[0,T],\, 0<\alpha<1 $$

$$ ay(0)+by(T) \;=\; c. $$

Le troisième chapitre intitulé “problèmes aux limites avec des conditions non locales”, On établit quelques résultats d'existante et d'unicité des solutions du problème suivant :

$$ {}^cD^\alpha y(t) \;=\; f(t,y(t)) \qquad \textit{pour tout } t \in J=[0,T],\; 1<\alpha<2, $$

$$ y(0)=g(y),\; y(T)=y_T. $$

Dans le quatrième et dernier chapitre intitulé ”problèmes aux limite avec des conditions intégrales ”, on présente quelques résultats d'existante et d'unicité des solutions du problème suivant :

$$ {}^cD^\alpha y(t) = f(t,y(t)) \qquad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad t \in J=[0,T], $$

$$ y(0)+\mu\int_0^T y(s)ds = y(T), \qquad \mu\in\mathbb{R}^*,\; 0<\alpha<1. $$

En termine ce mémoire par une conclusion générale et un résumé.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on rappelle des outils de base et des résultats préliminaires essentiels à notre travail. En particulier, on introduit des notations, définitions, on présente certains résultats fondamentaux sur l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sens de Caputo, quelques lemmes et on rappelle quelques théorèmes de points fixe utilisés dans ce travail.

1.2 Notations et Définitions

Dans cette section, nous présentons les notations et définitions nécessaire pour ce mémoire.
Soit $J = [0, T],\ T > 0$, Notons $C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)|/t \in J\},$$

où $|.|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *[10] Soit E un espace de Banach et $A : E \to E$, un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant), s'il existe une constante $0 < k < 1$ telle que : $\|Ax - Ay\|_E \leq K\|x - y\|_E$, pour tout $x, y \in E$.*

Proposition 1.2.1 *Soit $C(J, E)$ l'espace des fonctions continues de J vers l'espace de Banach E et $\mathcal{M} \subset C(J, E)$.*
$\mathcal{M}$ est relativement compact ssi

(i) *$\mathcal{M}$ est borné i.e. $\exists b \geq 0$ tel que $\|f\|_\infty \leq b\ \forall f \in \mathcal{M}$,*

(ii) $\mathcal{M}$ *est équicontinu*
i.e $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in J : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \ \forall f \in \mathcal{M}$,

(iii) $\forall x \in J$, $\{f(x) \in E, f \in \mathcal{M}\}$ *est relativement compact dans* E.

Définition 1.2.2 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $f : E \to F$ *une fonction ;*

- f *est dite compacte si l'image* $f(E)$ *est relativement compacte dans* F,
- f *est dite complètement continue si elle est continue et l'image de tout borné de* E *est relativement compacte dans* F.

Théorème 1.2.1 (Arzelà-Ascoli) *[17] Soit* F *une famille des fonctions continues définies sur un intervalle* $[a, b]$. *Alors* F *est relativement compacte (précompact) dans* $C[a, b]$ *si* F *est équicontinu et uniformément bornée.*

1.3 Calcul fractionnaire

Dans cette section nous avons besoin de présenter certaines fonctions utiles telles que la fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire, de telles fonctions sont dites fonctions spéciales, nous allons aussi définir l'intégrale fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sens de Caputo, quelques propriétés et des lemmes nécessaire pour notre travail.

1.3.1 Fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction d'Euler Gamma $\Gamma(z)$ qui généralise le factorielle $n!$.

Définition 1.3.1 *[8] La fonction Gamma* $\Gamma(z)$ *est définie par l'intégrale :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \ Re(z) > 0.$$

Propriétés 1.3.1 *[26, 25] Une des propriétés fondamentales de la fonction Gamma est qu'elle satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ Re(z) > 0, \tag{1.1}$$

en particulier

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

avec

$$\Gamma(1) = 1,$$

une autre propriété importante de la fonction Gamma, est qu'elle a des pôles simples aux points $z = -n$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Théorème 1.3.1 *La fonction Gamma est défini et de classe* C^{∞}*sur* $]0,+\infty[$*, ses dérivées successives sont données par la formule*

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}(\ln x)^{k} t^{x-1} dt.$$

pour une étude approfondie sur la fonction Gamma, le lecteur pourra consulter [7, 14].

1.3.2 Fonction Bêta

L'autre fonction importante dans le calcul fractionnaire est la fonction Bêta d'Euler.

Définition 1.3.2 *[20, 25] La fonction Bêta est définie par :*

$$B(p,q) = \int_{0}^{1} t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \; Re(p) > 0, \; Re(q) > 0. \tag{1.2}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \; Re(p) > 0, \; Re(q) > 0. \tag{1.3}$$

Il s'ensuit de (1.3) *que*

$$B(p,q) = B(q,p), \; Re(p) > 0, \; Re(q) > 0.$$

1.3.3 Intégration et dérivation fractionnaires

Dans cette section, on va rappeler l'intégration fractionnaire et la dérivation fractionnaire au sens de Caputo, quelques propriétés et on va donner des exemples.

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre α $(\alpha > 0)$ généralise la célèbre formule d'intégrales répétées, n-fois, On va définir l'intégrale d'ordre fractionnaire.

Définition 1.3.3 *[11] Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$*, l'opérateur* I_a^{α} *définie en* $L^1[a,b]$ *par :*

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad pour\ a \leq t \leq b,$$

où Γ *est la fonction Gamma, est appelé opérateur intégrale fractionnaire d'ordre* α *de Riemann liouville.*
Pour $\alpha = 0$, $I_a^{\alpha} = I$ *opérateur identité.*

- *On note* $I_0^{\alpha} f(t)$ *par* $I^{\alpha} f(t)$.

Théorème 1.3.2 *Pour $f \in C[a,b]$ l'intégrale fractionnaire possède la propriété suivante :*

$$I_a^{\alpha}[I_a^{\beta}f(x)] = I_a^{\alpha+\beta}f(x) \text{ pour } \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Exemple 1.3.1 *L'intégrale fractionnaire d'ordre α de la fonction f telle que :*

$$f(t) = (t-a)^{\beta},$$

avec $\alpha > 0,\ \beta > -1$ et

$$(I_a^{\alpha}f)(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(t-a)^{\beta+\alpha},\ \alpha > 0,\ \beta > -1.$$

En effet :

$$\begin{aligned}(I_a^{\alpha}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta}ds.\end{aligned}$$

On va utiliser le changement de variable suivant :

$$s = a + (t-a)x, \tag{1.4}$$

avec

$$(0 \leq x \leq 1).$$

d'après (1.4) on a

$$ds = (t-a)dx$$

$$\begin{aligned}(I_a^{\alpha}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 [t-a-(t-a)x]^{\alpha-1}[a+(t-a)x-a]^{\beta}(t-a)dx \\ (I_a^{\alpha}f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-a)^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}x^{\beta}(t-a)dx,\end{aligned}$$

donc :

$$(I_a^{\alpha}f)(t) = \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-x)^{\alpha-1}x^{\beta}dx,$$

d'après (1.2), on aurra :

$$(I_a^{\alpha}f)(t) = \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1).$$

On utilisons (1.3) *on aura :*

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(t) &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta},\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0,5;\ \beta = 1$ *et* $a = 0$.
On aura :

$$I^{0,5}f(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2,5)}t^{1,5} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(2,5)} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2,5)}.$$

Exemple 1.3.2 *L'intégrale fractionnaire d'ordre* α $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$ *d'une fonction constante* $f(t) = c$

$$\begin{aligned}(I_a^\alpha f)(t) &= I_a^\alpha(c) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1}c \ \ ds \\ &= \frac{c}{\alpha\Gamma(\alpha)}\Big[-(t-s)^\alpha\Big]_a^t \\ &= \frac{c}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

On va définir la dérivation fractionnaire au sens de Caputo, on va donner quelques exemples.

Définition 1.3.4 *[20] Soit* $n-1 < \alpha < n,\ n \in \mathbf{N}^*$ *et* f *une fonction de classe* $C^n([a,b])$, *la dérivée fractionnaire au sens Caputo d'ordre* α *de la fonction* f *est définie par :*

$$({}^cD_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{(n-\alpha-1)}f^{(n)}(s)ds.$$

Où $n = [\alpha] + 1$.

- On note $({}^cD_0^\alpha f)(t)$ par $({}^cD^\alpha f)(t)$.

Propriété 1.3.1 *[20] La dérivation fractionnaire au sens de Caputo est linéaire.*

Exemple 1.3.3 *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et* $f(t) = (t-a)^\beta, \beta > 0$ *alors*

$$({}^cD_a^\alpha f)(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha},$$

en effet :

$$\begin{aligned}({}^cD_a^\alpha f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f^{'}(s)ds\\ &= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{-\alpha}(s-a)^{\beta-1}ds.\end{aligned}$$

On faisont le changement de variable (1.4) *on aura :*

$$\begin{aligned}({}^cD_a^\alpha f)(t) &= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (t-a)^{-\alpha}(1-x)^{-\alpha}(t-a)^{\beta-1}x^{\beta-1}(t-a)dx\\ &= \frac{\beta(t-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 (1-x)^{-\alpha}x^{\beta-1}dx.\end{aligned}$$

On utilise (1.2) *on aura :*

$$({}^cD_a^\alpha f)(t) = \frac{\beta(t-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}B(\beta,1-\alpha),$$

et d' aprés (1.3) *on a*

$$\begin{aligned}({}^cD_a^\alpha f)(t) &= \frac{\beta(t-a)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\\ &= \frac{\beta(t-a)^{\beta-\alpha}\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}\\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}.\end{aligned}$$

Exemple 1.3.4 *La dérivée fractionnaire d'ordre α, $\alpha > 0$ au sens de Caputo d'une fonction constante $f(t) = c$ est nulle.*

Lemme 1.3.1 *[29] Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle d'ordre fractionnaire :*

$${}^cD^\alpha h(t) = 0,$$

admet une solutions

$$h(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1},\ c_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,...,n-1;\ n = [\alpha]+1.$$

Lemme 1.3.2 *[29] Soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha c}D^\alpha h(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1} + h(t), \qquad \textit{pour } c_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,...,n-1,\ n = [\alpha]+1.$$

Lemme 1.3.3 *[20] Soit f une fonction de classe $C^n([a,b])$, $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$ alors*

$$I_a^\alpha({}^cD_a^\alpha f)(t) \quad = \quad f(t) - \sum_{k=a}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

Lemme 1.3.4 *[20] Soit $\alpha > 0$, et $f \in L^\infty[a,b]$ alors*

$$({}^cD_a^\alpha I_a^\alpha f)(t) = f(t).$$

Pour plus de détails sur la dérivation fractionnaire, le lecteur intéressé pourra consulter[11, 23, 20, 22, 26, 25]

1.4 Théorèmes de Point Fixe

Dans cette section nous présentons deux théorèmes de point fixe qui sont utilisés dans notre travail pour démontrer l'existence et l'unicité de solution du problème aux limites pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire sous certaine condition au sens de Caputo.

Théorème 1.4.1 (Contraction de Banach) *[16, 30] Soit X un espace de Banach et $f : X \to X$ une contraction. Alors, f a un unique point fixe.*

Théorème 1.4.2 (L'Alternative Non Linéaire de Leray-Schauder) *[16] Soit E un espace de Banach, et $U \subset E$ convexe avec $0 \in U$. Soit $F : U \to U$ est un opérateur complètement continu. Alors ou bien*

(i) *F a un point fixe*
ou bien

(ii) *L'ensemble $\mathcal{E} = \{x \in U : x = \lambda F(x),\ 0 < \lambda < 1\}$ est non borné.*

Chapitre 2

Equations différentielles d'ordre fractionnaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité du problème

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \qquad avec \;\; t \in J = [0, T], \; 0 < \alpha < 1, \tag{2.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c. \tag{2.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo, $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.
On va présenter deux résultats d'existences, on va utiliser le théorème de point fixe de Banach dans le premier résultat et dans le deuxième on va utiliser le théorème de point fixe de Leray Schauder.
Ce chapitre est basé sur les travaux[2, 4].

Lemme 2.1.1 *[19] Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} h(s) ds. \tag{2.3}$$

Si et seulement si y est la solution du problème à valeur initiale pour l'équation différentielle fractionnaire

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t), t \in J = [0, T], \tag{2.4}$$

$$y(0) = y_0. \tag{2.5}$$

Preuve. Soit y solution du problème $(2.4) - (2.5)$.
On a l'équation (2.4) on appliquant l'opérateur I^{α} aux deux membres de l'égalité on aura :

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}y(t) = I^{\alpha}h(t)$$

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds, \tag{2.6}$$

d'après le lemme 1.3.3 et pour $a = 0$, et $n = 1$,
on aura

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}y(t) = y(t) - y(0), \tag{2.7}$$

de (2.6) et (2.7) on aura :

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

et on a

$$y(t)) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds,$$

ce qu'il fallait démontrer.

■

Lemme 2.1.2 *soit* $0 < \alpha < 1$, *et soit* $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, une fonction* y *est une solution de l'équation integrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right]. \tag{2.8}$$

Si et seulement si y *est la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire*

$${}^cD^{\alpha}y(t) = h(t), t \in [0, T], \tag{2.9}$$

$$ay(0) + by(T) = c. \tag{2.10}$$

Preuve. D'apres le lemme 2.1.1 on a (2.3),
on utilise la condition (2.10) pour calculer la constante y_0, donc

$$ay(0) = ay_0,\ by(T) = by_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds.$$

On aura :

$$ay_0 + by_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds = c, \quad avec \quad a + b \neq 0,$$

par suite, on aura :

$$y_0 = \frac{-1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right].$$

On obtient : (2.8).
Inversement

On a : (2.8) On va appliquer l'opérateur ${}^cD^\alpha$, comme il est lineaire on aura :

$$\begin{aligned}
{}^cD^\alpha y(t) &= {}^cD^\alpha\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right] -{}^c D^\alpha\left[\frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right)\right] \\
&= {}^cD^\alpha I^\alpha h(t),
\end{aligned}$$

d'aprés le lemme 1.3.4, on aura

$${}^cD^\alpha y(t) = h(t),$$

et

$$\begin{aligned}
ay(0)+by(T) &= a\left[-\frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c)\right)\right] \\
&+ b\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds\right. \\
&- \left.\frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right)\right] \\
&= -\frac{a}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right] \\
&+ \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
&- \frac{b}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds - c\right] \\
&= \left[\frac{-ab}{(a+b)\Gamma(\alpha)} + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} - \frac{b^2}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\right]\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds \\
&+ c(\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}) \\
&= \frac{-ab+(a+b)b-b^2}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}h(s)ds + c \\
&= c,
\end{aligned}$$

et on obtient(2.10). ■

Définition 2.1.1 *Une fonction $y \in C^1(J,\mathbb{R})$ est dite solution du problème* $(2.1)-(2.2)$ *si y verifie l'equation integrale suivante :*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds - c\right].$$

2.2 Résultats Principaux

On va énoncer un premier résultat sur l'unicité de la solution de (2.1)−(2.2) on utilisons le théorème de contraction de Banach.

Théorème 2.2.1 *Supposons que*

(H_1) *il existe une constante* $k > 0$ *telle que*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq k|u-v|, \qquad \textit{pour tout}\, t \in J\, \textit{et tout}\, u, v \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{kT^{\alpha}\left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \tag{2.11}$$

alors le problème $(2.1) - (2.2)$ *admet une solution unique sur* $[0, T]$.

Preuve. Transformons le problème $(2.1) - (2.2)$ en un problème de point fixe.
Considérons l'opérateur :
$F : C([0,T], \mathbb{R}) \to C([0,T], \mathbb{R})$. Définie par :

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds - c\right]. \tag{2.12}$$

Il est clair que les points fixes de l'opération F sont solution du problème $(2.1) - (2.2)$.
F est bien défini, en effet : si $y \in C([0,T], \mathbb{R})$, alors $(Fy) \in C([0,T], \mathbb{R})$. Pour montrer que F admet un unique point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction.
En effet.

Si $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$ alors pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(x)(t)-F(y)(t)| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds - \frac{1}{a+b} \\
&\quad \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds - c\right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \\
&\quad \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds + \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - c\right]\Bigg|,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|F(x)(t)-F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s)| \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s)|ds \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|b|k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \left[\frac{kT^\alpha(1+\frac{|b|}{|a+b|})}{\alpha\Gamma(\alpha)}\right]\|x-y\|_\infty .
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0,T]$, nous avons

$$\|F(x)-F(y)\|_\infty \leq \left[\frac{KT^\alpha(1+\frac{|b|}{|a+b|}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\|x-y\|_\infty,$$

par la condition (2.11), l'opérateur F est une contraction et donc F a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach, qui donne une solution intégrale unique au problème $(2.1)-(2.2)$.

■

Le deuxième résultat pour le problème $(2.1)-(2.2)$ est basée sur le théorème de point fixe de Leray- Schauder.

Théorème 2.2.2 *Supposons que :*

(H_2) $f : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *une fonction continue*

(H_3) *Il existe une constant* $M > 0$ *telle que :*

$$|f(t,u)| \leq M \qquad \textit{pour tout } t \in [0,T], \textit{ et tout } u \in \mathbb{R}.$$

Alors le problème $(2.1)-(2.2)$ *admet au moins une solution sur* $[0,T]$.

Preuve. On va montrer que F défini par (2.12) admet un point fixe, on va utiliser le théorème du point fixe de Leray-Schauder. La preuve est donnée en quatre étapes.

Etape 1 : F est continu.
Soit $\{y_n\}$ une suite dans $C([0,T]),\mathbb{R})$ telle que $y_n \to y$ dans $C([0,T]),\mathbb{R})$
ie $\lim\limits_{n\to+\infty} \|y_n - y\|_\infty = 0$, on va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|G(y_n) - G(y\|_\infty = 0$, pour tout $t \in J$.

$$
\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_n(s)) ds \\
&- \frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y_n(s)) ds - c \right) \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \\
&+ \frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right) \Bigg| \\
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\
&\leq \frac{\|f(., y_n(.)), f(., y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \right] \\
&\leq \frac{(1 + \frac{|\mathrm{b}|}{|\mathrm{a+b}|}) T^\alpha \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Prenons le supremum sur [0, T], on obtient

$$
\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \leq \frac{(1 + \frac{|\mathrm{b}|}{|\mathrm{a+b}|}) T^\alpha \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}.
$$

Puisque f est une fonction continue, nous avons :

$$
\|F(y_n) - F(y)\|_\infty \leq \frac{(1 + \frac{|\mathrm{b}|}{|\mathrm{a+b}|}) T^\alpha \|f(., y_n(.)) - f(., y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \to \ 0 \ \ quand \ \ n \to \infty,
$$

donc F est continue.
Etape 2 :F transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformement borné dans $C(J,\mathbb{R})$.
En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe une constante strictement positif l tel que pour chaque $y \in B_\eta = \{y \in C([0,T],\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta\}$.
On veut montrer que $\|F(y)\|_\infty \leq l$.
On a pour tout $t \in [0,T]$

$$|F(y)(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))| + \frac{|c|}{|a+b|}$$

de (H_3) on a :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|b|M}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{|b|M}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} \\
\|F(y)\|_\infty &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + \frac{|b|M}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = l,
\end{aligned}$$

et donc $F(B_\eta)$ est uniformement borné.
Etape 3 : F transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $C([0,T],\mathbb{R})$.
Soit $t_1, t_2 \in [0,T],\ t_1 < t_2,\ B_\eta$ un ensemble borné de $C([0,T],\ \mathbb{R})$ de l'étape deux et soit $y \in B_\eta$.
Alors

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2) - F(y)(t_1| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}] f(s,y(s))ds \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1-s)^{\alpha-1} - (t_2-s)^{\alpha-1}]ds \\
&+ \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}[(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^\alpha - t_2^\alpha),
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0.
Alors, l'ensemble $Y(t) = \{F(y)(t) : y \in B_\eta\}$ est précompact dans $\mathbb{R}$. D'aprés les étapes précédentes et le Théorème d'Arzelá-Ascoli, nous pouvons conclure que F est un opérateur complètement continu.

Etape 4 : Estimations à priori des solutions.
Maintenant reste à montrer que : $\varepsilon = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \quad \textit{pour} \quad 0 < \lambda < 1\}$ est borné.
Soit $y \in \varepsilon$, alors

$$y = \lambda\ F(y)\ ,\ \textit{pour}\ 0 < \lambda < 1,$$

donc pour chaque $t \in J$ on a :

$$y(t) = \lambda\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds - \frac{1}{a+b}\left(\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))ds - c\right)\right],$$

pour $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
|y(t)| \ &\leq \ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s, y(s))|ds \\
&+ \ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s, y(s))|ds + \frac{|c|}{|a+b|},
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
|y(t)| \ &\leq \ \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|b|M}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \ \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|},
\end{aligned}$$

on a

$$\|y\|_\infty \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = R,$$

avec R une constante strictement positif. Cela montre que ε est uniformement borné par conséquence du théorème 1.4.2 du point fixe de Leray-Schauder.
On déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du probleme de $(2.1) - (2.2)$.

■

Ensuite, nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problème $(2.1) - (2.2)$. Le lemme suivant est essentiel pour la preuve de notre résultat principal.

Lemme 2.2.1 (Lemme de Gronwall) *[15] Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a.b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité.*

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds \qquad \forall\ t \in [a,b]. \tag{2.13}$$

Alors

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)exp\big(\int_s^t \Psi(u)du\big)ds \qquad \forall\ t \in [a,b].$$

Preuve. Posons $F(t) = \int_a^t \psi(s)y(s)ds$.
En multipliant les deux membres de (2.13) par $\psi(t)$, on obtient :

$$F'(t) - \psi(t)F(t) \leq \varphi(t)\psi(t).$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$G'(t) \leq \varphi(t)\psi(t)exp(-\int_a^t \psi(s)ds),\ avec$$

$$G(t) = F(t)exp(-\int_a^t \psi(s)ds),$$

comme $G(a) = F(a) = 0$, on déduit par intégration :

$$G(t) \leq \int_a^t \varphi(s)\psi(s)exp(-\int_a^s \psi(u)du)ds.$$

Or, d'après 2.13, on aura

$$y(t) \leq \varphi(t) + G(t)exp(\int_a^t \psi(s)ds),$$

d'où le résultat voulu. ■

Maintenant on va présenté un théorème d'unicité des solutions du probleme $(2.1) - (2.2)$.

Théorème 2.2.3 *Supposons que les conditions du théorème 2.2.2 sont vérifiées et supposons que de plus qu'il existe une constante positive K telle que :*

$$|f(t,u(t)) - f(t,v(t))| \leq K\|u-v\|_\infty, \quad \forall\ \ t \in J \quad et \quad \forall u,v \in C(J,\mathbb{R}).$$

Alors le problème $(2.1) - (2.2)$ admet une unique solution sur J.

Preuve. L'existence d'au moins une solution $y(t)$ du problème $(2.1)-(2.2)$ est assurée par le théorème 2.2.2. Pour prouver l'unicité de $y(t)$, on suppose que le problème $(2.1)-(2.2)$ admet une autre solution.
Soit $z(t)$ cette autre solution du problème $(2.1)-(2.2)$ alors pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
|(y)(t)-z(t)| &= \Bigg| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - c\right] \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,z(s))ds + \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,z(s))ds - c\right] \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s)) - f(s,z(s))| ds \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\left[\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s)) - f(s,z(s))| ds\right] \\
&\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|y-z\|_\infty ds + \frac{|b|K}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\|y-z\|_\infty ds \\
&\leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|y-z\|_\infty ds + \frac{|b|K}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\|y-z\|_\infty ds \\
&\leq \frac{K(1+\frac{|b|}{|a+b|})}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\|y-z\|_\infty ds.
\end{aligned}
$$

Maintenant, on va utiliser le lemme de Granwall 2.2.1, avec $\varphi(t) \equiv 0$ et $u(t) = |y(t)-z(t)|$, on obtient $y(t) = z(t)$, où l'unicité de la solution du probleme$(2.1)-(2.2)$.

■

2.3 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illuster l'utilité de nos principaux résultats.
Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$
{}^cD^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)}, \qquad t \in J = [0,1],\ \alpha \in (0,1], \tag{2.14}
$$

avec

$$
y(0) + y(1) = 0. \tag{2.15}
$$

Posons :

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}x}{(9+e^t)(1+x)}, (t,x) \in J \times [0,\infty).$$

Soit $x, y \in [0,\infty)$ et $t \in J$ alors on a :

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^{-t}}{9+e^t}\left|\frac{x}{(x+1)} - \frac{y}{(y+1)}\right| \\
&= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^t)(1+x)(1+y)} \\
&\leq \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}|x-y| \\
&\leq \frac{1}{10}|x-y|.
\end{aligned}$$

D'où la condition (H_1) est vérifiée avec $k = \frac{1}{10}$, nous vérifions la condition (2.11) est satisfaite pour des valeurs appropriées de $\alpha \in (0,1]$ avec $a = b = T = 1$.
En effet,

$$\frac{3k}{2\Gamma(\alpha+1)} < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > \frac{3k}{2} = 0,15. \tag{2.16}$$

Alors par le théorème2.2.1 le problème $(2.14)-(2.15)$ a une solution unique sur $[0,1]$ pour les valeurs de α satisfaisant (2.16).

Chapitre 3

Problèmes aux limites avec conditions non locales

3.1 Introduction

DANS ce chapitre, on va présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions pour certains problèmes aux limites avec des conditions non locales pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire, ces résultats seront basés sur le théorème du point fixe de Banach et le théorème du point fixe de Leray-Schauder. On considère le problème aux limites avec conditions non locales suivants :

$$^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \qquad \textit{pour tout } t \in J = [0, T],\ 1 < \alpha < 2, \tag{3.1}$$

$$y(0) = g(y),\ y(T) = y_T. \tag{3.2}$$

Où $^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $g : C(J, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $y_T \in \mathbb{R}$.
Ce chapitre est basé sur les travaux[2, 3, 5].

Lemme 3.1.1 *[19] Soit $1 < \alpha < 2$ et soit $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution d'équation intégrale d'ordre fractionnaire.*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{T\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - (\frac{t}{T} - 1) g(y) + \frac{t}{T} y_T.$$

Si est seulement si y est solution du problème aux limites d'équation différentielle fractionnaire

$$^cD^\alpha y(t) = h(t),\ t \in [0, T]$$
$$y(0) = g(y),\ y(T) = y_T.$$

Preuve. D'après le lemm 1.3.2 on a :

$$y(t) = C_0 + C_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

on doit trouver C_0 et C_1,
on a

$$y(0) = C_0,$$

mais d'après la condition non locale

$$y(0) = g(y),$$

donc : $C_0 = g(y)$.

D'autre part

$$y(T) = C_0 + C_1 T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Donc :

$$y(T) = g(y) + C_1 T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds,$$

c'est à dire :

$$C_1 = \frac{1}{T} y(T) - \frac{1}{T} g(y) - \frac{1}{T\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
y(t) &= g(y) + \left[\frac{1}{T} y(T) - \frac{1}{T} g(y) - \frac{1}{T\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds\right] t \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\
&= g(y) + \frac{t}{T} y_T - \frac{t}{T} g(y) - \frac{t}{T\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{t}{T\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds \\
&\quad - \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y) + \frac{t}{T} y_T.
\end{aligned}$$

■

Définition 3.1.1 *Une fonction $y \in C^2(J,\mathbb{R})$ est dite une solution de $(3.1)-(3.2)$ si y vérifie l'equation integrale suivante :*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - \frac{t}{T\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - (\frac{t}{T}-1)g(y) + \frac{t}{T}y_T.$$

3.2 Résultats principaux

On va donner un premier résultat sur l'unicité de la solution de $(3.1)-(3.2)$ on utilisons le théorème de contraction de Banach.

Théorème 3.2.1 *On suppose que les hypothèses suivante sont vérifiées :*
(H_1) : *Il existe une constante $K_1 > 0$ telle que :*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq K_1|u-v| \qquad \textit{pour tout } t \in J, \textit{ et tout } u,v \in \mathbb{R}.$$

(H_2) : *Il existe une constante $K_2 > 0$ telle que :*

$$|g(y) - g(z)| \leq K_2|y-z|, \textit{ pour tout } y,z \in C([0,T],\mathbb{R}).$$

$$\textit{Si} \quad \left[K_2 + \frac{2K_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] < 1, \tag{3.3}$$

alors le problème avec conditions non locales $(3.1)-(3.2)$ admet une solution unique sur J.

Preuve. On transforme le problème $(3.1)-(3.2)$ en un problème de point fixe, on définit l'opérateur :
$G : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ définie par :

$$G(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - \frac{t}{T\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - (\frac{t}{T}-1)g(y) + \frac{t}{T}y_T.$$

Il est clair que les points fixes de l'opérateur G sont solution du problème $(3.1)-(3.2)$,
On va montrer que G est une contraction.
Soient $x, y \in C([0,T],\mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|G(x)(t) - G(y)(t)| &= |\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds - \frac{t}{T\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds \\
&- (\frac{t}{T}-1)g(x) + \frac{t}{T}x_T - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \\
&+ \frac{t}{T\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds + (\frac{t}{T}-1)g(y) - \frac{t}{T}y_T|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|G(x)(t)-G(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds + |g(x)-g(y)| \\
&\leq \frac{K_1\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{K_1\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds \\
&+ K_2\|x-y\|_\infty \\
&\leq \frac{K_1\|x-y\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}t^\alpha + \frac{K_1\|x-y\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + K_2\|x-y\|_\infty \\
&\leq \frac{2K_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|x-y\|_\infty + K_2\|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Prenons le supremum sur $[0,T]$, on a

$$\|G(x)-G(y)\|_\infty \leq \left(\frac{2K_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + K_2\right)\|x-y\|_\infty,$$

par la condition (3.3), l'opérateur G est une contraction et donc G a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach, qui donne une solution intégrale unique au problème $(3.1)-(3.2)$ sur J. ■

Théorème 3.2.2 *On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

(L_1) *la fonction* $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *est continue.*

(L_2) *Il existe une constant* $M_1>0$ *:*

$$|f(t,u)|\leq M_1, \qquad \textit{Pour tout } t\in J \textit{ et pour tout } u\in\mathbb{R}.$$

(L_3) *Il existe une condition* $M_2>0$ *telle que :*

$$|g(y)|\leq M_2, \qquad \textit{pour tout } y\ \in C([0,T],\mathbb{R}).$$

Alors le problème aux limites non locales $(3.1)-(3.2)$ *possède au moins une solution sur* J.

Preuve. On va utiliser le théorème de point fixe de Leray-Schauder, la démonstration sera faite en quatre étapes comme précédement.

Etape 1 : G est continu.

Soit y_n une suite dans $C([0,T],\mathbb{R})$ convergente pour la norme $\|.\|_\infty$ vers une limite y ie $\lim\limits_{n\to+\infty}\|y_n-y\|_\infty=0$.
On va montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|G(y_n)-G(y\|_\infty=0$, pour tout $t\in J$

$$\begin{aligned}
|G(y_n(t)-G(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds+|g(y_n)-g(y)|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds\\
&+ |g(y_n)-g(y)|\\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds+\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds\right]\\
&+ |g(y_n)-g(y)|\\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}(t^\alpha+T^\alpha)+|g(y_n)-g(y)|.
\end{aligned}$$

En majorant on aura :

$$|G(y_n)(t)-G(y)(t)|\leq \frac{2T^\alpha||f(.,y_n(.))-f(.,y(.))||_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}+|g(y_n-g(y)|.$$

Prenons le supremum sur $[0,T]$, on obtient

$$\|G(y_n)-G(y)\|_\infty\leq \frac{2T^\alpha||f(.,y_n(.))-f(.,y(.))||_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)}+|g(y_n-g(y)|.$$

Puisque $f$et g son continus, on aura $\|G(y_n)-G(y)\|_\infty\to 0$ quand $n\to\infty$, donc G est continue.

Etape 2 : G transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformement borné dans $C(J,\mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta>0$, il existe une constante strictement positive, l telle que pour tout $y\in B_\eta$

$$B_\eta=\{y\in C([0,T],\mathbb{R}):\|y\|_\infty\leq\eta\},$$

on veut montrer que

$$\|G(y)\|_\infty \leq l,$$

Pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
|G(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + 2|g(y)| + |y_T|.
\end{aligned}$$

D'après (L_2) et (L_3) on aura

$$\begin{aligned}
|G(y)(t)| &\leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + 2M_2 + |y_T| \\
&\leq \frac{M_1}{\alpha\Gamma(\alpha)} t^\alpha + \frac{M_1}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + 2M_2 + |y_T|.
\end{aligned}$$

On majorant on aura :

$$\begin{aligned}
|G(y)(t)| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha + \frac{M_1}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha + 2M_2 + |y_T| \\
&\leq \frac{2M_1 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 2M_2 + |y_T|,
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, T]$, on a :

$$\|G(y)\|_\infty \leq \frac{2M_1 T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 2M_2 + |y_T| = l.$$

Donc $G(B_\eta)$ est uniformement borné.

Etape 3 : G transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $C([0, T], \mathbb{R})$.

Soit $t_1,\ t_2\ \in [0, T],\ t_1 < t_2,\ B_\eta$ un ensemble borné de $C([0, T], \mathbb{R})$ comme à l'étape deux, et soit $y \in B_\eta$

$$\begin{aligned}
|G(y)(t_2)-G(y)(t_1)| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds-\frac{t_2}{T\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\right.\\
&- (\frac{t_2}{T}-1)g(y)+\frac{t_2}{T}y_T-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\\
&+ \left.\frac{t_1}{T\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds+(\frac{t_1}{T}-1)g(y)-\frac{t_1}{T}y_T\right|\\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]f(s,y(s))ds\right.\\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds+\frac{(t_1-t_2)}{T\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\\
&+ \left.\frac{t_1-t_2}{T}g(y)+\frac{t_2-t_1}{T}y_T\right|\\
&\leq \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]f(s,y(s))ds\right.\\
&+ \left.\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\right|\\
&+ \frac{(t_2-t_1)}{T\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds+\frac{t_2-t_1}{T}|g(y)|+\frac{t_2-t_1}{T}|y_T|\\
&\leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha-1}-(t_1-s)^{\alpha-1}]ds\right|+\frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha-1}ds\\
&+ M_1\frac{(t_2-t_1)}{T\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}ds+\frac{t_2-t_1}{T}M_2+\frac{t_2-t_1}{T}|y_T|\\
&\leq \frac{M_1}{\alpha\Gamma(\alpha)}[(t_2-t_1)^\alpha+t_1^\alpha-t_2^\alpha]+\frac{M_1}{\alpha\Gamma(\alpha)}(t_2-t_1)^\alpha+M_1\frac{t_2-t_1}{T\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha\\
&+ \frac{t_2-t_1}{T}M_2+\frac{t_2-t_1}{T}|y_T|.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
|G(y)(t_2)-G(y)(t_1)| &\leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha+1)}[(t_2-t_1)^\alpha+t_1^\alpha-t_2^\alpha]+\frac{M_1}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha\\
&+ M_1\frac{(t_2-t_1)}{T\,\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha+\frac{t_2-t_1}{T}M_2+\frac{t_2-t_1}{T}|y_T|\\
&\leq \frac{2M_1}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^\alpha+\frac{M_1}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^\alpha-t_2^\alpha)\\
&+ (\frac{M_1T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{M_2}{T}+\frac{|y_T|}{T})(t_2-t_1).
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité précédente tend vers 0.
Alors, l'ensemble $Y(t) = \{G(y)(t) : y \in B_\eta\}$ est précompact dans $\mathbb{R}$. D'aprés les étapes précédentes et le Théorème d'Arzelá-Ascoli, nous pouvons conclure que G est un opérateur complètement continu.

Etape 4 : Estimations à priori des solutions.
Il reste à montrer que :
$\varepsilon = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda G(y) \quad pour \quad 0 < \lambda < 1\}$ est borné.
Soit $y \in \varepsilon$, alors $y = \lambda F(y)$ pour $0 < \lambda < 1$.
Donc Pour chaque $t \in [0,T]$, on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - \frac{\lambda t}{T\,\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \\ &- \lambda(\frac{t}{T}-1)g(y) + \lambda\frac{t}{T}y_T. \end{aligned}$$

D'après (L_2) et (L_3) on a :

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds + \frac{M_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds + 2M_2 + |y_T| \\ &\leq \frac{M_1}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + \frac{M_1}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + 2M_2 + |y_T|. \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque $t \in [0,T]$, on a

$$\|y\|_\infty \leq \frac{2M_1}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha + 2M_2 + |y_T| = R.$$

Où R est une constante strictement positif. Cela montre que l'ensemble ε est borné. En conséquence du theoreme 1.4.2 du point fixe de Leray-Schauder, nous déduisons que G admet au moins un point fixe qui est une solution du probleme $(3.1) - (3.2)$. ■

Nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problème $(3.1) - (3.2)$.

Théorème 3.2.3 *Supposons que les conditions du théorème 3.2.2 sont vérifiées. Supposons que de plus il existe une constante positive K telle que :*

$$|f(t,u(t)) - f(t,v(t))| \leq K\|u-v\|_\infty, \qquad \forall\, t \in\; J \quad et \quad pour \quad tout \quad u,v \in C(J,\mathbb{R}).$$

Alors le problème $(3.1) - (3.2)$ admet une solution unique sur J.

Preuve. L'éxistance d'au moins une solution $y(t)$ du problème $(3.1) - (3.2)$ est assurée par le théorème 3.2.2 pour prouver l'unicité de $y(t)$ on va supposer que le $(3.1) - (3.2)$

admet une autre solution.
Soit $z(t)$ cette autre solution , alors pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
|y(t) - z(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right. \\
&- \frac{t}{T\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - (\frac{t}{T} - 1) g(y) \\
&+ \frac{t}{T} y_T - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, z(s)) ds \\
&+ \left. \frac{t}{T\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, z(s)) ds + (\frac{t}{T} - 1) g(z) - \frac{t}{T} z_T \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \\
&+ \frac{t}{T\,\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, z(s)) - f(s, y(s))| ds. \\
&\leq \frac{2K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \|y - z\|_\infty ds.
\end{aligned}
$$

Maintenant, on va utiliser le lemme de Granwall avec $\varphi(t) \equiv 0$ et $u(t) = |y(t) - z(t)|$,

donc

$$y(t) = z(t),$$

d'où on aura l'unicité de la solution du problème $(3.1) - (3.2)$.

■

3.3 Exemple

Soit le problème aux limites non locales :

$$
{}^cD^\alpha y(t) = \frac{e^{-t}|y(t)|}{(9 + e^t)(1 + |y(t)|)}, t \in J = [0, 1], \alpha \in]1, 2[, \tag{3.4}
$$

$$
y(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i), y(1) = 0, \tag{3.5}
$$

où $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < 1$ et

$c_i,\ i = 1, ..., \ n$ sont des costantes positives avec $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i < \frac{4}{5}$.

Ce problème possède une solution unique sur [0,1].
Soit

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}x}{(9+e^t)(1+x)}, \qquad \textit{pour tout}\,(t,x)\ \in J\times[0,\infty[,$$

et
$g(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i y(t_i)$.

Soient $x, y \in [0, +\infty[$ et $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \left|\frac{e^{-t}x}{(9+e^t)(1+x)} - \frac{e^{-t}y}{(9+e^t)(1+y)}\right| \\
&= \frac{e^{-t}}{9+e^t}\left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| \\
&= \frac{e^{-t}}{9+e^t}\left|\frac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)}\right| \\
&= \frac{e^{-t}|x-y|}{(9+e^t)(1+x)(1+y)} \\
&\le \frac{e^{-t}}{(9+e^t)}|x-y| \\
&\le \frac{1}{10}|x-y|.
\end{aligned}$$

Donc la condition (H_1) est satisfaite avec $k_1 = \frac{1}{10}$.
Soient $x, y \in [0, +\infty[$

$$|g(x) - g(y)| = |\sum_{i=1}^{n} c_i x(t_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i y(t_i)|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} c_i |x-y|.$$

Ainsi la condition (H_3) est satisfaite avec $k_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i$.
On va vérifier la condition (3.3) avec T=1

$$\frac{2K_1T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + k_2 = \frac{1}{5\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i,$$

Comme $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i < \frac{4}{5}$, donc

$$\frac{1}{5\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i < 1 \Leftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > 1.$$

Qui est satisfait pour $\alpha \in]1.2[$. D'après le théorème 3.2.1 le problème $(3.4)-(3.5)$ admet une unique solution sur $[0,1]$.

Chapitre 4

Problèmes aux limites avec des conditions intégrales

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse au résultat d'éxistance des solutions du problème aux limites avec des conditions intégrales suivantes :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), pour\ \ tout\ \ t \in J = [0, T],\ 0 < \alpha < 1, \tag{4.1}$$

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s)ds = y(T). \tag{4.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ la dérivée fractionnaire au sens de Capito, et $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est une fonction donnée satisfaisant certaines hypothèses qui seront spécifiée plus tard et $\mu \in \mathbb{R}^{*}$.
Ce chapitre est basé sur les travaux[6].
Pour les résultats de l'éxistance du problème $(4.1) - (4.2)$, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.1.1 *Soit* $0 < \alpha < 1$ *et soit* $h \in C(J, \mathbb{R})$ *une fonction donnée, alors le problème aux limites :*

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t), \qquad t \in J, \tag{4.3}$$

$$y(0) + \mu \int_0^T y(s)ds = y(T) \quad \mu \in \mathbb{R}^{*}, \tag{4.4}$$

admet une solution unique donnée par :

$$y(t) = \int_0^T G(t, s)h(s)ds,$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green définie par :

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{\text{-}(T\text{-}s)^{\alpha}+\alpha T(t\text{-}s)^{\alpha-1}}{T\,\Gamma(\alpha+1)}+\dfrac{(T\text{-}s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} & ,si\quad 0\leq s<t\\ \dfrac{\text{-}(T\text{-}s)^{\alpha}}{T\,\Gamma(\alpha+1)}+\dfrac{(T\text{-}s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)} & ,si\quad t\leq s\leq T\end{cases}\tag{4.5}$$

Preuve. D'après le lemme 1.3.2, nous pourons réduire le problème $(4.3)-(4.4)$ a une équation intégrale équivalente :

$$y(t)=I^{\alpha}h(t)-C_0$$

$$y(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds-C_0,\tag{4.6}$$

pour une constante $C_0\in\mathbb{R}$. Nous avons par intégration

$$\int_0^T y(s)ds=\int_0^T\Big(\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(\tau)d\tau-C_0\Big)ds.$$

On utilisons la linéarité de l'intégrale et on calculons l'integrale d'une constante, on aura :

$$\int_0^T y(s)ds=\int_0^T\Big(\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(\tau)d\tau\Big)ds-C_0T.$$

On utilisant le théorème d'intégration de Fubini on aura :

$$\int_0^T y(s)ds=\int_0^T\Big(\int_\tau^T\frac{(s-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds\Big)h(\tau)d\tau-C_0T$$

$$\int_0^T y(s)ds=\int_0^T\frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}h(\tau)d\tau-C_0T.\tag{4.7}$$

Appliquant la condition intégrale (4.4) on aura :

$$y(0)=-C_0$$

$$y(T)=\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds-C_0.$$

On doit trouver C_0.
D'après (4.4) on a :

$$y(0)+\mu\int_0^T y(s)ds=y(T),$$

en remplaçant $y(0)$ et $y(T)$, on va trouver

$$-C_0+\mu\int_0^T y(s)ds=\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds-C_0.$$

C'est à dire :

$$\mu\int_0^T y(s)ds=\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds.$$

D'après (4.7) on aura :

$$\mu\bigg(\int_0^T\frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}h(\tau)d\tau-C_0T\bigg)=\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds,$$

donc

$$\mu\int_0^T\frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}h(\tau)d\tau-\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds=\mu C_0T.$$

C'est à dire :

$$C_0=\frac{1}{\mu T}\left(\mu\int_0^T\frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}h(\tau)d\tau-\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds\right)$$

$$=\frac{1}{T}\left(\int_0^T\frac{(T-\tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}h(\tau)d\tau-\int_0^T\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)}h(s)ds\right).$$

$$C_0=\frac{1}{T}\int_0^T\left(-\frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)}+\frac{(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)})\right)h(s)ds.$$

On remplaçant C_0 dans (4.6) on aura la solution unique du problème $(4.3)-(4.4)$ est :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds + \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{-(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)}\right]h(s)ds \\
y(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}h(s)ds + \frac{1}{T}\Bigg[\int_0^t \left(\frac{-(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds \\
&+ \int_t^T \left(\frac{-(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds\Bigg] \\
&= \frac{1}{T}\int_0^t \frac{\alpha T(t-s)^{\alpha-1}}{\alpha\Gamma(\alpha)}h(s)ds + \frac{1}{T}\int_0^t \left(\frac{-(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds \\
&+ \frac{1}{T}\int_t^T \left(\frac{-(T-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\mu\Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{\alpha T(t-s)^{\alpha-1}-(T-s)^{\alpha}}{T\,\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds \\
&+ \int_t^T \left(\frac{-(T-s)^{\alpha}}{T\,\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds.
\end{aligned}$$

On aura :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t \left(\frac{-(T-s)^{\alpha}+\alpha T(t-s)^{\alpha-1}}{T\,\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds \\
&+ \int_t^T \left(\frac{-(T-s)^{\alpha}}{T\,\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{T\mu\Gamma(\alpha)}\right)h(s)ds \\
&= \int_0^T G(t,s)h(s)ds.
\end{aligned}$$

■

Nous définissons ce que nous exprimons être une solution du problème aux limites avec des conditions intégrales $(4.1)-(4.2)$

Définition 4.1.1 *Une fonction $y \in C^1(J,\mathbb{R})$ est dite solution de $(4.1)-(4.2)$ si y verifie l'équation suivante :*

$$y(t) = \int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds.$$

Remarque La fonction $t \in J \to \int_0^T |G(t,s)|ds$ est continue sur J, et est donc bornée. Soit :

$$\hat{G} = sup\{\int_0^T |G(t,s)|ds,\ t \in J\}.$$

4.2 Résultats principaux

Notre premier résultat est basée sur le théorème de point fixe de Banach.

Théorème 4.2.1 *Supposons que :*

(H_1) *Il existe une constante k>0, tel que :*

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq k|u-v|, \qquad \textit{pour tout}\, t \in J \,\textit{et pour chaque}\, u,v \in \mathbb{R}.$$

$$Si \quad K\hat{G} < 1. \tag{4.8}$$

Alors, il existe une solution unique pour le problème aux limite $(4.1) - (4.2)$.

Preuve. Considérons l'opérateur $N : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ définie par :

$$N(y)(t) = \int_0^T G(t,s) f(s,y(s)) ds,$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green donnée par (4.5). D'après le lemme 4.1.1, les points fixes de l'opérateur N sont les solutions du problème $(4.1) - (4.2)$.
Nous montrons que N est une contraction. Considérons $x, y \in C(J,\mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
|N(x)(t) - N(y)(t)| &= \left| \int_0^T G(t,s) f(s,x(s)) ds - \int_0^T G(t,s) f(s,y(s)) ds \right| \\
&= \left| \int_0^T G(t,s)(f(s,x(s)) - f(s,y(s))) \right| ds \\
&\leq \int_0^T |G(t,s)||(f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds,
\end{aligned}$$

d'après (H_1) on aura :

$$\begin{aligned}
|N(x)(t) - N(y)(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)| k |x-y| ds \\
&\leq k\|x-y\|_\infty \int_0^T |G(t,s)| ds,
\end{aligned}$$

d'après la remarque précédente on aura :

$$|N(x)(t) - N(y)(t)| \leq k\hat{G}\|x-y\|_\infty.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$|N(x) - N(y)| \leq L\|x-y\|_\infty,$$

avec :

$$L = k\hat{G} < 1.$$

Prenons le supremum sur $t \in [0, T]$, nous avons

$$\|N(x) - N(y)\|_\infty \leq L\|x - y\|_\infty,$$

puisque $L < 1$, l'opérateur N est une contraction et donc N a un unique point fixe par le principe de contraction de Banach, qui donne une solution intégrale unique au problème $(4.1) - (4.2)$.

■

Le deuxième résultat pour le problème $(4.1) - (4.2)$ est basée sur le théorème de point fixe de Leray- schauder.

Théorème 4.2.2 *Le problème aux limites* $(4.1) - (4.2)$ *admet au moins une solution si les conditions suivantes sont satisfaites.*

(C_1) $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*

(C_2) *ils existent* $p \in C(J, \mathbb{R}^+)$ *et* $\psi : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ *continue et non décroissante telle que :* $|f(t, u)| \leq p(t)\psi(|u|)$, *pour tout* $t \in J$ *et tout* $u \in \mathbb{R}$.

(C_3) *il existe* $M > 0$ *tel que : :*

$$\frac{M}{P^*\psi(M)\hat{G}} > 1, \tag{4.9}$$

où

$$P^* = \{supP(s), s \in J\}.$$

Preuve. Nous montrerons que l'opérateur N satisfait aux conditions du théorème point fixe de Leray-Schauder.
La preuve est donnée en quatre étapes.
Etape 1 : N est continu.
Soit $\{y_n\}$ une suite dans $C(J, \mathbb{R})$, telle que $y_n \to y$ dans $C(J, (R))$, alors pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$|(N(y_n)(t) - N(y)(t)| = \left| \int_0^T G(t,s)f(s, y_n(s))ds - \int_0^T G(t,s)f(s, y(s))ds \right|$$

$$\begin{aligned} |(N(y_n)(t) - N(y)(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)||f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|ds \\ &\leq G^*\|f(., y_n) - f(., y)\|_\infty. \end{aligned}$$

Prenons le supremum sur [0, T], on obtient $\|N(y_n) - N(y)\|_\infty \leq G^*\|f(.,y_n) - f(.,y)\|_\infty$.
Puisque f est continu, le théorème de convergence dominé par Lebesgue implique que :
$\|N(y_n) - N(y)\|_\infty \to 0$ quand $n \to \infty$ donc N est continue.
Etape 2 : N transforme tout ensemble borné en un ensemble uniformement borné dans $C(J,\mathbb{R})$.
Soit : $C = \{y \in C(J,\mathbb{R})), \|y\|_\infty \leq M\}$.
C est un sous-ensemble fermé et convexe de $C(J,\mathbb{R})$,
Soit $y \in C$, alors pour tout $t \in J$

$$|N(y)(t)| \leq \int_0^T |G(t,s)||f(s,y(s))|ds,$$

de (C_2) on aura :

$$\begin{aligned} |N(y)(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)|P(S)\psi(|y(s)|)ds \\ &\leq P^*\psi(\|y|\|_\infty)\int_0^T |G(t,s)|ds. \end{aligned}$$

Donc :

$$\|Ny|\|_\infty \leq P^*\psi(M)\hat{G} = l,$$

où l est uné constante positif,
et donc $N(C)$ est uniformement borné.
Etape 3 : N transforme tout ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $C([0,T],\mathbb{R})$
.
Soit $y \in C$, et $t_1,\ t_2\ \in J,\ t_1 < t_2$; alors :

$$\begin{aligned} |N(y)(t_2) - N(y)(t_1)| &= \left|\int_0^T G(t_2,s)f(s,y(s))ds - \int_0^T G(t_1,s)f(s,y(s))ds\right| \\ &\leq \int_0^T \big|G((t_2,s) - G(t_1,s)|\ |f(s,y(s))\big|ds, \end{aligned}$$

d'après (C_2) on a :

$$\begin{aligned} |N(y)(t_2) - N(y)(t_1)| &\leq \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)|p(s)\psi(|y(s)|)ds \\ &\leq P^*\psi(M)\int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)|ds. \end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro.
Alors, l'ensemble $Y(t) = \{N(y)(t) : y \in C\}$ est précompact dans $\mathbb{R}$.

D'aprés les étapes précédentes et le Théorème d'Arzelá-Ascoli, nous pouvons conclure que N est un opérateur complètement continu.

Etape 4 Soit $y \in C$ nous montrerons que $Ny \in C$, pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} |Ny(t)| &= \left| \int_0^T G(t,s) f(s,y(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^T |G(t,s)||f(s,y(s))| ds. \end{aligned}$$

D'après (C_2) on a :

$$\begin{aligned} |Ny(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)| P(s) \psi(|y|) ds \\ &\leq P^* \psi \|y\|_\infty \int_0^T |G(t,s)| ds. \end{aligned}$$

Ainsi : $\|Ny\|_\infty \leq P^* \psi(M) \hat{G}$,

d'après (4.9) on a :

$$P^* \psi(M) \hat{G} < M,$$

et on aura :

$$\|Ny\|_\infty \leq M.$$

Par conséquent, on déduit que Nadmet un point fixe y qui est solution du problème au limite $(4.1) - (4.2)$.
■ Nous donnons un résultat d'unicité des solutions du problème $(4.1) - (4.2)$.

Théorème 4.2.3 *Supposons que les conditions du théorème* 4.2.2 *sont vérifiées, supposons que de plus qu'il existe une constante positive K telle que :*

$$|f(t,u(t)) - f(t,v(t))| \leq K \|u - v\|_\infty, \forall t \in J \quad et \quad pour \quad tout \quad u, v \in C(J, \mathbb{R}).$$

Alors le problème $(4.1) - (4.2)$ *admet une unique solution sur J.*

Preuve. L'éxistance d'au moins une solution $y(t)$ du problème $(4.1) - (4.2)$ est assurée par le théorème 4.2.2 pour prouver l'unicité de $y(t)$ on va supposer qu'elle admet une autre solution. Soit $z(t)$ une autre solution du problème $(4.1) - (4.2)$ alors pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|y(t)-z(t)| &= \left|\int_0^T G(t,s)f(s,y(s))ds - \int_0^T G(t,s)f(s,z(s))ds\right| \\
&\leq \int_0^T |G(t,s)||f(s,y(s))-f(s,z(s))|ds \\
&\leq K\int_0^T |G(t,s)|\ \|y-z\|_\infty ds.
\end{aligned}$$

Maintenant, on va utiliser le lemme de Granwall, avec $\varphi(t) \equiv 0$ et $u(t) = |y(t) - z(t)|$ donc

$$y(t) = z(t),$$

d'où on aura l'unicité de la solutiondu problème $(4.1) - (4.2)$.

■

4.3 Exemple

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$^{C}D^{\alpha}y(t) = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}|y(t)|, \qquad t\in\ J=[0,1],\ \alpha\in]0,1[\tag{4.10}$$

$$y(0) + \int_0^1 y(s)ds = y(1). \tag{4.11}$$

Soit :

$$f(t,x) = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}x, \qquad (t,x)\in J\times[0,\infty).$$

$\mu = 1$, $T = 1$.
Soit $x, y \in [0,\infty]$ et $t \in J$, alors on a :

$$|f(t,x)-f(t,y)| = |\frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}x - \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}y|$$

$$= |\frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}(x-y)|$$

$$= |\frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}||x-y|,$$

comme $\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}}{10(1+\mathrm{e}^{\mathrm{t}})} > 0$. Donc :

$$|f(t,x) - f(t,y)| = \frac{e^{-t}}{10(1+e^t)}|x-y|.$$

Alors :

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \frac{1}{20}|x-y|.$$

D'où la condition (H_1) est vérifiée pour $k = \frac{1}{20}$.
D'après (4.5) G est donnée par :

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{-(1-s)^{\alpha} + \alpha(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , si \;\; 0 \leq s < t \\ \dfrac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \dfrac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , si \;\; t \leq s \leq 1 \end{cases} \tag{4.12}$$

On a

$$\int_0^1 G(t,s)ds = \int_0^t G(t,s)ds + \int_t^1 G(t,s)ds,$$

on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 G(t,s)ds &= \int_0^t \left(\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) ds \\
&+ \int_t^1 \left(\frac{-(1-s)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right) ds \\
&= \left[\frac{(1-s)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(t-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} - \frac{(1-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right]_0^t \\
&+ \left[\frac{(1-s)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1-s)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right]_t^1 \\
&= \left[\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1-t)^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} - \frac{1}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \right. \\
&+ \left. \frac{t^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \right] + \left[-\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{(1-t)^{\alpha}}{(\Gamma(\alpha+1)} \right] \\
&= \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} - \frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{(1-t)^{\alpha}}{(\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\hat{G} < \frac{4}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{3}{\Gamma(\alpha+2)} < 20 \quad pout \;\; tout \;\; \alpha \in]0,1][,$$

et on aura :

$$\frac{1}{20}\hat{G} < 1.$$

Le problème aux limites $(4.10)-(4.11)$ admet une unique solution.

Conclusion générale

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions d'un problème au limite pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo en utilisant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-schauder.

on a présenté aussi quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions d'un problème au limite avec des conditions non locales pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo en appliquant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-schauder.

Ensuite on a présenté quelques résultats d'existences et d'unicité des solutions d'un problème au limite avec des conditions intégrable pour des équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo et on a utilisé les mêmes théorèmes de point fixe.

Bibliographie

[1] S. Abbes, M. Benchohra and G M. N'Guerekata, textit Topics in Fractional Differential Equations Springer-Verlag, New York, 2012.

[2] R.P. Agarwal, M. Benchohra and S. Hamani, A Survey on Existence Result for Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations And Inclusions, *Acta. Appl. Math.*,109, (2010), 973-1033.

[3] M. Benchohra, S. Hamani, Nonlinear boundary Value Problems for Differential Inclusions with Caputo Fractional Derivative. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* , vol.32,(2008),115-130.

[4] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, Boundary Value Problems for Differential Equations with Fractional Order, *Surv. Math. Appl.* 3 (2008), 1-12.

[5] M. Benchohra, S. Hamani and S.K. Ntouyas, Boundary Value Problems for Differential Equations with Fractional Order and Nonlocal Conditions, *Nonlinear Anal.*, 71, (2009), 2391-2396.

[6] M.Benchohra, F.Ouaar, Existance Results for Nonlinear Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions, *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*,vol.2, 4, (2010), 7-15.

[7] R. Campbell, *Les Integrales Eulériennes et Leurs Application Etude Approfondie de La Fonction Gamma*,Collection Universitaire de Mathématiques,Dunod,Paris,1966.

[8] S. Das, *Fractional Calculus for System Identification and Controls*, Springer, New York, 2007.

[9] L. Debnath,A brief historical introduction to fractional calculus, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (2004)vol. 35, no. 4, 487–501.

[10] J.P. Denailly, *Analyse Numérique et Equations differentielles*, Collection Grenoble Sciences, France, 2006.

[11] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, springer, New York, 2004.

[12] K. Diethelm, A.D. Freed, On The Solution Of Nonlinear Fractional Order Differential Equations Used in The Modeling of Viscoplasticity, *in : F. Keil, W. Mackens, H. Voss, J. Werther (Eds.), Scientific Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties, Springer-Verlag, Heidelberg*, 1999 , pp. 217-224.

[13] W.G. Glockle, T. F. Nonnenmacher, A Fractional Calculus Approach of Self-SimilarProtein Dynamics, *Biophys.* , J. 68 (1995), 46-53.

[14] M. Godefrot, *La Fonction Gamma : Theorie, Histoire, Bibliographie*, Cornell University Library,Paris, 1901.

[15] X. Gourdon, *Les Maths en Tete*, Ellipses, France, 2008.

[16] A. Granas, J. Dugundji *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003. Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[17] J. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functoinal Differential Equations*, Applied Mathematicals Sciences, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[18] R. Hilfer, *in Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.

[19] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear Differential Equations with the Caputo Fractional Derivative in the space of continuously differentiable functions, *Differential Equations*, 41, (2005),84-89.

[20] A. A. Kilbas, Hari M. Srivastava, and Juan J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[21] F. Mainardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, in "Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics" (A. Carpinteri and F.Mainardi, Eds), *Springer-Verlag*, Wien, (1997),291-348,

[22] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations*, John Wiley, New York, 1993.

[23] K.B.Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, London, 1974.

[24] M.D. Ortigueira, *In Fractional Calculus for Scientists and Engineers*, Springer, Dordrecht, 2011.

[25] I. Podlubny, *Fractional Differential Equation*, Academic Press, San Diego, 1999.

[26] S. G. Samko, A.. A. Kilbas , O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon, Breach, Yverdon, 1993.

[27] H. Sheng, Y. Chen, T. Qiu, *In Fractional Processes and Fractional-order Signal Processing ; Techniques and Applications* , Springer-Verlag, London, 2011.

[28] V.E. Tarasov, *In Fractional Dynamics : Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media* ,Springer, Heidelberg, 2010.

[29] S. Zhang, Positive Solutions for Boundary-Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations , *Electron. J. Differ. Equ.* ,36 ,(2006), 1–12.

[30] Y.Zhou, *Basic Theory of Fractional Differential Equations*, World Scientific, New Jersey, 2014.