République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences

Département des Mathématiques et de l'Informatique

Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique

Option : Equations différentielles et modélisation Présenté par :

Melle. Ilhem Riahi

Calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et application

Encadrant :

M.Ahmed Hammoudi

Professeur à C.U.B.B.A.T.

Soutenu en 2018

Devant le jury composé de :

Président :	M. Tawfiq Fawzi Mami (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Examinateur :	M. Mekhalfi Khiera (M.C.B)	C.U.B.B.A.T.
Encadrant :	M. Ahmed Hammoudi (Professeur)	C.U.B.B.A.T.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ma très chère mère ,

A mon cher père qui m'ont toujours soutenu ,

et qui m'ont aidé a affronter les difficultés,

A tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patiences, leur persévérances.

A mes très chères sœurs et frères,

A toute ma famille.

A tous les amis,

A tous les étudiants de Centre Université

de

"BELHADJ – BOUCHAIB".

Remerciements

En premier lieu, je remercie "ALLAH" le tout puissant qui m'a donné la force, l'amour de savoir et surtout la patience pour pouvoir produire ce modeste travail.

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail car la réalisation de ce Mémoire n'aurait pas pu se faire sans l'applui de plusieurs personnes que je tiens à remercier.

Je tiens à adresser mes sincères gratitudes et mes remerciements à mon encadreur le professeur Monsieur Ahmed Hammoudi que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant la durée de ma Mémoire.
Je veux exprimer un grand merci à tous les membres du jury : Monsieur Tawfiq Fawzi Mami, Madame Mekhalfi Khiera, pour m'avoir fait l'honneur d'être membre de mon jury.
Je tiens à remercier tous les enseignants de "département Mathématiques et Informatique".
Enfin je remercie tout ma famille, et tout mes amis, qui de prés ou de loin m'ont supporté,soutenu et encouragé tout au long de ces années.

Résumé

L'objective essentielle de cette étude consiste à connaitre le calcul différentiel fractionnaire.
On s'intéresse au calcul différentiel fractionnaire de `Riemann-Liouville`*. Dans ce thème, nous présentons des définitions utiles tout au long de ce mémoire, nous rappelons une identification de l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de* `Riemann-Liouville` *, quelques propriétés concernant ces calculs, Et à la fin nous avons discuté l'existence et l'unicité des solutions d'un problème fractionnaires en utilisant la théorie des points fixes.*

Mots-clés : *Calcul différentiel fractionnaire, Riemann-Liouville, Problème fractionnaire, LA théorie des point fixe .*

Sommaire

Notations iii

Introduction Générale v

I *Préliminaires : " Généralités "* 1

1 Rappel sur le calcul différentiel et intégral 1

2 Fonctions spéciales pour le calcul fractionnaire 3

2.1 Fonction Gamma 3

2.2 Fonction Bêta 6

2.3 Fonction de Mittag-Leffler 9

3 Définitions et Théorèmes d'analyses Fonctionnelles 10

3.1 Définitions 10

3.2 Théorème du point fixe de type Leray Schauder 13

3.3 Théorème du point fixe de Banach 14

II *Intégrale et dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville* 15

1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville 15

2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville 26

3 Relation entre intégrale et dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 38

III *Équations différentielles d'ordres fractionnaire de Types Riemann-Liouville (R-L)* 42

1 Équations différentielles fonctionnelles de type Cauchy 42

1.1 Existence de solution 43

1.2 Unicité de solution 49

Conclusion 52

Bibliographie 54

NOTATIONS

Les ensembles

$\mathbb{N}$: *L'ensemble des entiers naturelles*

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$: *L'ensemble des nombres réels (résp.complexes)*

$\mathbb{R}_+$: *L'ensemble des nombres réels positifs* $[0, \infty)$

Les opérateurs

$\mathfrak{D}$: *L'opérateur dérivé .*

$\mathfrak{D}^\alpha$: $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *l'opérateur dérivé fractionnaire de* `Riemann-Liouville`.

I : *L'opérateur identité .*

$\mathfrak{I}$: *L'opérateur intégrale .*

$\mathfrak{I}^\alpha$: $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *L'opérateur intégrale fractionnaire de* `Riemann-Liouville`.

Les espaces

$\mathcal{C}^k([a, b])$: *L'espaces des fonctions continument dérivable jusqu'à l'ordre* k.

$\mathcal{A}^k([a, b])$: *L'espace des fonctions absolument continue dérivable jusqu'à l'ordre* $(k-1)$.

$L_p([a, b])$: L'espace de Lebesgue

Les normes

$\| \cdot \|_\infty$: la norme de Chebyshev(la norme de sup); $\| f \|_\infty = \sup\limits_{a \leqslant \mathrm{x} \leqslant b} |f(\mathrm{x})|$

$\| \cdot \|_p$: la norme L_p $(1 \leqslant p < \infty)$; $\| f \|_p = \left(\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} | f |^p \mathrm{dx} \right)^{\frac{1}{p}}$

Introduction Générale

Les modèles théoriques ont toujours joué un rôle très important dans la description de nombreux problèmes du monde réel, c'est à dire on a intégré la modélisation pour représenter des phénomènes de la réalité par des outilles mathématiques .

Les systèmes fractionnaires apprissent de plus en plus dans les différents domaines de la recherche . Toutefois, l'intérêt progressif que l'on porte à ces systèmes est leurs applications en sciences fondamentales et appliqués .
on peut noter que les opérateurs fractionnaires sont utilisés pour prendre en compte des effets de mémoire

Dans la littérature, on attribue souvent le nom de la dérivation fractionnaire à la généralisation de la dérivation à un ordre quelconque, c'est à dire la théorie des équations différentielles fractionnaires est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, c'est une généralisation de la notion dérivation à un ordre entier ou non entier, réel ou complexe.

Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de `Riemann`[1] *et de* `Liouville` *, alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée à des ordres fractionnaires est plus ancienne.*

En effet, l'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de `Leibniz`*, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre* n , $\frac{d^n}{dx^n} = \mathfrak{D}^n y$ *où* n *est un entier positif. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa* `l'Hospital` *à s'interroger sur la possibilité d'avoir* n *dans* $\mathbb{Q}$ *. Il posa la question : et si* $n = \frac{1}{2}$ *?*

1. `Bernhard Riemann` *:(Hanovre 1826 - Italie 1866) est un mathématicien allemand. Il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle.*

En 1695, dans une lettre à `l'Hospital,` `Leibniz` *écrivit prophétiquement :*

« Un paradoxe apparent, dont un jour conséquences utiles seront tirées ».

Sur ces questions, nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu `'Euler` *ou* `Lagrange` *au XVIII^e^ siècle,* `Laplace,` `Fourier,` `Liouville`[2] *(1832 ; 1837) ou* `Riemann` *(1847) au XIX^e^ siècle, ainsi qu'à* `Grünwald` *(1867) et* `Letnikov` *(1868) dans la seconde moitié du même siècle. Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée ; de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Pour plus de détails historiques, nous renvoyons à [3] [7] [9] [12] [10].*

2. `Joseph Liouville` *:(Saint-Omer 1809-Paris 1882), un mathématicien français. Parmi ses travaux les plus célèbres, on peut citer, la découverte des nombres transcendants en 1844, le problème des valeurs au bord des solutions d'équation différentielles, les intégrales elliptiques.*

Chapitre I

Préliminaires : " Généralités "

Dans cette partie nous donnons quelque notions de calculs différentiels et intégrals classiques, fonctions spéciales ,des définitions .
Finalement on va citer des Théorèmes du point fixe qui sont utilisés pour montrer l'existence et l'unicité du problème donnée après.

1 Rappel sur le calcul différentiel et intégral

Théorème 1.1 *[3](Théorème fondamental)*
Soient $f : \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $F : \mathcal{I} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$F(\mathrm{x}) := \int_a^{\mathrm{x}} f(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

Alors , F *est dérivable et on a :* $F' = f$

Notation 1.1
Soit $f : \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

❶ *On notera par* $\mathfrak{D}$, *la dérivée de* f *ou* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *c'est à dire :*

$$\mathfrak{D}f(\mathrm{x}) = f'(\mathrm{x}). \qquad \forall\, \mathrm{x} \in \mathcal{I} \tag{I.1}$$

❷ *On notera par* $\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}$ *l'intégrale de* `Riemann` *avec* f *une fonction intégrable sur* $\mathcal{I} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *,c'est à dire :*

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}f(\mathrm{x}) = \int_{\mathrm{a}}^{x} f(\mathrm{t})\mathrm{dt} \quad \forall \quad \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b} \tag{I.2}$$

❸ *Pour* $\alpha \in \mathbb{N}$ *nous généralisons la notion de dérivée et d'intégrale* $\mathfrak{D}^{\alpha}$ *et* $\mathfrak{I}^{\alpha}$ *itérées c'est à dire :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^1 &= \mathfrak{D} \quad ; \quad \mathfrak{D}^{\alpha} = \mathfrak{D} \circ \mathfrak{D}^{\alpha-1} \\ \mathfrak{I}^1_{\mathrm{a}} &= \mathfrak{I} \quad ; \quad \mathfrak{I}^{\alpha} = \mathfrak{I}_{\mathrm{a}} \circ \mathfrak{I}^{\alpha-1}_{\mathrm{a}} \ \textit{pour} \ \alpha \geq 2. \end{aligned}$$

Remarque 1.1

$$\mathfrak{D}^1 \circ \mathfrak{I}^1_{\mathrm{a}} = Id \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{D}^{\alpha} \circ \mathfrak{I}^{\alpha}_{a} = Id \quad \forall \alpha \in \mathbb{N} \tag{I.3}$$

Proposition 1.1

Soient α , $\beta \in \mathbb{N}$ *avec* $\alpha > \beta$ *et soit* f *fonction de classe* $C^{\alpha}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$

Alors on a :

$$\mathfrak{D}^{\alpha} f = \mathfrak{D}^{\beta} \circ \mathfrak{I}^{\beta-\alpha}_{a} f \tag{I.4}$$

Preuve 1.1

La remarque 1.1 nous donne

$$\mathfrak{D}^{\beta-\alpha} \circ \mathfrak{I}^{\beta-\alpha}_{\mathrm{a}} f = f \tag{*}$$

Et en appliquant l'opérateur $\mathfrak{D}^{\alpha}$ *aux deux membre de l'équation* (*)

On déduit

$$\mathfrak{D}^{\alpha}[\mathfrak{D}^{\beta-\alpha} \circ \mathfrak{I}^{\beta-\alpha}_{\mathrm{a}} f] = \mathfrak{D}^{\alpha} f$$

Et comme

$$\mathfrak{D}^{\alpha}\mathfrak{D}^{\beta-\alpha} f = \mathfrak{D}^{\beta} f$$

On déduit

$$\mathfrak{D}^{\beta} \circ \mathfrak{I}^{\beta-\alpha}_{\mathrm{a}} f = \mathfrak{D}^{\alpha} f$$

Proposition 1.2

Soit f *une fonction intégrale sur* $\mathcal{I} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^*$

Alors on a :

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{\mathrm{a}} f(\mathrm{x}) = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-1)^{\alpha-1} f(\mathrm{t}) \mathrm{dt} \qquad \textit{pour tout} \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{I.5}$$

C'est une conséquence immédiate de Théorème 1.1 α fois .

Définition 1.1 ***(formule de Leibniz)***

Soient n *un entier positif et* f , g *deux fonctions définies et dérivables jusqu'à l'ordre* n *sur un intervalle* $\mathcal{I}$.

On a alors :

$$\mathfrak{D}^n(fg) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}_{C_n^k}\left(\mathfrak{D}^k f\right)\left(\mathfrak{D}^{n-k} g\right) \qquad \text{où } C_n^k = \frac{n!}{n!(k-n)!} \tag{I.6}$$

2 Fonctions spéciales pour le calcul fractionnaire

Dans cette section, nous présentons quelques ***fonctions spécifiques*** *qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire .*

2.1 Fonction Gamma

Définition 2.1 *[11]*

On appelle fonction ***Gamma d'Euler*** *noté* $\Gamma(z)$ *avec* z *est un nombre complexe , la fonction :*

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} \mathrm{t}^{z-1} e^{-\mathrm{t}} \mathrm{dt}, \quad \mathfrak{Re}(z) > 0 \tag{I.7}$$

Remarque 2.1

Cette intégrale est convergente si $\mathfrak{Re}(z) > 0$ *car on a :*

Si $z = \mathrm{x} + \mathrm{iy}$

$$\begin{aligned} |\Gamma(\mathrm{x}+\mathrm{iy})| &= |\int_0^{+\infty} t^{\mathrm{x}-1+\mathrm{iy}} e^{-t} \mathrm{dt}| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |t^{\mathrm{x}-1} e^{\mathrm{iy}\log(\mathrm{t})} e^{-\mathrm{t}}| \mathrm{dt} \end{aligned}$$ [1]

Comme

$$\blacktriangleright \begin{cases} |e^{\mathrm{iy}log(\mathrm{t})}| & \leq 1 \\ |e^{-\mathrm{t}}| & \leq \mathcal{M} \end{cases}$$

On déduit

$$|\Gamma(\mathrm{x}+\mathrm{iy})| \leq \int_0^{+\infty} \mathcal{M}|t^{\mathrm{x}-1}| \mathrm{dt} \tag{I.8}$$

Donc on voit que I.8 est convergente si $\mathrm{x}-1 > 0$ *autrement dit I.7 converge si* $\mathfrak{R}e(z) > 0$.

1. .....$\mathrm{t}^a = e^{a\log(\mathrm{t})}$

Proposition 2.1

*La fonction **Gamma** satisfait l'équation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{I.9}$$

Preuve 2.1

On démontre cette proposition par une intégration par parties de I.7 i.e :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{t}^{(z-1)+1} e^{-\mathrm{t}} \mathrm{dt} \\
&= \lim_{\eta \longrightarrow +\infty} \int_0^{\eta} \mathrm{t}^{z} e^{-\mathrm{t}} \mathrm{dt} \\
&= \underbrace{\lim_{\eta \longrightarrow +\infty} - e^{-\mathrm{t}} \mathrm{t}^{z} \Big|_0^{\eta}}_{\searrow 0} + z \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \mathrm{dt}}_{\Gamma(z)} \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

Remarque 2.2

On a aussi la propriété :

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall \; n \; \in \; \mathbb{N}^* \tag{I.10}$$

En effet,

$\Gamma(1) = 1$ *car :*

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = 1$$

Et on utilisons la proposition précédant pour $z = 1, 2, 3, \cdots, n$ *:*

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) = &\; 1.\Gamma(1) = &\; 1.1! = 1 \\
\Gamma(3) = &\; 2.\Gamma(2) = &\; 2.1! = 2! \\
\Gamma(4) = &\; 3.\Gamma(3) = &\; 3.2! = 3! \\
\ldots &\; \ldots &\; \ldots
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Gamma(n) \quad = (n-1)!$$

Proposition 2.2

Pour tout n *entier naturel ,on peut écrire :*

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

Indication de la preuve

1) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{t}}\mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dt}$

On fait le changement de variable :

$$\begin{cases} \mathrm{u} = \sqrt{\mathrm{t}} \Rightarrow \mathrm{u}^2 = \mathrm{t} \\ \quad \text{d'où} \\ \mathrm{dt} = 2\mathrm{udu} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\tfrac{1}{2}) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}\mathrm{du} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+^{*} \text{ [2]} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

2) $\Gamma(\frac{3}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{dt}$

En effet, par une intégration par partie :

$$\begin{cases} u = t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u' = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \\ v' = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\tfrac{3}{2}) &= \underbrace{\lim_{\eta \longrightarrow +\infty} -t^{\frac{1}{2}}e^{-t}\Big|_0^{\eta}}_{\searrow 0} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dt}}_{\Gamma(\frac{1}{2})} \\ &= \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned} \tag{I.11}$$

3) $\Gamma(\frac{5}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{3}{2}}\mathrm{dt}$

par intégration par partie :

$$\begin{cases} u = t^{\frac{3}{2}} \Rightarrow u' = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \\ v' = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\tfrac{5}{2}) &= \underbrace{\lim_{\eta \longrightarrow +\infty} -t^{\frac{3}{2}}e^{-t}\Big|_0^{\eta}}_{\searrow 0} + \frac{3}{2}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{dt}}_{\Gamma(\frac{3}{2})} \\ &= \tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{3}{2.2}\sqrt{\pi} \end{aligned} \tag{I.12}$$

2. .....l'intégrale de gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t^2}\mathrm{dt}$

$$\vdots$$

On peut généraliser la proposition c'est-à-dire

$n)\quad \Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!},\quad$ avec $n \in \mathbb{N}$

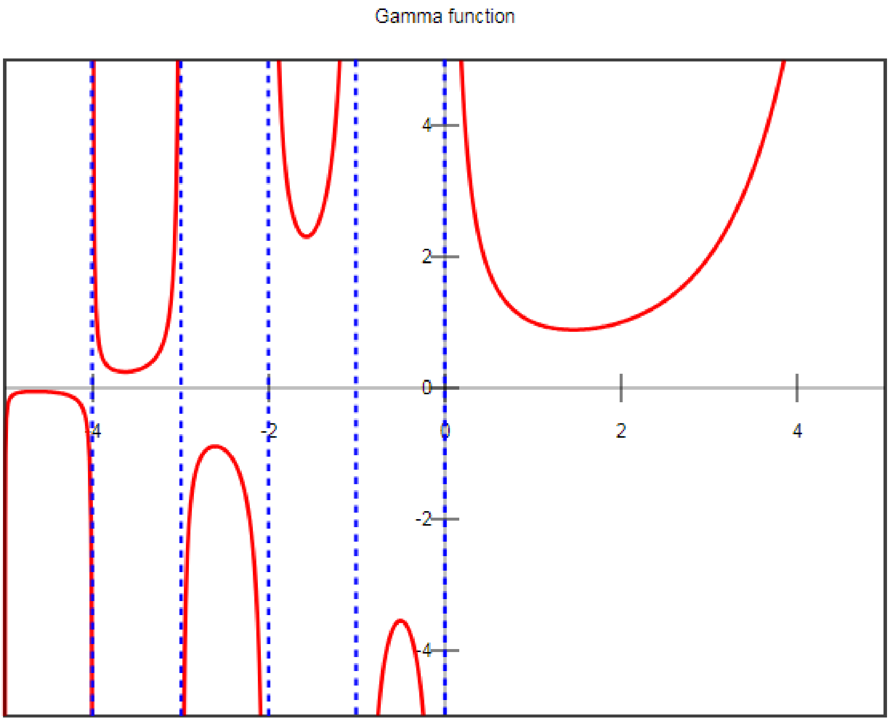

FIGURE I.1 – *Courbe représente la fonction Gamma.*

2.2 Fonction Bêta

Définition 2.2 *[11]*

*La fonction **Bêta** ou fonction de Bessel de seconde espèce est définie par :*

$\forall\, z, w \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Re}(z) > 0\ \ \mathfrak{Re}(w) > 0$:

$$\beta(z;w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\mathrm{d}t. \tag{I.13}$$

Remarque 2.3

Cette intégrale est convergente si $\mathfrak{Re}(z) > 0$ *et* $\mathfrak{Re}(w) > 0$ *c'est-à-dire :*

1) Si $\mathfrak{Re}(z) \geq 1$, $\mathfrak{Re}(w) \geq 1$ *alors l'intégrale ci-dessus est convergente car c'est le produit de deux fonctions intégrables.*

2) Si $0 < \mathfrak{Re}(z) < 1$ *et* $0 < \mathfrak{Re}(w) < 1$ *alors nous avons affaire à une intégrale impropre c'est-à-dire :*

i) Au voisinage de $t = 1$ *:*

La fonction $t^{z-1} \longrightarrow 1$ *; donc la convergence de* (I.13) *dépend la convergence de*

$$\int_0^1 (1-t)^{w-1} \mathrm{d}t$$

D'où

$$\beta(z,w) \sim \int_0^1 (1-t)^{w-1} \mathrm{d}t$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |\int_0^1 (1-t)^{w-1} \mathrm{d}t| &\leq \int_0^1 |(1-t)^{(\mathrm{x}+\mathrm{iy})-1} \mathrm{d}t| \\ &\leq \int_0^1 |(1-t)^{\mathrm{x}-1|}|(1-t)^{\mathrm{iy}}| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 |(1-t)^{\mathrm{x}-1}||e^{\mathrm{iy}\log(1-t)}| \mathrm{d}t. \end{aligned} \qquad (**)$$

Comme

$$|e^{\mathrm{iy}\log(1-t)}| \leq 1$$

On déduit que l'intégrale (**) *est convergente si* $x - 1 > 0$.

ii) Au voisinage de $t = 0$ *:*

La fonction $(1-t)^{w-1} \longrightarrow 1$ *; alors la convergente de* (I.13) *dépend la convergente de*

$$\int_0^1 t^{z-1} \mathrm{d}t$$

C'est-à-dire

$$\beta(z,w) \sim \int_0^1 t^{z-1} \mathrm{d}t$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} |\int_0^1 t^{z-1} \mathrm{d}t| &\leq \int_0^1 |t^{(\mathrm{x}+\mathrm{iy})-1}| \mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^1 |t^{\mathrm{x}-1}||t^{\mathrm{iy}}| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 |t^{\mathrm{x}-1}||e^{\mathrm{iy}\log(t)}| \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Finalement, on conclut que l'intégrale est convergente si $\mathfrak{R}e(z) > 0, \mathfrak{R}e(w) > 0$.

Proposition 2.3

Pour tout nombre complexe z, w d'un partie réel positif,

On a :

$$\beta(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{I.14}$$

Preuve 2.2

Soit $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^2$ d'où

$$\Gamma(z).\Gamma(w) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}\mathrm{d}x. \int_0^{+\infty} y^{w-1}e^{-y}\mathrm{d}y$$

En utilisant le Théorème de Fubini[3] *:*

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{z-1}y^{w-1}e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

En faisant le changement de variable :

avec ϕ application bijective de $\phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$

$$\blacktriangleright \begin{cases} .u = x+y \\ .v = \dfrac{x}{x+y} \end{cases} \quad \textit{Notons aussi que :} \blacktriangleright \begin{cases} .x = uv \\ .y = u(1-v) \end{cases} \quad \Rightarrow \mathcal{J}(u,v) = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$$

Le domaine $\mathcal{D}$ est transformé par le changement de variable en :

$\mathcal{D}' = \{(u,v)\,; 0 \leq u\,,\ 0 \leq v \leq 1\,\}$

par suite

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}}\int_{\mathcal{D}} x^{z-1}y^{w-1}e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{\mathcal{D}'}\int uv^{z-1}[u(1-v)]^{w-1}e^{-u}\mid -u\mid dudv \\
&= \int_{\mathcal{D}'}\int u^{z+w-1}v^{z-1}(1-v)^{w-1}e^{-u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{+\infty}[\int_0^1 u^{z+w-1}v^{z-1}(1-v)^{w-1}e^{-u}\mathrm{d}v]\mathrm{d}u \\
&= \underbrace{\int_0^{+\infty} u^{z+w-1}e^{-u}du]}_{\Gamma(z+w)}\underbrace{[\int_0^1 v^{z-1}(1-v)^{w-1}\mathrm{d}v]}_{\beta(z,w)}
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \Gamma(z+w)\beta(z,w).$$

Par conséquent (I.14) *est prouvée .*

3. .....$\int_X\left(\int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Proposition 2.4

On a pour tout z, w *complexes tel-que* $\mathfrak{Re}(z) > 0,\ \mathfrak{Re}(w) > 0$ *les propriétés suivantes :*

i) *La fonction **Bêta** est symétrique c'est-à-dire :*

$$\beta(z, w) = \beta(w, z)$$

ii)

$$\begin{aligned} \beta(z, w+1) &= \frac{z}{w}\beta(z+1, w) \\ &= \frac{z}{z+w}\beta(z, w) \end{aligned}$$

2.3 Fonction de Mittag-Leffler

*La fonction **Mittag-Leffler** est nommée d'après un mathématicien 'suédois'[11] qui la défini en 1903. Cette fonction est une généralisation directe de la fonction exponentielle.*

Définition 2.3 *[6]*

1. *La fonction Mittag-Leffler à un paramètre est donné par :*

$$\blacktriangleright\ E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \qquad \forall\ \alpha > 0$$

2. *La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres :*

$$\blacktriangleright\ E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \qquad \forall\ \alpha, \beta > 0$$

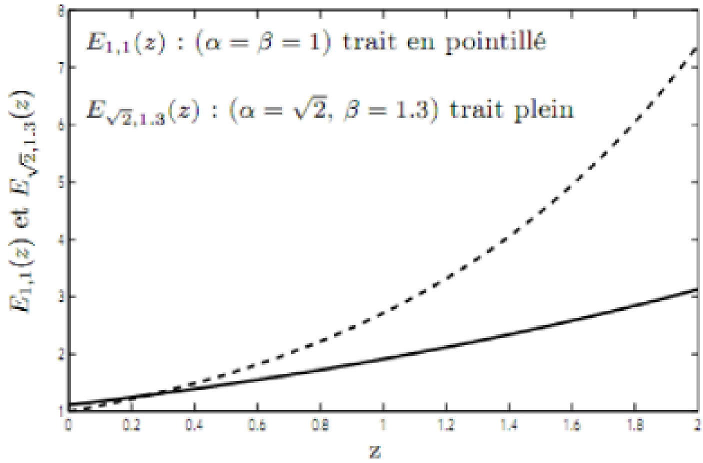

FIGURE I.2 – *Courbes représentent la fonction de Mittag-Leffler.*

Exemple 2.1

i) $E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$

ii) $E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}$

3 Définitions et Théorèmes d'analyses Fonctionnelles

Cette section est consacrée à quelques définitions de l'analyse fonctionnelle et Théorèmes du point fixe

3.1 Définitions

Définition 3.1

Soient k *un entier et* p *un nombre réel supérieure ou égale 1 on définit :*

- $\mathcal{C}^k([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f$ *continument dérivable jusqu'à l'ordre* $k\}$
- $L_p([a,b]) := \left\{ f : [\mathrm{a},\mathrm{b}] \to \mathbb{R};\ f \right.$ *est mesurable sur* $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ *avec;* $\left. \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} |\ \mathrm{f(x)}\ |^{\mathrm{p}}\ \mathrm{dx} < \infty \right\}$
- $L_\infty[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f$ *est mesurable et essentiellement borné sur* $([\mathrm{a},\mathrm{b}])\}$
- $\mathcal{A}^k([a,b]) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f$ *absolument continue dérivable jusqu'à l'ordre* $(k-1)\}$

Définition 3.2

Soit X *un ensemble non vide ;* d *est une distance sur* X *si :*

$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *une application*

Vérifiant :

. i) *Séparabilité :* $\forall (x,y) \in X^2$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

. ii) *Symétrie :* $\forall (x,y) \in X^2$, $d(x,y) = d(y,x)$

. iii) *Inégalité triangulaire :* $\forall (x,y,z) \in X^3$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Définition 3.3

On appelle espace métrique toute ensemble de X *muni d'une distance noté* (X,d)

Définition 3.4

On dit qu'un espace métrique (X,d) *est complet si toute suite de Cauchy de* X *est convergente. Un espace vectoriel normé qui est complet s'appelle espace de Banach noté* $(X, \| \ \|_X)$

Définition 3.5

L'application A *est linéaire si et seulement si :*

$\forall \, x,y \in X \quad \forall \, \lambda, \mu \in \mathcal{K} = \mathbb{R}$

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$$

Remarque 3.1

Dans la suite $(X, \| \ \|_X)$ *et* $(Y, \| \ \|_Y)$ *désignent des espaces de Banach.*

Définition 3.6

$M \subset (X, \| \ \|_X)$ *est borné si et seulement si :*

$$\exists \, r > 0, \ \exists \, a \in X, \ M \subset \mathfrak{B}(a,r)$$

Définition 3.7

Soit $A : (X, \| \ \|_X) \to (Y, \| \ \|_Y)$ *une application linéaire.*

On dit que A *est bornée si elle envoie les parties bornées de* X *sur des parties bornées de* Y.

Définition 3.8

On appelle opérateur borné toute application linéaire continue de $(X, \| \ \|_X)$ *dans* $(Y, \| \ \|_Y)$.

Proposition 3.1

Soit $(X, \|.\|)$ *un espace de Banach, et soit* $M \subset X$.

Une application $A : M \to M$, *est continue sur* M *si pour toute suite* $\{x_n\}$ *de* M *:*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax\| = 0 \\ \qquad et \\ x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \end{cases}$$

Définition 3.9

Soit V *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$.

Un ensemble $M \subset V$ *est dit convexe si et seulement si pour tout couple* (u, v) *de points de segment joignant* u *à* v *et tout* λ *compris entre 0 et 1 on a :*

$$[\lambda u + (1-\lambda)v] \ \in \ M$$

Remarque 3.2

Un ensemble M *est relativement compact veut dire que sa frontière* $\overline{M}$ *est compact*

Définition 3.10

Soient $(X, \| \ \|_X)$, $(Y, \| \ \|_Y)$ *deux espaces de Banach .*

L'application $f : (X, \| \ \|_X) \longrightarrow (Y, \| \ \|_Y)$ *est dite compacte si :*

$a)$ f *est continue sur* X *.*

$b)$ $f(X)$ *est relativement compact dans* Y.

Définition 3.11

Soient $(X, \| \ \|_X)$ *et* $(Y, \| \ \|_Y)$ *deux espaces de Banach et soit* M *sous ensemble de* X.

L'application $f : X \to Y$ *est dite complètement continue si :*

$a)$ f *est continue sur* X *.*

$b)$ $f(M)$ *est relativement compacte dans* Y *pour tout sous-ensemble borné* M *de* X *.*

Définition 3.12

Soient X *un ensemble,* (Y, d) *un espace métrique et* A *un sous-ensemble de* X.

Soient $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur* X *et à valeurs dans* Y *et* f *une fonction définie sur* X *à valeurs dans* Y.

On dit que la suite $(f_k)_k$ *converge uniformément vers* f *sur* A *si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ , \forall k \in \mathbb{N}, \ k > \mathbb{N}_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in A, \ d(f_k(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$$

Définition 3.13

Soit $A : (X, \| \ \|_X) \rightarrow (X, \| \ \|_X)$ *une application .*

Un élément x *de* X *est dit* ***point fixe*** *de* A *si :*

$$Ax = x$$

Théorème 3.1 *[5] (**Arzéla-Ascoli**)*

Soit $\mathcal{J}$ *une partie compacte d'un espace métrique* (X, d) *avec* $(X, \| \ \|_X)$ *espace de Banach,* M *un sous ensemble de* $\mathcal{C}(\mathcal{J}, X)$ *des fonctions continue muni de la norme de* $\sup$ *.*

M *est* ***relativement compact*** *dans* $\mathcal{C}(\mathcal{J}, X)$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) M *est* ***uniformément borné*** *i.e. : il existe une constante* $l > 0$ *tel que :*

$\forall \ t \in \mathcal{J} , \forall f \in M$ *on a*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathcal{J}} |f(t)| \leq l.$$

(2) M *est* ***équicontinu*** *i.e : pour tout* ε *positive, il existe* $\delta(\varepsilon)$ *positive tel que :*

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_M < \varepsilon \quad \forall \ t_1, t_2 \in \mathcal{J} \ , \ d(t_1, t_2) < \delta(\varepsilon) \ \forall f \in M$$

3.2 Théorème du point fixe de type Leray Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique .

Théorème 3.2 *[4] (**Schauder)***

Soit M *un sous ensemble non vide , compact, convexe, dans un espace de Banach* $(X, \| \ \|_X)$ *.*

Supposons que $A : M \rightarrow M$ *est une application continue .*

Alors :

A *admet au moins un point fixe .*

Théorème 3.3 *[4]* ***(Théorème de l'alternative non linéaire de Leray Schauder)***
Soit $(X, \| \ \|_X)$ *un espace de Banach ,* Ω *un sous ensemble ouvert borné de* X *, avec 0 élément de* Ω
$A : \overline{\Omega} \to X$ *une application compacte.*
Alors :

- A *un point fixe sur* $\overline{\Omega}$

Ou bien ;

- *il existe* $\lambda \in (0, 1)$ *et* $x \in \partial \Omega$ *tel que* $x = \lambda A(x)$

3.3 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 3.4 *[2]*
Soit $(X, \| . \|_X)$ *un espace de Banach et* $\mathcal{F} : X \to X$ *une contraction .s'il existe* $0 < k < 1$ *tel que :*

$$\forall\, y_1, y_2 \ \in \ X \quad \| \mathcal{F}(y_1) - \mathcal{F}(y_2) \|_X \leq k \| y_1 - y_2 \|_X$$

alors l'opérateur $\mathcal{F}$ *admet un point fixe unique* $x \in X$.

Chapitre II

Intégrale et dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Dans ce chapitre on va donner clairement quelques résultats utiles concernant l'intégrale et la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de `Riemann-Liouville` *et on va identifier la relation entre les deux .*

1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *, selon l'approche de* `Riemann-Liouville`*, généralise la célèbre formule attribuée à Cauchy d'intégrale répété* $\alpha-$*fois où* α *est un entier naturelle.*

Définition 1.1 *[3](Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville)*
Soit $\mathcal{I} = [a, b]$ *un intervalle sur* $\mathbb{R}$ *et soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *; notons* $\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}$ *et* $\mathfrak{I}^{\alpha}_{b_-}$ *les opérateurs définis sur* $L_1([a, b])$ *par :*

$$i)\ \mathfrak{I}^{\alpha}_{\mathrm{a}_+} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1} f(\mathrm{t})\mathrm{dt}; \qquad \mathrm{x} > a \tag{II.1}$$

$$ii)\ \mathfrak{I}^{\alpha}_{\mathrm{b}_-} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathrm{x}}^b (\mathrm{t}-\mathrm{x})^{\alpha-1} f(\mathrm{t})\mathrm{dt}; \qquad \mathrm{x} < b$$

$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}$ *s'appelle l'intégrale (gauche) fractionnaire de* `Riemann-Liouville`.

$\mathfrak{I}^{\alpha}_{b_-}$ *s'appelle l'intégrale (droite) fractionnaire de* `Riemann-Liouville`.

(1) *Pour* $\alpha = 0$: $\mathfrak{I}^0_{a+} = Id$;

(2) *Si* $\alpha \geq 1$ *l'intégrale* $\mathfrak{I}^\alpha_a f(\mathrm{x})$ *existe pour tout* x *sur* $[a,b]$ *car* :

$\mathfrak{I}^\alpha_a f(x)$ *est le produit d'une fonction intégrale* f *et fonction continue* $(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}$.

Proposition 1.1

Soit $f \in L_1([a,b])$ *et soit* $0 < \alpha < 1$.

alors l'intégrale $\mathfrak{I}^\alpha_{a+} f(\mathrm{x})$ *existe pour presque tout* x *dans* $[a,b]$ *et la fonction* $\mathfrak{I}^\alpha_a f(\mathrm{x})$ *est un élément de* $L_1([a,b])$

Preuve 1.1

En intégrant le module de l'équation (II.1) *puis en utilisant le Théorème de Fubini avec* $t \in [a,b]$ *,nous obtenons*

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\mathfrak{I}^\alpha_a f(\mathrm{x})|\mathrm{dx} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\int_a^b \left(\int_a^x |(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1} f(\mathrm{t})\mathrm{dt}\right)|\mathrm{dx} \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \left(\int_a^x |(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}|.|f(\mathrm{t})|\mathrm{dt}\right)\mathrm{dx} \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b |f(\mathrm{t})|\int_t^b |(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}|\mathrm{dt}\ \mathrm{dx} \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_a^b |f(\mathrm{t})|\int_t^b |(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha}|\mathrm{dt}\ \mathrm{dx} \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b |f(\mathrm{t})|(\mathrm{b}-\mathrm{t})^\alpha \mathrm{dt} \\
&\leqslant \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^b |f(\mathrm{t})|\mathrm{dt} \qquad (***)
\end{aligned}$$

Comme

$f \in L_1([a,b])$ *alors* $\int_a^b |f(\mathrm{t})|\mathrm{dt} < \infty$ *et par conséquent* (***) *est fini ,ce qui établit le résultat désiré.*

Remarque 1.1

Quand $\alpha \in \mathbb{N}$ *la définition de l'intégrale au sens de* `Riemann-Liouville` *coïncide avec la* $\alpha^{éme}$ *intégrale classique voir la proposition* *1.2*

Exemple 1.1

Soit la fonction puissance suivante :

$$f(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}-\mathrm{a})^\mu$$

Supposons que $\mu > -1$ *pour assurer la convergence de l'intégrale ;*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *on a :*

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\mu} dt;$$

En utilisant la définition de Bêta 2.2 et la proposition I.14 avec le changement de variable suivant :

$t = x - r(x-a) \rightarrow dt = -(x-a)dr$ *, on obtient*

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+} f(x) &= \frac{(x-a)^{\mu+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_0^1 r^{\alpha-1}(1-r)^{\mu} dr}_{\beta(\alpha,\mu+1)} \\ &= (x-a)^{\mu+\alpha} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\alpha+1)} \end{aligned} \qquad (****)$$

Cas particulier $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{1}_{a_+} f(x) &= (x-a)^{\mu+1} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+2)} \\ &= (x-a)^{\mu+1} \frac{\mu!}{(\mu+1)!} \\ &= (x-a)^{\mu+1} \frac{1}{(\mu+1)} \end{aligned}$$

Qui est exactement l'intégrale usuelle $\int_a^x (x-a)^{\mu} dx$. ⊛

Remarque 1.2

Si on prend $\mu = 0$ *dans la formule* (****) *on déduit que l'intégrale d'une constante* $C \in \mathbb{R}$ *de* `Riemann-Liouville` *est donnée par :*

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_0 C = \frac{Cx}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Remarque 1.3 *[13]*

L'intégrale fractionnaire de `Riemann-Liouville` *peut notamment ("sous certains conditions") s'écrire sous forme de produit de convolution*[1] *de la fonction puissance* $\Phi_{\alpha}(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *et* $f(x)$*, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{\alpha}_{a} f(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \\ &= \Phi_{\alpha}(x) \star f(x) \end{aligned}$$

Proposition 1.2 *[14](Composition de l'intégrale fractionnaire)*

Soit $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}_+$ *et soit* $f \in L_1([a,b])$.

alors

$$i)\ \left(\mathfrak{I}^{\alpha'}_{a_+} \circ \mathfrak{I}^{\beta'}_{a_+}\right) f(x) = \mathfrak{I}^{\alpha'+\beta'}_{a_+} f(x); \qquad p.p \ ; \quad x > a \qquad (II.2)$$

1. ....* désigne la convolution de deux fonctions f g c'est à dire : $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$

$$ii) \left(\mathfrak{I}_{b_-}^{\alpha'} \circ \mathfrak{I}_{b_-}^{\beta'}\right) f(\mathrm{x}) = \mathfrak{I}_{b_-}^{\alpha'+\beta'} f(\mathrm{x}); \qquad p.p \quad ; \quad \mathrm{x} < b \tag{II.3}$$

Si on plus $f \in \mathcal{C}([a,b])$ *avec* $\alpha' + \beta' \geq 1$ *le résultat est généralisé partout sur* $[a,b]$

Preuve 1.2

Supposons d'abord que $f \in L_1([a,b])$

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'} \circ \mathfrak{I}_{a_+}^{\beta'}\right)(f)(\mathrm{x}) &= \mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'}\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\beta'}(f)\right)(\mathrm{x}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha')}\int_{a_+}^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha'-1}\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\beta'} f(\mathrm{t})\right)\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.1 les intégrales existent ;

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha')}\int_{a_+}^{\mathrm{x}}\left((\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha'-1}\frac{1}{\Gamma(\beta')}\int_{a_+}^{\mathrm{t}}(\mathrm{t}-\tau)^{\beta'-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}\int_{a_+}^{\mathrm{x}}\int_{a_+}^{\mathrm{t}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha'-1}(\mathrm{t}-\tau)^{\beta'-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}\int_{a_+}^{\mathrm{x}}\left[\int_{a_+}^{\mathrm{t}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha'-1}(\mathrm{t}-\tau)^{\beta'-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_{t}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha'-1}(\mathrm{t}-\tau)^{\beta'-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}\int_{a_+}^{\mathrm{x}}\left[\int_{a_+}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha'-1}(\mathrm{t}-\tau)^{\beta'-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème de Fubini nous pouvons échanger l'ordre de l'intégrale et obtenant :

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'} \circ \mathfrak{I}_{a_+}^{\beta'}\right)(f(\mathrm{x})) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}\int_{a_+}^{\mathrm{x}}\left[\int_{a_+}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha'-1}(\mathrm{t}-\tau)^{\beta'-1}f(\tau)\mathrm{dt}\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}\int_{a_+}^{\mathrm{x}}\left[\int_{a_+}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha'-1}(\mathrm{t}-\tau)^{\beta'-1}\mathrm{dt}\right]f(\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}\int_{a_+}^{\mathrm{x}}\left[\int_{\tau}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha'-1}(\mathrm{t}-\tau)^{\beta'-1}\mathrm{dt}\right]f(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

On fait un changement de variable $\mathrm{t} = \tau + \mathrm{s}(\mathrm{x}-\tau)$ *; nous avons*

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'} \circ \mathfrak{I}_{a_+}^{\beta'}\right)(f)(\mathrm{x}) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}\int_{a_+}^{\mathrm{x}} f(\tau)\int_0^1 \left[(\mathrm{x}-\tau)(1-s)\right]^{\alpha'-1}\left[s(\mathrm{x}-\tau)\right]^{\beta'-1}(\mathrm{x}-\tau)ds\,d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\beta')}\int_{a}^{\mathrm{x}} f(\tau)(\mathrm{x}-\tau)^{\alpha'+\beta'-1}\underbrace{\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds}_{\beta(\alpha',\beta')}\,d\tau
\end{aligned}$$

Et d'après la proposition I.14 ; on conclut que

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'} \circ \mathfrak{I}_{a_+}^{\beta'}\right)(f)(\mathrm{x}) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha'+\beta')}\int_{a_+}^{\mathrm{x}} f(\tau)(\mathrm{x}-\tau)^{\alpha'+\beta'-1}d\tau \\
&= \mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'+\beta'} f(\mathrm{x})
\end{aligned}$$

Ce qui donne que cette égalité est vrais presque partout sur $[a,b]$.

Si $f \in \mathcal{C}([a,b])$

D'après les théorèmes sur les intégrales dépendant de paramètres :

$\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'} f$, $\mathfrak{I}_{a_+}^{\beta'} f \in \mathcal{C}([a,b])$ *et de même* $\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'+\beta'} f$ *et* $\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'} \circ \mathfrak{I}_{a_+}^{\beta'}\right)(f) \in \mathcal{C}([a,b])$ *;*

Par conséquent ces deux fonctions continues coïncides presque partout ; ainsi ils doivent coïncides partout. $\boxdot$

Corollaire 1.1 *[3]*

Sous les hypothèses de Proposition 1.2 on a :

$$\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'} \circ \mathfrak{I}_{a_+}^{\beta'}\right)(f) = \left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\beta'} \circ \mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha'}\right)(f).$$

Proposition 1.3

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ *on a alors :*

(1) $(\mathfrak{I}_a^{\alpha} f(\mathrm{x}))' = (\mathfrak{I}_a^{\alpha-1} f(\mathrm{x}))$ $\alpha > 1$ *(Dérivée usuelle de l'intégrale fractionnaire)*

(2) $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} (\mathfrak{I}_a^{\alpha} f(\mathrm{x})) = f(\mathrm{x})$ $\alpha > 0$

Preuve 1.1

(1) *Pour justifier la première identité on utilise les théorèmes classiques de dérivation d'une intégrale dépendent d'une paramètre et la relation fondamentale de la fonction Gamma d'Euler 2.2 on a :*

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} f(\mathrm{x})\right)' &= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right)' \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} f(t)dt\right)'\end{aligned}$$

Puisque $f(t)$ *et* $(\mathrm{x}-t)^{\alpha-1}$ *sont continue par rapport à* t *donc l'application :*

$$t \to (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} f(t)$$

est continue , et on a alors :

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} f(\mathrm{x})\right)' &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (\alpha-1)(\mathrm{x}-t)^{\alpha-2} f(t)dt \\ &= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1))} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-2} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-2} f(t)dt \\ &= \mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha-1} f(\mathrm{x})\end{aligned}$$

$\boxdot$

(2) *Pour la dernière identité, on a par définition :*

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{\mathrm{a}+}f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}f(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

D'après la remarque 1.2 *on voit que :*

$$\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}1\right)(\mathrm{x}) = \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

c'est à dire

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}1\right)(\mathrm{x}) = 1$$

D'une part

Puisque f *est continue on a*

$$\forall\ \mathrm{t}\ \mathrm{x}\ \in\ [a,b],\ \forall\ \varepsilon,\ \exists\ \delta>0\ \textit{tel que}\ \mid \mathrm{t}-\mathrm{x}\mid<\delta \Rightarrow \mid f(\mathrm{t})-f(\mathrm{x})\mid\ <\varepsilon$$

Et comme

$$\begin{aligned}
\left|\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f\right)(\mathrm{x}) - \frac{(\mathrm{x}-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(\mathrm{x})\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_+}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}f(\mathrm{t})\mathrm{dt} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_+}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}f(\mathrm{x})\mathrm{dt}\right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_+}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}\mid f(\mathrm{t})-f(\mathrm{x})\mid \mathrm{dt} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_+}^{\mathrm{x}-\delta}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}\mid f(\mathrm{t})-f(\mathrm{x})\mid \mathrm{dt} \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\mathrm{x}-\delta}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}\mid f(\mathrm{t})-f(\mathrm{x})\mid \mathrm{dt}
\end{aligned}$$

On conclut

$$\int_{\mathrm{x}-\delta}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}|f(\mathrm{t})-f(\mathrm{x})|\mathrm{dt} \leq \varepsilon\int_{\mathrm{x}-\delta}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}\mathrm{dt} = \frac{\varepsilon\delta^{\alpha}}{\alpha} \tag{II.*}$$

D'autre part

On a

$$\begin{aligned}
\int_{a_+}^{\mathrm{x}-\delta}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}|f(\mathrm{t})-f(\mathrm{x})|\mathrm{dt} &\leq \int_{a_+}^{\mathrm{x}-\delta}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}|f(\mathrm{t})|+|f(\mathrm{x})|\mathrm{dt} \\
&\leq 2\sup_{\epsilon\in[\mathrm{a},\mathrm{x}]}|f(\epsilon)|\int_{a_+}^{\mathrm{x}-\delta}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}\mathrm{dt};\ \forall\ \mathrm{x}\ \in\ [\mathrm{a},\mathrm{b}] \\
&= 2\mathrm{M}\left[\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a})}{\alpha} - \frac{\delta^{\alpha}}{\alpha}\right] \qquad\qquad (\text{II.**}) \\
&\textit{où}\ \sup_{\epsilon\in[\mathrm{a},\mathrm{b}]}|f(\epsilon)|
\end{aligned}$$

On déduit d'après l'équation (II.*) *et* (II.**) *que :*

$$\begin{aligned}
\left|\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f\right)(\mathrm{x}) - \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(\mathrm{x})\right| &\leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left[\varepsilon\ \delta^{\alpha}+2\mathrm{M}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}-\delta^{\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\varepsilon\ \delta^{\alpha}+2\mathrm{M}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}-\delta^{\alpha}\right]
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left|\mathfrak{I}^{\alpha}_{\mathrm{a}_+}f(\mathrm{x})-\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}f(\mathrm{x})\right|\leq\varepsilon\quad;\forall\ \varepsilon>0$$

Autrement dit

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left|\left[\mathfrak{I}^{\alpha}_{\mathrm{a}_+}f(\mathrm{x})\right]-f(\mathrm{x})\right|\leq\varepsilon\quad;\forall\ \varepsilon>0$$

C'est à dire

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\left[\mathfrak{I}^{\alpha}_{\mathrm{a}_+}f(\mathrm{x})\right]=f(\mathrm{x})$$

$\boxdot$

Théorème 1.1

Soient $\alpha>0$ *et* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *suite de fonction continue et uniformément convergente sur* $[a,b]$ *;*

alors :

$$\left[\mathfrak{I}^{\alpha}_{\mathrm{a}_+}(\lim_{k\to\infty}f_k)\right](\mathrm{x})=\left[\lim_{k\to\infty}(\mathfrak{I}^{\alpha}_{\mathrm{a}_+}f_k)\right](\mathrm{x})$$

Preuve 1.1

Notons la limite de (f_k) *par* f.

Il est claire que f *est continue ;*

Donc :

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{I}^{\alpha}_{\mathrm{a}_+}f_k(\mathrm{x})-\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f(\mathrm{x})\right| &\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\mathrm{a}_+}^{\mathrm{x}}|f_k(t)-f(t)|(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}\mathrm{dt}\\ &\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\parallel f_k-f\parallel_{\infty}\int_{\mathrm{a}_+}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}\mathrm{dt}\\ &=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\parallel f_k-f\parallel_{\infty}\underset{\mathrm{x}\in[a,b]}{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}}\end{aligned}$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\parallel f_k-f\parallel_{\infty}(\mathrm{b}-\mathrm{a})^{\alpha}\tag{e}$$

Et comme f_k *est une suite de fonction uniformément convergente on a*

$$\lim_{k\to\infty}\parallel f_k-f\parallel_{\infty}=0$$

Ainsi (e) *tend vers 0* $\boxdot$

Définition 1.2

On appelle fonction analytique toute fonction qui est développable en série entière au voisinage de chacun des points de son domaine , c'est-à-dire que pour tout x_0 *de ce domaine, il existe une suite* (a_k) *tel-que pour tout* x *assez proche de* x_0 *,on a la série* $\sum_{k=0}^{n}a_k(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^k$ *converge vers* f *i.e :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^k=f(\mathrm{x})$$

Proposition 1.4 *[3]*

Soit f *une fonction analytique sur* $[a-h;a+h]$ *et soit* $\alpha>0$ *avec* $h>0$ *;*

alors

$$i)\ \mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f(\mathrm{x})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\mathrm{x}-a)^{k+\alpha}}{k!(\alpha+k)\Gamma(\alpha)}\mathfrak{D}^k f(\mathrm{x})\quad \textit{avec}\ a\le \mathrm{x}<a+\frac{h}{2}$$

et

$$ii)\ \mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f(\mathrm{x})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{x}-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(k+1+\alpha)}\mathfrak{D}^k f(\mathrm{x})\qquad \textit{avec}\ a\le \mathrm{x}<a+h$$

En particulier $\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f(\mathrm{x})$ *est analytique sur* $[a;a+h]$.

Preuve 1.3

$i)$ *En utilisant la définition de* $\mathfrak{I}^{\alpha}_{a+}$ *au sens de* `Riemann-Liouville` *on a :*

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f(\mathrm{x})=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}f(\mathrm{t})dt;$$

En développant $f(t)$ *dans une série de puissance autour de* t*, on obtient :*

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f(\mathrm{x})=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(t-a)^k\mathfrak{D}^k f(t)\right)dt$$

Puisque $a\le \mathrm{x}<a+\dfrac{h}{2}$ *, la série de puissance converge dans tout l'intervalle d'intégration ; ainsi d'après Théorème précédant 1.1 il est possible d'échanger entre la somme et l'intégrale alors :*

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a}f(\mathrm{x})=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_a^x(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}(t-a)^k\mathfrak{D}^k f(t)dt$$

Et d'après l'exemple 1.1 on trouve

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a}f(\mathrm{x})=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x-a)^{k+\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+\alpha+1)}\mathfrak{D}^k f(x)$$

D'où le résultat final.

$ii)$ *Pour la deuxième déclaration,la démonstration ce fait de la même manière que précédemment , mais nous développons la série de puissance au voisinage du point* $t=1$ *, cela permet de conclure la convergence de la série dans l'intervalle requis* $\boxdot$

Exemple 1.2

Soit la fonction définit par :

$$f(\mathrm{x})=\exp(\lambda \mathrm{x})\qquad \textit{avec}\quad \lambda>0$$

(i) *Si* $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *;*

d'après le théorème 1.1 et en utilisant la définition du terme d'une série de puissances on a :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_0^\alpha f(\mathrm{x}) &= \mathfrak{I}_0^\alpha \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot)^k}{k!}\right](\mathrm{x}) &&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\mathfrak{I}_0^\alpha\left[(\cdot)^k\right](\mathrm{x}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}\mathrm{x}^{k+\alpha} &&= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{\lambda^\alpha}{\lambda^\alpha\Gamma(k+\alpha+1)}\mathrm{x}^{k+\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\mathrm{x})^{k+\alpha}}{\lambda^\alpha\Gamma(k+\alpha+1)} &&= \lambda^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\mathrm{x})^{k+\alpha}}{\Gamma(k+\alpha+1)}
\end{aligned}$$

(ii) *Si* $\alpha \in \mathbb{N}$ *; nous avons :*

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^\alpha f(\mathrm{x}) = \lambda^{-\alpha}\exp(\lambda\mathrm{x}) \quad \lambda > 0$$

⊛

Théorème 1.2

Soient $1 \leq p < \infty$ *et* $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ *suite numérique convergente vers* α *avec* $\alpha > 0$ *.*

alors on a

$$\lim_{k\to\infty}\mathfrak{I}_{\mathrm{a}_+}^{\alpha_k} f(\mathrm{x}) = \mathfrak{I}_{\mathrm{a}_+}^{\alpha} f(\mathrm{x})$$

la convergente au sens de la norme $L_p([\mathrm{a},\mathrm{b}])$

Preuve 1.2

comme $f \in L_p([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ *on a d'après la proposition 1.1* $\mathfrak{I}_{\mathrm{a}_+}^\alpha f \in L_p([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ *c'est à dire* $\left(\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} |\mathfrak{I}_{\mathrm{a}_+}^\alpha f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ *et puisque*

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} = \alpha$$

On voit que

$$\lim_{k\to\infty}\left(|\mathfrak{I}_{\mathrm{a}_+}^{\alpha_k} f(\mathrm{x}) - \mathfrak{I}_{\mathrm{a}_+}^{\alpha} f(\mathrm{x})|\right) = 0$$

par conséquent

$$\lim_{k\to\infty}\left(|\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha_k} f(\mathrm{x}) - \mathfrak{I}_{\mathrm{a}_+}^{\alpha} f(\mathrm{x})|^p d\mathrm{x}\right) = 0$$

d'où on conclut que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} |\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha_k} f(\mathrm{x}) - \mathfrak{I}_{\mathrm{a}_+}^{\alpha} f(\mathrm{x})|^p d\mathrm{x}\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Exemple 1.3

Soit la fonction constante suivante :

$$f(\mathrm{x}) = 1$$

avec $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ *une suite convergente vers un nombre positif* $\alpha > 0$ *d'après l'exemple 1.1 on a*

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha_k} f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_k + 1)} (\mathrm{x} - \mathrm{a})^{\alpha_k}$$

$$\| \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha_k} f - \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha} f \|_{\infty} = \sup_{\mathrm{x} \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]} \left| \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha_k}}{\Gamma(\alpha_k+1)} - \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \to 0 \ \textit{Lorsque}\ \alpha_k \to \alpha$$

Définition 1.3

Pour $\alpha > 0$ *notons l'espace des fonctions qui peuvent être représentées par l'intégrale de* `Riemann-Liouville` *d'ordre* α *de certaines* $\mathcal{C}^n([a,b])$ *fonctions par :*

$$\mathfrak{I}_a^{\alpha}([a,b]) := \{\ f : \ \exists\ g\ \in\ \mathcal{C}^n([a,b]) \ \textit{telle que}\ f = \mathfrak{I}_a^{\alpha} g \ ; n = [\alpha] + 1\}$$

Théorème 1.3 *[8]*

Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ *et* $\alpha > 0$. $f \in \mathfrak{I}_a^{\alpha}([a,b])$ *; il est nécessaire et suffisant que :*

$$\mathfrak{I}_a^{n-\alpha} f(\mathrm{x}) \ \in\ \mathcal{C}^n([a,b]) \qquad , n = \lceil \alpha \rceil + 1 \tag{II.4}$$

et

$$\left(\left(\frac{d}{dx} \right)^k \mathfrak{I}_a^{n-\alpha} f(\mathrm{x}) \right) \Big|_{\mathrm{x}=a} = 0 \quad k = 0, 1, 2 \cdots, n-1. \tag{II.5}$$

Preuve 1.3

$\Rightarrow$ *Supposons que* $f \in \mathfrak{I}_a^{\alpha}([\mathrm{a},\mathrm{b}])$;

d'aprés la définition 1.3 $f(\mathrm{x}) = \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha} g(\mathrm{x})$ *pour certain* $g \in \mathcal{C}^n([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ *d'où*

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}(f(\mathrm{x})) = \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}(\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha} g(\mathrm{x}))$$

De la proposition 1.2 on a

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}(f(\mathrm{x})) = \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n} g(\mathrm{x}) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} (x-t)^{n-1} g(\mathrm{t}) \mathrm{dt} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} dx_1 \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}_1} dx_2 \cdots \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}_{n-1}} g(x_n) dx_n$$

Donc

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n}(g(\mathrm{x})) \in \mathcal{C}^n([\mathrm{a},\mathrm{b}]) \ \textit{ et } \ \left(\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}(f(\mathrm{x})) \right) \Big|_{\mathrm{x}=\mathrm{a}} = \mathfrak{I}_{a+}^{n} g(\mathrm{t}) \mathrm{dt} = 0$$

Par conséquent

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}(f(\mathrm{x})) \in \mathcal{C}^n([\mathrm{a},\mathrm{b}]) \ \textit{ et } \ \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^k \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}(f(\mathrm{x})) \right) \Big|_{\mathrm{x}=\mathrm{a}} = \mathfrak{I}_{a+}^{n} g(\mathrm{t}) \mathrm{dt} = 0 \ \triangleright$$

$\Leftarrow$ *Réciproquement , supposons* $f \in \mathcal{C}^n([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ *satisfaisant les hypothèses de théorème 1.3 et en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale*[2] *sur la fonction* $\mathfrak{I}_a^{n-\alpha} f(\mathrm{x})$ *on trouve*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha} f(\mathrm{x}) &= \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(t)(x-t)^{(n-1)}\right) + \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha} R_{n-1}(x)\\
&= \underbrace{\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(t)(x-t)^{(n-1)}\right)}_{=0} + \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^{n} f(\mathrm{t})\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{dt}\\
&= \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^{n}\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha} f(\mathrm{t})\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{dt} \quad \forall\ \mathrm{x} \ \in\ [\mathrm{a},\mathrm{b}]
\end{aligned}$$

Soit

$$\varphi(\mathrm{x}) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^{n}\mathfrak{I}^{n-\alpha} f(\mathrm{x})$$

Puisque $\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha} f(\mathrm{x}) \in \mathcal{C}^n[(\mathrm{a},\mathrm{b})]$ *; on conclure que* $\varphi(\mathrm{x}) \in \mathcal{C}[(\mathrm{a},\mathrm{b})]$ *et par la Proposition 1.2 on a*

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha} f(\mathrm{x}) = \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n}\varphi(\mathrm{x}) = \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}\left[\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha}(\varphi(\mathrm{x}))\right]$$

Ainsi

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha} f(\mathrm{x}) - \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}\left[\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha}(\varphi(\mathrm{x}))\right] = 0$$

Alors

$$\mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{n-\alpha}\left[f(\mathrm{x}) - \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha}(\varphi(\mathrm{x}))\right] = 0$$

Vue que la solution d'équation intégrale d'Abel est unique[3] *avec* $n-\alpha > 0$*,ceci implique cela ;*

$$f(\mathrm{x}) - \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha}(\varphi(\mathrm{x})) = 0$$

Ainsi

$$f(\mathrm{x}) = \mathfrak{I}_{\mathrm{a}}^{\alpha}(\varphi(\mathrm{x}))$$

Donc :

$$f(\mathrm{x}) \in \mathfrak{I}_{a}^{\alpha}([\mathrm{a},\mathrm{b}]) \ \triangleleft$$

Par conséquent le résultat est satisfait $\boxdot$

2. .....$f(x) = \sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(t)(x-t)^{(n-1)} + R_{n-1}(x)$ où $R_{n-1}(x) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right)^{n} f(\mathrm{t})\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{dt}$
3. ....Équation d'Abel généralisée = :$f(x) = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\mu}}\mathrm{dt}$ tel-que $0 < \mu < 1$

2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Dans cette section, on introduit la notion de dérivation fractionnaire. l'idée est de définir la dérivée fractionnaire en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire de `Riemann-Liouville`.

Définition 2.1 *[6] (Dérivée fractionnaire de* `Riemann-Liouville`*)*

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, la dérivée fractionnaire au sens de `Riemann-Liouville` *de f d'ordre α où $0 \leq \alpha \leq 1$ notée $\mathfrak{D}^{\alpha} f(x)$ est définie par :*

$$i)\ \mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} f(\mathrm{x}) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \left(\int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1} f(\mathrm{t}) \mathrm{dt} \right) \quad \mathrm{x} > a \tag{II.6}$$

$$ii)\ \mathfrak{D}^{\alpha}_{b-} f(\mathrm{x}) := -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \left(\int_{\mathrm{x}}^{b} (\mathrm{t}-\mathrm{x})^{\alpha-1} f(\mathrm{t}) \mathrm{dt} \right) \quad \mathrm{x} < b \tag{II.7}$$

$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}$ *s'appelle dérivée (gauche) fractionnaire de* `Riemann-Liouville` .

$\mathfrak{D}^{\alpha}_{b-}$ *s'appelle dérivée (droite) fractionnaire de* `Riemann-Liouville`

Remarque 2.1

(i) Soit α , telle que $0 \leq \alpha \leq 1$

alors

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} f = \mathfrak{D}^{1} \circ \mathfrak{I}^{1-\alpha}_{a+} f$$

car

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} f \ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1} f(\mathrm{t}) \mathrm{dt} \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[\mathfrak{I}^{1-\alpha}_{a+} f \right] \\ &= \mathfrak{D}^{1} \circ \mathfrak{I}^{1-\alpha}_{a+} f \end{aligned}$$

(ii) Pour $\alpha = 0$; $\mathfrak{D}^{0}_{a+} = \mathfrak{D}^{0}_{b-} = Id$.

Nous pouvons ,cependant facilement généraliser la définition de dérivée fractionnaire a tout α réel positif , En effet ;

Définition 2.2

Pour une fonction donnée f sur $L_1([a,b])$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+,\ n-1 < \alpha < n$ avec $n = [\alpha]+1$ la dérivée fractionnaire de `(R-L)` *est définit par :*

$$i)\ \mathfrak{D}^{\alpha}_{a+} f(\mathrm{x}) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \right)^{n} \left(\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\mathrm{n}-\alpha-1} f(\mathrm{t}) \mathrm{dt} \right) ; \tag{II.8}$$

$$ii)\ \mathfrak{D}^{\alpha}_{b_-}f(\mathrm{x}) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\right)^n\left(\int_{\mathrm{x}}^{b}(\mathrm{t}-\mathrm{x})^{\mathrm{n}-\alpha-1}f(\mathrm{t})\mathrm{dt}\right); \tag{II.9}$$

où $[\,\cdot\,]$: *la partie entière d'un nombre réel.*

Remarque 2.2

La dérivée fractionnaire de (R-L) d'ordre α *où* $n-1<\alpha<n$ *est défini par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre* $n-\alpha$ *suivit d'une dérivation classique d'ordre* n *où* $n=[\alpha]+1$ *c'est-à-dire :*

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}f = \left(\mathfrak{D}^{n}_{\mathrm{a}_+}\circ\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{\mathrm{a}_+}\right)f$$

Car par hypothèse : $n\geq[\alpha]$*,*

alors

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{n}_{\mathrm{a}_+}\circ\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a_+} &= \mathfrak{D}^{[\alpha]}_{\mathrm{a}_+}\circ\mathfrak{D}^{n-[\alpha]}_{\mathrm{a}_+}\circ\mathfrak{I}^{n-[\alpha]}_{\mathrm{a}_+}\circ\mathfrak{I}^{[\alpha]-\alpha}_{\mathrm{a}_+}\\ \mathfrak{D}^{[\alpha]}_{\mathrm{a}_+}\circ\mathfrak{I}^{[\alpha]-\alpha}_{\mathrm{a}_+} &= \mathfrak{I}^{-\alpha}_{\mathrm{a}_+}\\ &= \mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathrm{a}_+}\end{aligned}$$

Remarque 2.3

Quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *la définition de la dérivée au sens de (R-L) coïncide avec la* $\alpha^{\text{éme}}$ *dérivée classique ; c'est-à-dire :*

$$i)\ \mathfrak{D}^{n}_{a_+}f(\mathrm{x}) = f^{(n)}(\mathrm{t})$$

et

$$ii)\ \mathfrak{D}^{n}_{b_-}f(\mathrm{x}) = (-1)^{(n)}f^{(n)}(\mathrm{t})$$

Exemple 2.1

Soit la fonction suivante :

$$f(\mathrm{x}) = (\mathrm{x}-a)^{\mu} \quad \textit{où} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$

si $n-1<\alpha<n$ *avec* $\alpha-\mu\notin\mathbb{N}$

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}(\mathrm{x}-a)^{\mu} = \left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a_+}(\mathrm{x}-a)^{\mu}\right](\mathrm{x})$$

D'après l'exemple 1.1 ; nous avons

$$\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}(\mathrm{x}-a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+\alpha)}(\mathrm{x}-a)^{\mu+\alpha}$$

D'où

$$\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha}(\mathrm{x}-a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+n-\alpha)}(\mathrm{x}-a)^{\mu+n-\alpha}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}(\mathrm{x}-a)^{\mu} &= \left(\frac{d}{d\mathrm{x}}\right)^{n}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+n-\alpha)}(\mathrm{x}-a)^{\mu+n-\alpha}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+n-\alpha)}\left(\frac{d}{d\mathrm{x}}\right)^{n}(\mathrm{x}-a)^{\mu+n-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+n-\alpha)}\frac{\Gamma(\mu+1+n-\alpha)}{\Gamma(\mu+1-\alpha)}(\mathrm{x}-a)^{\mu-\alpha}\end{aligned}$$

[4]

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}(\mathrm{x}-a)^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\alpha)}(\mathrm{x}-a)^{\mu-\alpha} \quad \textit{(dérivée fractionnaire)}$$

Si $\alpha-\mu \in \mathbb{N}$ *on a*

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}(\mathrm{x}-a)^{\mu} = \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}(\mathrm{x}-a)^{\alpha-j} = 0 \quad \textit{pour tout } j \in \{1,2,\cdots n\} \tag{i}$$

Cas particulier $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{a+}^{1}(\mathrm{x}-a)^{\mu} &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu)}(\mathrm{x}-a)^{\mu-1} \\ &= \mu(\mathrm{x}-a)^{\mu-1} \\ &= \frac{d}{d\mathrm{x}}(\mathrm{x}-a)^{\mu} \qquad \textit{(Dérivée usuelle)}\end{aligned}$$

Remarque 2.4

(a) *Il est important de noter que la dérivée au sens de* `(R-L)` *d'une constante n'est ni nulle ni constante, car si on prend le même exemple précédant pour* $\mu = 0$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}(1) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(\mathrm{x}-a)^{-\alpha} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

4. ..... $$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}(x-a)^{\lambda} &= \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)(x-a)^{\lambda-n} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-n)}(x-a)^{\lambda-n}\end{aligned}$$

(b) *Par contre la dérivée de (R-L) d'une fonction non identiquement nulle peut être nulle ;*

Prenons par exemple $\mu = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $a_+ = 0$ *nous avons :*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_0^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{x}^{-\frac{1}{2}}\right) &= \frac{d}{d\mathrm{x}}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dt}\right)\\ &= \frac{d}{d\mathrm{x}}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^{\mathrm{x}}\mathrm{x}^{-\frac{1}{2}}(1-\frac{t}{\mathrm{x}})^{-\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dt}\right)\end{aligned}$$

On fait un changement de variable $u = \dfrac{t}{\mathrm{x}}$ *on obtient*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_0^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{x}^{-\frac{1}{2}}\right) &= \frac{d}{d\mathrm{x}}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^1\mathrm{x}^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{x}^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{x}\mathrm{du}\right)\\ &= \frac{d}{d\mathrm{x}}(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\underbrace{\int_0^1(1-u)^{-\frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{du})}_{\beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\end{aligned}$$

Et en utilisant la relation I.14 on a :

$$\begin{aligned}&= \frac{d}{d\mathrm{x}}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}\right)\\ &= \frac{d}{d\mathrm{x}}\left(\Gamma(\tfrac{1}{2})\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

$\boxdot$

Définition 2.3

On désigne par $\mathcal{A}^1([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ *l'espace des fonctions absolument continue.*

Remarque 2.5

$F \in \mathcal{A}^1([\mathrm{a},\mathrm{b}])$*, si et seulement s'il existe une fonction* f *intégrable sur* $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ *(au sens de Lebesgue) telle que pour tout* $\mathrm{x} \in [\mathrm{a},\mathrm{b}]$ *:*

$$F(\mathrm{x}) - F(\mathrm{a}) = \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{a}} f(t)dt$$

Proposition 2.1 *[3]*

Soient $f \in \mathcal{A}^1([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ *et* $0 < \alpha < 1$ *,* $\mathfrak{D}^\alpha f$ *existe* $p.p$ *sur* $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ *; de plus* $\mathfrak{D}^\alpha f \in L_1([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ *pour* $1 \leq p \leq \frac{1}{\alpha}$

alors on a

$$i)\ \mathfrak{D}_{\mathrm{a}+}^\alpha f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(\mathrm{a})}{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^\alpha} + \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} f'(\mathrm{t})(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{-\alpha}\mathrm{dt}\right]$$

$$ii)\ \mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathrm{b}-}f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{f(\mathrm{b})}{(\mathrm{b}-\mathrm{x})^{\alpha}} + \int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{b}} f'(\mathrm{t})(\mathrm{t}-\mathrm{x})^{-\alpha}\mathrm{dt}\right]$$

Généralement si $f \in \mathcal{A}^n([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ *et* $\alpha \geq 1$ *; la dérivée fractionnaire* $\mathfrak{D}^{\alpha}$ *existe* $(p.p)$ *sur* $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ *de plus elle est donnée par :*

$$i)\ \mathfrak{D}^{\alpha}_{a+}f(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathfrak{D}^k f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\mathfrak{D}^n f(\mathrm{t})(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{n-\alpha-1}\mathrm{dt}$$

$$ii)\ \mathfrak{D}^{\alpha}_{b-}f(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathfrak{D}^k f(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(\mathrm{b}-\mathrm{x})^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{\mathrm{x}}^{\mathrm{b}}\mathfrak{D}^n f(\mathrm{t})(\mathrm{t}-\mathrm{x})^{n-\alpha-1}\mathrm{dt}$$

• *Dans ce cas l'approche de* `Riemann-Liouville` *et l'approche de* `Grünwald-Letnikov`[5] *sont équivalentes.*

Preuve 2.1

◇ *Soit* $f \in \mathcal{A}^1([a,b]);\quad 0 < \alpha < 1$

En utilisant la définition 2.1 nous obtenons

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathrm{a}}f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} f(\mathrm{t})(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{-\alpha}\mathrm{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\left(f(a) + \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} f'(u)du\right)(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{-\alpha}\mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(a)\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{-\alpha}\mathrm{dt} + \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} f'(u)(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{-\alpha}dudt$$

En appliquant le Théorème de Fubini :

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\mathrm{a}}f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(a)}{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} f'(u)\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{u})^{1-\alpha}}{1-\alpha}du\right)$$

En utilisant les résultats classiques de la théorie de l'intégration de Lebesgue on trouve l'énoncé d'intégrabilité.

◇ *De la même maniéré on peut généraliser le résultat pour tout* $f \in \mathcal{A}^n([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ *en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées.* ⊡

5. *.....L'idée de l' approche de* `Grünwald-Letnikov` *est basée sur la remarque qu'on peut exprimer la dérivée d'ordre entier* α *(si* α *est positif) et l'intégrale répétée (*$-\alpha$*) fois (si* α *est négatif) d'une fonction f*

Proposition 2.2 *[3]*

Soient α, β *des réels positifs et soit* g *fonction de* $L_1([a,b])$ *et si il existe* g *telle que* $f = \mathfrak{I}^{\alpha+\beta} g$ *alors*

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}^{\beta}\right)(f(\mathrm{x})) = \mathfrak{D}^{\alpha+\beta}(f(\mathrm{x})) \tag{II.10}$$

Notez que pour appliquer cette identité, nous n'avons pas besoin de connaître la fonction g *explicitement ; il suffit de savoir qu'une telle fonction existe.*

Preuve 2.2

De l'hypothèse sur f *et de la définition de la dérivée de* (R-L) *nous obtenons :*

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+} \circ \mathfrak{D}^{\beta}_{a_+}(f(\mathrm{x})) \quad = \left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+} \circ \mathfrak{D}^{\beta}_{a_+}\right)\left(\mathfrak{I}^{\alpha+\beta}_{a_+} g(\mathrm{x})\right)$$

En utilisant la remarque 1.1 *on a :*

$$\begin{cases} \mathfrak{D}^{[\alpha]} \circ \mathfrak{I}^{[\alpha]} & = Id \\ \mathfrak{D}^{[\beta]} \circ \mathfrak{I}^{[\beta]} & = Id \end{cases}$$

alors

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+} \circ \mathfrak{D}^{\beta}_{a_+}(f(\mathrm{x})) \quad = \left(\mathfrak{D}^{[\alpha]}\mathfrak{I}^{[\alpha]-\alpha} \circ \mathfrak{D}^{[\beta]}\mathfrak{I}^{[\beta]-\beta}\right)\left(\mathfrak{I}^{\alpha+\beta} g(\mathrm{x})\right)$$

De la proposition 1.2 *de l'intégrale nous avons :*

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{D}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}^{\beta}\right)(f(\mathrm{x})) \quad &= \mathfrak{D}^{[\alpha]} \circ \mathfrak{I}^{[\alpha]-\alpha} \circ \mathfrak{D}^{[\beta]} \circ \mathfrak{I}^{[\beta]+\alpha} g(\mathrm{x}) \\ &= \mathfrak{D}^{[\alpha]} \circ \mathfrak{I}^{[\alpha]-\alpha} \circ \mathfrak{D}^{[\beta]} \circ \mathfrak{I}^{[\beta]} \circ \mathfrak{I}^{\alpha} g(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

à cause de remarque 1.1 *corollaire* 3.1 *on obtient :*

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{D}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}^{\beta}\right)(f(\mathrm{x})) \quad &= \mathfrak{D}^{[\alpha]} \circ \mathfrak{I}^{[\alpha]-\alpha} \circ \mathfrak{I}^{\alpha} g(\mathrm{x}) \\ &= \mathfrak{D}^{[\alpha]} \circ \mathfrak{I}^{[\alpha]-\alpha} g(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}^{\beta}\right)(f(\mathrm{x})) = g(\mathrm{x})$$

Si la condition du proposition 2.2 *n'est pas satisfaite ;*

Citons les contres exemples suivantes :

Exemple 2.2

Soit

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{-\frac{1}{2}}$$

Prenons $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ *, alors , en introduisant l'exemple 2.1 on constate que*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_0^{\alpha}(\mathrm{x}^{-\frac{1}{2}}) &= \mathfrak{D}_0^{\beta}(\mathrm{x}^{-\frac{1}{2}}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\left(\mathfrak{D}_0^{\alpha} \circ \mathfrak{D}_0^{\beta}\right) \mathrm{x}^{-\frac{1}{2}} = 0$$

mais

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_0^{\alpha+\beta}(\mathrm{x})^{-\frac{1}{2}} &= \mathfrak{D}_0^{1}(\mathrm{x})^{-\frac{1}{2}} \\ -(2x^{\frac{3}{2}})^{-1} &\neq 0 \end{aligned}$$

Exemple 2.3

Soit

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\frac{1}{2}}$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{3}{2}$ *alors , encore en appliquant l'exemple 2.1 on trouve que :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_0^{\alpha}(\mathrm{x}^{\frac{1}{2}}) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \mathfrak{D}_0^{\beta}(\mathrm{x}^{\frac{1}{2}}) &= 0 \end{aligned}$$

ceci implique

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}^{\beta}\right) f(\mathrm{x}) = 0$$

mais

$$\begin{aligned} \left(\mathfrak{D}^{\beta} \circ \mathfrak{D}^{\alpha}\right) f(\mathrm{x}) &= \frac{-\mathrm{x}^{-\frac{3}{2}}}{4} \\ &= \mathfrak{D}^{2} f(\mathrm{x}) \\ &= \mathfrak{D}^{\alpha+\beta} f(\mathrm{x}) \end{aligned}$$

► *Finalement on peut récapituler les résultats des deux exemples précédant :*

D'une part

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}^{\beta}\right) f(\mathrm{x}) = \left(\mathfrak{D}^{\beta} \circ \mathfrak{D}^{\alpha}\right) f(\mathrm{x}) \neq \mathfrak{D}^{\alpha+\beta} f(\mathrm{x})$$

D'autre part

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}^{\beta}\right) f(\mathrm{x}) \neq \left(\mathfrak{D}^{\beta} \circ \mathfrak{D}^{\alpha}\right) f(\mathrm{x}) = \mathfrak{D}^{\alpha+\beta} f(\mathrm{x})$$

Théorème 2.1

Soit $n-1<\alpha\leq n$ *et* f *une fonction vérifiant :*

$$\mathfrak{D}_a^\alpha f(\mathrm{x})=0$$

alors

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{C}_k\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha-n)}(x-a)^{k+\alpha-n}\quad \textit{où :}\ \ \mathbf{C}_k\ \in\ \mathbb{R}\ \ (k=1\ldots,n)$$

Preuve 2.1

Supposons que

$$\mathfrak{D}_a^\alpha f(\mathrm{x})=0$$

D'après la remarque 2.2 on a :

$$\left(\frac{d}{d\mathrm{x}}\right)^m\left(\mathfrak{I}_a^{m-\alpha}f\right)(\mathrm{x})=0$$

C'est-à-dire

$$\left(\mathfrak{I}_a^{m-\alpha}f\right)(\mathrm{x})=\sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{C}_k(x-a)^k$$

En appliquant l'opérateur $\mathfrak{I}_a^\alpha$ *nous obtenons*

$$\left(\mathfrak{I}_a^{m}f\right)(\mathrm{x})=\sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{C}_k\mathfrak{I}_a^\alpha\left((\mathrm{x}-a)^k\right)$$

Maintenant, l'utilisation de l'exemple 1.1 donne :

$$\left(\mathfrak{I}_a^{m}f\right)(\mathrm{x})=\sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{C}_k\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}(\mathrm{x}-a)^{k+\alpha}$$

En effet ;

L'utilisation de la dérivée classique et la formule 4 on établit le résultat désiré ⊡

Théorème 2.2 *[3]*

Soit $\alpha>0$; $(f_k)_{k=1}^\infty$ *suite de fonction continue et uniformément convergente sur* $[a,b]$ *et* $\mathfrak{D}_a^\alpha(f_k)$ *existe pour tout* k *, de plus supposons que* $(\mathfrak{D}_a^\alpha f_k)_{k=1}^\infty$ *converge uniformément sur* $[a+\varepsilon,b]$ *pour toute* $\varepsilon>0$ *; alors pour tout* $\mathrm{x}\in[a,b]$ *,nous avons :*

$$\left(\lim_{k\to\infty}\mathfrak{D}_a^\alpha f_k\right)(\mathrm{x})=\left(\mathfrak{D}_a^\alpha\lim_{k\to\infty}f_k\right)(\mathrm{x})$$

Preuve 2.2

Nous rappelons que

$$\mathfrak{D}_a^\alpha=\mathfrak{D}_a^{[\alpha]}\circ\mathfrak{I}_a^{[\alpha]-\alpha}$$

D'après le Théorème 1.1 nous avons :

$\mathfrak{I}_a^{[\alpha]-\alpha}$ *est uniformément convergente et on peut échanger entre la limite et l'intégrale fractionnaire .*

On a par hypothèse , la $\alpha^{éme}$ *dérivée de cette série converge uniformément sur tout sous intervalle compact de* $[a, b]$ *, ainsi par un Théorème standard de l'analyse nous pouvons également échanger entre la limite et la dérivée sur* $[a, b]$ ⊡

Proposition 2.3

Soit f *une fonction analytique sur* $[a-h, a+h]$*, avec* $h > 0$ *et* $\alpha > 0$.

Alors :

$$i)\ \mathfrak{D}_a^\alpha f(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} \frac{(\mathrm{x}-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \mathfrak{D}^k f(\mathrm{x}) \qquad \textit{avec} \quad a < \mathrm{x} < a + \frac{h}{2}$$

et

$$ii)\ \mathfrak{D}_a^\alpha f(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{(\mathrm{x}-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \mathfrak{D}^k f(a) \qquad \textit{avec} \quad a < \mathrm{x} < a + h$$

En particulier $\mathfrak{D}_a^\alpha$ *est analytique sur* $[a, a+h]$.

où :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Représente les coefficients binomiales avec $k \in \mathbb{N}$

Preuve 2.3

Nous utilisons la proposition 1.4 et la remarque 2.2 nous obtenons

$$\mathfrak{D}_a^\alpha f(\mathrm{x}) = \mathfrak{D}^{[\alpha]} \mathfrak{I}_a^{[\alpha]-\alpha} f(\mathrm{x}) \tag{II.11}$$

En utilisant le fait que : $k!\Gamma(\alpha)(\alpha+k) \begin{pmatrix} -\alpha \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k \Gamma(k+1+\alpha)$ *Cela nous permet de réécrire la proposition 1.4 comme :*

$$\mathfrak{I}^{[\alpha]-\alpha} f(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha - [\alpha] \\ k \end{pmatrix} \frac{(\mathrm{x}-a)^{k+[\alpha]-\alpha}}{\Gamma(k+1+[\alpha]-\alpha)} \mathfrak{D}^k f(\mathrm{x}) \tag{I}$$

Nous dérivons (I) $[\alpha]$*-fois par rapport à* x *nous trouvons*

$$\mathfrak{D}_a^\alpha f(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha - [\alpha] \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{\Gamma(k+1+[\alpha]-\alpha)} \mathfrak{D}^{[\alpha]} \left((\mathrm{x}-a)^{k+[\alpha]-\alpha} \mathfrak{D}^k f \right)(\mathrm{x})$$

D'après la formule de Leibniz 1.1 nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_a^{\alpha} f(\mathrm{x}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-[\alpha]}{k} \frac{1}{\Gamma(k+1+[\alpha]-\alpha)} \\ &\times \sum_{j=0}^{[\alpha]} \binom{[\alpha]}{j} \mathfrak{D}^{[\alpha]-j}\left[(.-\mathrm{a})^{k+[\alpha]-\alpha}\right](\mathrm{x}) \mathfrak{D}^{k+j} f(\mathrm{x}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha-[\alpha]}{k} \sum_{j=0}^{[\alpha]} \binom{[\alpha]}{j} \frac{(\mathrm{x}-a)^{k+j-\alpha}}{\Gamma(k+1+j-\alpha)} \mathfrak{D}^{k+j} f(\mathrm{x}).\end{aligned}$$

Par convention, $\binom{\mu}{j} = 0$ *si* $\mu \in \mathbb{N}$ *et* $\mu < j$ *. Donc nous pouvons remplacer la limite supérieure dans la deuxième somme de* ∞ *sans changer l'expression.*

Posons $j = l - k$*, nous trouvons :*

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_a^{\alpha} f(\mathrm{x}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \binom{\alpha-[\alpha]}{j} \binom{[\alpha]}{l-k} \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{l-\alpha}}{\Gamma(l+1-\alpha)} \mathfrak{D}^{l} f(\mathrm{x}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} \binom{\alpha-\lceil\alpha\rceil}{j} \binom{[\alpha]}{l-k} \frac{(\mathrm{x}-a)^{l-\alpha}}{\Gamma(l+1-\alpha)} \mathfrak{D}^{l} f(\mathrm{x})\end{aligned}$$

Un calcul explicite donne :

$$\sum_{k=0}^{l} \binom{\alpha-[\alpha]}{k} \binom{[\alpha]}{l-k} = \binom{\alpha}{l}$$

D'où le résultat .

Notation 2.1

Soit α *réel positif .*

On notera par $\lfloor\alpha\rfloor$ *la partie entier par défaut c'est à dire*

$$\lfloor\alpha\rfloor \leqslant \alpha < \lfloor\alpha\rfloor + 1$$

On notera par $\lceil\alpha\rceil$ *la partie entier par excès c'est à dire*

$$\lceil\alpha\rceil - 1 < \alpha \leqslant \lceil\alpha\rceil$$

Théorème 2.3 *[11] (Formule de Leibniz pour les opérateurs de Riemann-Liouville)*

Soit $\alpha > 0$ *, supposons que* f, g *deux fonctions analytiques sur* $[a-h, a+h]$ *avec* $h > 0.$

Alors :

$$\mathfrak{D}^{\alpha}(fg)(x) = \sum_{k=0}^{\lceil\alpha\rceil} \binom{\alpha}{k} (\mathfrak{D}_a^k f)(x)(\mathfrak{D}_a^{\alpha-k} g)(x) + \sum_{k=\lfloor\alpha\rfloor+1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (\mathfrak{D}_a^k f)(x)(\mathfrak{I}_a^{\alpha-k} g)(x)$$

pour tout $a < x < a + \frac{h}{2}.$

Preuve 2.3

En utilisant la proposition 2.3 nous avons

$$\mathfrak{D}_a^\alpha (fg)(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(\mathrm{x}-\mathrm{a})^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \mathfrak{D}^k (fg)(\mathrm{x}).$$

Maintenant, nous appliquons la formule standard de Leibniz 1.1 à $\mathfrak{D}^k (fg)$ et inversons l'ordre d' addition. Cela donne

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_a^\alpha (fg)(\mathrm{x}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mathfrak{D}^j f(x) \mathfrak{D}^{k-j} g(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \left(\alpha_k\right) \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)} \binom{k}{j} \mathfrak{D}^j f(x) \mathfrak{D}^{k-j} g(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{D}^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{l+j-\alpha}}{\Gamma(l+j+1-\alpha)} \binom{l+j}{j} \mathfrak{D}^l g(x)
\end{aligned}$$

Puisque

$$\binom{\alpha}{l+j} \binom{l+j}{j} = \binom{\alpha}{j} \binom{\alpha-j}{l}$$

Nous donne

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_a^\alpha (fg)(\mathrm{x}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{D}^j f(x) \binom{\alpha}{j} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha-j}{l} \frac{(x-a)^{l+j-\alpha}}{\Gamma(l+j+1-\alpha)} \mathfrak{D}^l g(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} \binom{\alpha}{j} \mathfrak{D}^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha-j}{l} \frac{(x-a)^{l+j-\alpha}}{\Gamma(l+j+1-\alpha)} \mathfrak{D}^l g(x) \\
&+ \sum_{j=\lfloor\alpha\rfloor+1}^{\infty} \binom{\alpha}{j} \mathfrak{D}^j f(x) \sum_{l=0}^{\infty} \binom{\alpha-j}{l} \frac{(x-a)^{l+j-\alpha}}{\Gamma(l+j+1-\alpha)} \mathfrak{D}^l g(x)
\end{aligned}$$

D'après la proposition 2.3 et 1.4 nous pouvons remplacer l'intérieur sommes et on déduire le résultat.

Proposition 2.4

Soient f_1, f_2 deux fonctions définies sur $[a, b]$, telle que : $\mathfrak{D}_a^\alpha f_1(\mathrm{x})$ et $\mathfrak{D}_a^\alpha f_2(\mathrm{x})$ existe $p.p$ avec $n-1 < \alpha < n$; de plus soit $\lambda, \mu \in \mathcal{K} = \mathbb{R}$ et si la somme $\mathfrak{D}_a^\alpha (\lambda f_1 + \mu f_2)$ existe $p.p$.

Alors :

$$\mathfrak{D}_a^\alpha (\lambda f_1(\mathrm{x}) + \mu f_2(\mathrm{x})) = \lambda \mathfrak{D}_a^\alpha f_1(\mathrm{x}) + \mu \mathfrak{D}_a^\alpha f_2(\mathrm{x})$$

Preuve 2.4

soient $f_1, f_2 \in [a, b];\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_a^{\alpha}\left(\lambda f_1(\mathrm{x})+\mu f_2(\mathrm{x})\right) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{\mathrm{dx}}\right)^n \int_a^{\mathrm{t}} (t-s)^{n-\alpha-1}\left(\lambda f_1(s)+\mu f_2(s)\right) ds \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} (t-s)^{n-\alpha-1}\lambda f_1(s) ds \\
&+ \frac{\mu}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} (t-s)^{n-\alpha-1}\mu f_2(s) ds \\
&= \lambda \mathfrak{D}_a^{\alpha} f_1(t) + \mu \mathfrak{D}_a^{\alpha} f_2(t)
\end{aligned}$$

Remarque 2.6

On déduire que la dérivée fractionnaire est une opération linéaire pour n'importe quelle approche de dérivation (`Caputo,Grûnwald` ...) particulièrement au sens de `Riemann-Liouville`.

3 Relation entre intégrale et dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

On peut remarquer que la relation entre l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de `Riemann-Liouville` *découle de l'équation intégrale* `d'Abel` *pour chaque* α *dans* $]0,1[$

Soit

$$f(\mathrm{x})=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\frac{\phi(t)}{(\mathrm{x}-t)^{1-\alpha}}dt \tag{II.12}$$

Posons : $\mathrm{x}=t$ et $t=s$ *et en multipliant les deux membres de l'équation* (II.12) *par* $(\mathrm{x}-t)^{-\alpha}$ *et nous intégrons, nous obtenons* :

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\frac{dt}{(\mathrm{x}-t)^{\alpha}}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}}\frac{\phi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds=\Gamma(\alpha)\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\frac{f(t)}{(\mathrm{x}-t)^{\alpha}}dt$$

En utilisant le Théorème Fubini , on peut changer l'ordre d'intégration et on obtient

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\phi(s)ds\int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{x}}\frac{dt}{(\mathrm{x}-t)^{\alpha}(t-s)^{1-\alpha}}=\Gamma(\alpha)\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\frac{f(t)}{(\mathrm{x}-t)^{\alpha}}dt$$

par le changement de variable : $t=s+\tau(\mathrm{x}-s)$ *et en utilisant la formule de Bêta 2.2 on a* :

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}(\mathrm{x}-t)^{-\alpha}(t-s)^{\alpha-1}dt &= \int_0^1\tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau\\ &=\beta(\alpha,1-\alpha)\\ &=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\end{aligned}$$

Par conséquent , nous obtenons :

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\phi(s)ds=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\frac{f(t)}{(\mathrm{x}-t)^{\alpha}}dt$$

D'où, après la différenciation :

$$\phi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{d\mathrm{x}}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\frac{f(t)}{(\mathrm{x}-t)^{\alpha}}dt \tag{II.13}$$

Donc ,si (II.12) *a une solution, elle est nécessairement donnée par* (II.13) *pour toute* α dans $]0.1[$. *On constate que* (II.12) *représente* $\alpha^{\text{éme}}$ *intégrale de* `(R-L)` *et l'inversion* (II.13) *est* $\alpha^{\text{éme}}$ *dérivée de* `(R-L)` *; d'où nous avons les identifications suivantes :*

Définition 3.1

Si $\alpha \in \mathbb{R}_-$ *, alors l'intégrale fractionnaire* `(R-L)` *d'ordre* α *est la dérivée fractionnaire d'ordre* $-\alpha$ *c'est -à -dire :*

$$\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha}=\mathfrak{D}_{a_+}^{-\alpha}$$

Définition 3.2

Si $\alpha \in \mathbb{R}_-$ *, alors la dérivée fractionnaire* (R-L) *d'ordre* α *représente l'intégrale fractionnaire d'ordre* $-\alpha$ *c'est -à -dire :*

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+} = \mathfrak{I}^{-\alpha}_{a_+}$$

Théorème 3.1

Soit $\alpha \geq 0, \forall f \in L_1([a,b])$

On a :

$$\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+} \circ \mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}\right) f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) \qquad p.p$$

C'est-à-dire l'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de (R-L) *est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.*

Preuve 3.1

- *Cas* $\alpha = 0$ *:*

Par définition :

$$\left(\mathfrak{D}^{0}_{a_+} \circ \mathfrak{I}^{0}_{a_+}\right) f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$$

- *Cas* $\alpha > 0$ *:*

De la Remarque 1.1 et de Lemme 1.2 , on déduit :

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+} \circ \mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}\right) f(\mathrm{x}) &= \left(\frac{d}{d\mathrm{x}}\right)^n \left[\mathfrak{I}^{n-\alpha}_{a_+}\left(\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+} f(\mathrm{x})\right)\right] \\ &= \left(\frac{d}{d\mathrm{x}}\right)^n \left[\mathfrak{I}^{n}_{a_+} f(\mathrm{x})\right] \\ &= f(\mathrm{x})\end{aligned}$$

$\boxdot$

Corollaire 3.1

Pour α *réel positif on a :* $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+} \circ \mathfrak{D}^{-\alpha}_{a_+} = Id$ *et* $\mathfrak{I}^{-\alpha}_{a_+} \circ \mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+} = Id$ *c'est à dire :*

Pour toute $f \in L_1([a,b])$ *:*

$$\begin{aligned}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+} \circ \mathfrak{D}^{-\alpha}_{a_+}\right) f(\mathrm{x}) &= f(\mathrm{x}) \\ \left(\mathfrak{I}^{-\alpha}_{a_+} \circ \mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}\right) f(\mathrm{x}) &= f(\mathrm{x})\end{aligned}$$

Preuve 3.1

► *La définition 3.1 et le Théorème 3.1 on obtient :*

$$\mathfrak{I}_{a_+}^{-\alpha} \circ \mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} \left(f(\mathrm{x})\right) = \mathfrak{D}_{a_+}^{\alpha} \circ \mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} \left(f(\mathrm{x})\right) = f(\mathrm{x})$$

► *La définition 3.2 et le Théorème 3.1 on obtient :*

$$\left(\mathfrak{D}_{a_+}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}_{a_+}^{-\alpha}\right) f(\mathrm{x}) = \left(\mathfrak{D}_{a_+}^{\alpha} \circ \mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha}\right) f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$$

D'où on déduit le résultat ⊡

Théorème 3.2

Soit $\alpha > 0$ *et soit* $f \in \mathcal{C}([a, b])$ *satisfaisant les conditions du Théorème 1.3.*

Alors :

$$\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}_{a_+}^{\alpha}\right) f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x})$$

Preuve 3.2

De le Théorème 1.3 et la proposition 1.2 on a :

$$\begin{aligned}
\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}_{a_+}^{\alpha}\right) f(\mathrm{x}) &= \left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}_{a_+}^{\alpha}\right) \left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} g(\mathrm{x})\right) \\
&= \left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} g(\mathrm{x})\right) \\
&= f(\mathrm{x})
\end{aligned}$$

⊡

Théorème 3.3 *[7]*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *et* $n = [\alpha] + 1$ *. Soit* $f \in L_1([a, b])$ *telle que* $\mathfrak{I}^{n-\alpha} f \in \mathcal{A}^n([a, b])$.

Alors $p.p$ *sur* $[a, b]$ *on a :*

$$a) \quad \left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}_{a_+}^{\alpha}\right) f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathfrak{D}^{(n-k)}\left(\mathfrak{I}^{n-\alpha} f(a)\right)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (x - a)^{\alpha - k}$$

En particulier , si $0 < \alpha < 1$ *alors :*

$$b) \quad \left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}_{a_+}^{\alpha}\right) f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) - \frac{\mathfrak{I}^{1-\alpha} f(a)}{\Gamma(\alpha)} (\mathrm{x} - a)^{\alpha - 1}$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$c) \quad \left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha} \circ \mathfrak{D}_{a_+}^{\alpha}\right) f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathfrak{D}^{k} f(a)}{k!} (\mathrm{x} - a)^{k}.$$

Notation 3.1

on peut noté :

$$\mathfrak{I}^{n-\alpha} f \quad \blacktriangleright \quad f_{n-\alpha}$$

Remarque 3.1

pour $n-1<\alpha<n$ *on a :*

$$\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha}\circ\mathfrak{D}_{a_+}^{\beta}\right)f(\mathrm{x})=\mathfrak{D}_{a_+}^{\beta-\alpha}f(\mathrm{x})-\sum_{k=1}^{n}\left[\mathfrak{D}^{\beta-k}f(\mathrm{x})\right]_{\mathrm{x}=a}\frac{(\mathrm{x}-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

On déduit alors que la dérivée et l'intégration fractionnaire ne commutent pas en général ; c'est-à-dire :

$$\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha}\circ\mathfrak{D}_{a_+}^{\beta}\right)f(\mathrm{x})\neq\left(\mathfrak{D}_{a_+}^{\beta}\circ\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha}\right)f(\mathrm{x})$$

Chapitre III

Équations différentielles d'ordres fractionnaire de Types Riemann-Liouville (R-L)

Dans ce chapitre, nous intéressons a l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un équation différentielle d'ordre fractionnaire de type `Riemann-Liouville` *,sur un intervalle borné du* $\mathbb{R}$.

1 Équations différentielles fonctionnelles de type Cauchy

En général, le problème non linéaire d'équation différentielle fractionnaire d'ordre α *sur un intervalle borné* $\mathcal{J} = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $k = \lceil \alpha \rceil + 1$ *s'écrit sous la forme :*

$$(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+} y)(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}, y(\mathrm{x})) \ , \ \alpha > 0 \quad ; \mathrm{x} > \mathrm{a} \tag{III.1}$$

avec la condition intégrale

$$(\mathfrak{I}^{m-\alpha}_{a_+} y)(a_+) = b_m \qquad , \ b_m \ \in \ \mathbb{R} \, (m = 1, \dots k) \tag{III.2}$$

$\mathfrak{D}^{\alpha}$ *est la dérivée fractionnaire de* `(Riemann-Liouville)` *.*
le second membre $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction non linéaire donnée .*

En particulier , si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *le problème* (III.1) *est réduit au problème de Cauchy d'équation différentielle ordinaire d'ordre* $n \in \mathbb{N}$ avec condition intégrale.

$$(\mathfrak{D}^{n}_{a_+}y)(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}, y(\mathrm{x})) \tag{III.3}$$

$$(\mathfrak{I}^{m-n}_{a_+}y)(a_+) = b_m \qquad , b_m \in \mathbb{R} \tag{III.4}$$

Si $0 < \alpha < 1$, *le problème* (III.1) *devient :*

$$(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}y)(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}, y(\mathrm{x})) \tag{III.5}$$

$$(\mathfrak{I}^{1-\alpha}_{a_+}y)(a_+) = b \qquad , b \in \mathbb{R} \tag{III.6}$$

1.1 Existence de solution

Dans cette section, on s'intéresse à montrer l'existence d'une solution d'un problème à valeur intégrale d'ordre fractionnaire de `Riemann-Liouville` (III.5).(III.6) *défini sur* $\mathcal{J} = [a, b]$ *, où* y *est une fonction dans* $L_1(\mathcal{J})$.

Définition 1.1

Une fonction $y \in L_1(\mathcal{J})$ *est dite solution du problème* (III.5).(III.6) *si elle satisfait l'équation* (III.5) *sur* $\mathcal{J}$ *et vérifie la condition* (III.6) .

Lemme 1.1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ *et* f *une fonction :*$\mathcal{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Une fonction y *dans* $L_1([a, b])$ *est une solution du problème* (III.5).(III.6) *si et seulement si elle est une solution de l'équation intégrale suivante*

$$y(\mathrm{x}) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(\mathrm{x} - a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}} (x - t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt \tag{III.8}$$

En particulier si la condition intégrale est nulle on obtient :

$$y(\mathrm{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}} (x - t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt \tag{II}$$

Preuve 1.1

$\Rightarrow$ *D'abord nous prouvons la condition nécessaire :*

Soit $y(\mathrm{x}) \in L_1([a, b])$ *satisfait les relations* (III.5).(III.6) *;puis* $f(\mathrm{x}, y) \in L_1([a, b])$, (III.5) *signifie* *que* $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}y(\mathrm{x})$ *existe dans* $L_1([a,b])$.

D'après la proposition 1.3 nous obtenons :

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}y(\mathrm{x}) = \left(\mathfrak{I}^{1-\alpha}y\right)'(\mathrm{x}) \quad \textit{et} \quad (\mathfrak{I}^{0}_{a_+}y)(\mathrm{x}) = y(\mathrm{x}) \tag{III.9}$$

D'après la formule (III.9) *nous voyons que* $\mathfrak{I}^{1-\alpha}y(\mathrm{x}) \in \mathcal{A}^1([a,b])$.

Selon la proposition 1.1 l'intégrale $\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f(\mathrm{x},y(\mathrm{x}))$ *existe dans* $L_1([a,b])$.

En appliquant l'opérateur $\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}$ *sur les deux membres de* (III.5)

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}y(\mathrm{x}) &= \mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f(\mathrm{x},y(\mathrm{x})) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}}(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt \end{aligned} \tag{A}$$

D'autre part comme $\mathfrak{I}^{1-\alpha}_{a_+}y = \mathfrak{D}^{\alpha-1}_{a_+}y$ *nous avons*

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}y(\mathrm{x}) &= y(\mathrm{x}) - \frac{\mathfrak{D}^{\alpha-1}y(a)}{\Gamma(\alpha)}(\mathrm{x}-a)^{\alpha-1} \\ &= y(\mathrm{x}) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(\mathrm{x}-a)^{\alpha-1} \end{aligned} \tag{B}$$

De l'équation (A) *et* (B) *nous obtenons :*

$$y(\mathrm{x}) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}(\mathrm{x}-a)^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}}(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt \quad \textit{avec} \quad 0<\alpha<1$$

d'où la condition nécessaire est satisfaite .

$\Leftarrow$ *Maintenant nous montrons la condition suffisante :*

Soit $y(\mathrm{x}) \in L_1([a,b])$ *satisfait l'équation* (III.8) .

Nous appliquons l'opérateur $\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}$ *aux deux membres de l'équation* (III.8) *, nous trouvons :*

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}y(\mathrm{x}) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}(\mathrm{x}-a)^{\alpha-1}\right) + \left(\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}\circ\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f(\mathrm{x},y(\mathrm{x}))\right)$$

En utilisant l'exemple (i) *on a :*

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}(\mathrm{x}-a)^{\alpha-1} = 0 \quad \textit{car} \quad \alpha > \alpha-1$$

Et d'après le Théorème 3.1 on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}\circ\mathfrak{I}^{\alpha}_{a_+}f(\mathrm{x},y(\mathrm{x})) &= \mathfrak{I}^{\alpha-\alpha}f(\mathrm{x},y(\mathrm{x})) \\ &= f(\mathrm{x},y(\mathrm{x})) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathfrak{D}^{\alpha}_{a_+}y(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x},y(\mathrm{x})) \qquad 0<\alpha<1 \ ; \ \mathrm{x}>a$$

donc nous arrivons à l'équation (III.5).

Montrons que y *vérifie* (III.6) *:*

Nous appliquons l'opérateur $\mathfrak{I}_{a_+}^{1-\alpha}$ *aux deux membres de* (III.8) *c'est-à-dire*

$$\mathfrak{I}_{a_+}^{1-\alpha}y(\mathrm{x}) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\left(\mathfrak{I}_{a_+}^{1-\alpha}(\mathrm{x}-a)^{\alpha-1}\right) + \left(\mathfrak{I}_{a_+}^{1-\alpha}\circ\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha}f(\mathrm{x},y(\mathrm{x}))\right) \tag{C}$$

D'après l'exemple 1.1 on a

$$\mathfrak{I}_{a_+}^{1-\alpha}(\mathrm{x}-a)^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} \tag{D}$$

La proposition 1.2 nous donnons

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{a_+}^{1-\alpha}\circ\mathfrak{I}_{a_+}^{\alpha}f(\mathrm{x},y(\mathrm{x})) &= \mathfrak{I}_{a_+}^{1-\alpha+\alpha}f(\mathrm{x},y(\mathrm{x}))\\ &= \mathfrak{I}_{a_+}^{1}f(\mathrm{x},y(\mathrm{x}))\end{aligned} \tag{E}$$

D'où (C) ,(D) *et* (E) *nous arrivons à*

$$\mathfrak{I}_{a_+}^{1-\alpha}y(\mathrm{x}) = b + \int_a^{\mathrm{x}} f(t,y(t))dt$$

et quand $x \to a_+$ *, nous obtenons la relation*

$$\mathfrak{I}_{a_+}^{1}y(a_+) = b$$

Ainsi la condition suffisante est satisfaite .

En particulier si la condition est nulle nous obtenons

$$y(\mathrm{x}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}}(x-t)^{\alpha-1}f(t,y(t))dt \tag{III.10}$$

$\boxdot$

• *Maintenant on va étudier le problème de Cauchy avec condition intégrale* $\mathfrak{I}_{a_+}^{1}y(a_+)$ *nulle c'est à dire*

$$(\mathfrak{D}_{a_+}^{\alpha}y)(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x},y(\mathrm{x})) \tag{III.11}$$

$$(\mathfrak{I}_{a_+}^{1-\alpha}y)(a_+) = 0 \qquad ,0<\alpha<1 \tag{III.12}$$

Définition 1.2

Une fonction $f : \mathcal{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite rd-continue si elle est continue en tout point dense à droite de* $\mathcal{J}$ *et si sa limite à gauche existe et finie en tout point dense à gauche de* $\mathcal{I}$ *.*

On note l'ensemble des fonctions $f : \mathcal{J} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *rd-continue sur* $\mathcal{I}$ *par :*

$$\mathcal{C}_{rd} = \mathcal{C}_{rd}(\mathcal{J},\mathbb{R}).$$

► *Notre première résultat est basé sur le Théorème de Schauder* :

Théorème 1.1 *[1]*

Supposons que :

$(\mathcal{H}_1)$ *: La fonction* $f : \mathcal{J} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *rd-continue bornée .*

$(\mathcal{H}_2)$ *: Il existe une constante* $M > 0$ *, telle que :*

$$\mid f(\mathrm{x}, y) \mid \leq M; \quad \forall \ \mathrm{x} \ \in \ \mathcal{J}, \quad y \ \in \ \mathbb{R}$$

D'où le problème (III.11).(III.12) *à une solution sur l'intervalle* $\mathcal{J}$ *.*

Preuve 1.1

Transformons l'équation (II) *en un problème de point fixe.*

On considère l'opérateur suivant :

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$$

défini par

$$\mathcal{F}(y(\mathrm{x})) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

•***Étape*** *:1 ($\mathcal{F}$ est continue)*

Soit (y_n) *une suite dans* $\mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ *qui converge vers* y *; c'est-à-dire*

$$\lim_{n \to \infty} \parallel y_n - y \parallel_\infty = 0 \quad \forall \, x \ \in \ \mathcal{J}.$$

Montrons que $\lim_{n \to \infty} \parallel \mathcal{F}(y_n) - \mathcal{F}(y) \parallel = 0 \ \forall \, x \ \in \ \mathcal{J}$ *:*

$$\mid \mathcal{F}(y_n)(\mathrm{x}) - \mathcal{F}y(\mathrm{x}) \mid$$

$$= \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} f(t, y_n(t)) - f(t, y(t)) dt \mid$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} \mid f(t, y_n(t)) - f(t, y(t)) \mid dt$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} \sup_{t \, \in \, \mathcal{J}} \mid f(t, y_n(t)) - f(t, y(t)) \mid dt$$

$$\leq \frac{\parallel f(., y_n(.)) - f(., y(.)) \parallel_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} dt$$

$$\leq \frac{\parallel f(., y_n(.)) - f(., y(.)) \parallel_\infty}{\Gamma(\alpha)} \frac{b^\alpha}{\alpha}$$

$$\leq \frac{b^{\alpha} \parallel f(.,y_n(.)) - f(.,y(.)) \parallel_{\infty}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \tag{III}$$

comme f *est bien r-continue alors :*

$$\lim_{n\to\infty} \parallel f(y_n)(\mathrm{x}) - f(y)(\mathrm{x}) \parallel_{\infty} = 0$$

par conséquent l'équation (III) *converge vers 0*

On conclure que :

$$\lim_{n\to\infty} \parallel \mathcal{F}(y_n)(\mathrm{x}) - \mathcal{F}(y)(\mathrm{x}) \parallel_{\infty} = 0$$

D'où la continuité de $\mathcal{F}$.

•***Étape*** *:2*

Montrons que $\mathcal{F}$ *envoie touts ensembles bornés en ensemble uniformément borné dans* $\mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$.

En effet ,il suffit de montrer pour tout $\varsigma > 0$, *il existe une constante positive* M *tel que pour tout* $y \in \mathcal{B}_{\varsigma} = \{y \in \mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R}) : \parallel y \parallel_{\infty} \leq \varsigma\}$ *on obtient* $\parallel \mathcal{F}(y) \parallel_{\infty} \leq M$.

Par l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$ *,pour tout* $\mathrm{x} \in \mathcal{J}$ *on a*

$$\begin{aligned} \mid \mathcal{F}(y)(\mathrm{x})| &= |\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} f(t,y(t))dt \mid \\ &\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} |f(t,y(t))|dt \\ &\leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} dt \\ &\leqslant \frac{Mb^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \\ &= \underbrace{\frac{Mb^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}}_{M'} \end{aligned}$$

alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}_{\varsigma}$ *et par suite* $\mathcal{F}(\mathcal{B}_{\varsigma})$ *est borné.*

• ***Étape*** *:3*

L'opérateur $\mathcal{F}$ *envoie tout ensembles bornés en ensemble équicontinue de* $\mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$ *, Soient* $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathcal{J}$ *;* $\mathrm{x}_1 < \mathrm{x}_2$ $\mathcal{B}_{\varsigma}$ *un ensemble borné de* $\mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$ *et soit* $y \in \mathcal{B}_{\varsigma}$ *alors*

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{F}y(\mathrm{x}_2) - \mathcal{F}y(\mathrm{x}_1)| \\
&\qquad = |\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}_1}(\mathrm{x}_1 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt - \int_a^{\mathrm{x}_2}(\mathrm{x}_2 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}|\int_a^{\mathrm{x}_1}(\mathrm{x}_1 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt - \int_a^{\mathrm{x}_2}(\mathrm{x}_2 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mid \int_a^{\mathrm{x}_1} \left((\mathrm{x}_1 - t)^{\alpha-1} - (\mathrm{x}_2 - t)^{\alpha-1} + (\mathrm{x}_2 - t)^{\alpha-1}\right) f(t, y(t))dt \\
&\qquad -\int_a^{\mathrm{x}_2}(\mathrm{x}_2 - t)^{\alpha-1} f(t, y(t))dt \mid \\
&\qquad \leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \mid \int_a^{\mathrm{x}_1} \left((\mathrm{x}_1 - t)^{\alpha-1} - (\mathrm{x}_2 - t)^{\alpha-1}\right) dt + \int_{\mathrm{x}_1}^{\mathrm{x}_2}(\mathrm{x}_2 - t)^{\alpha-1} dt \mid \\
&\qquad \leqslant \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left((\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^\alpha + (\mathrm{x}_1 - a)^\alpha - (\mathrm{x}_2 - a)^\alpha\right) + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^\alpha \\
&\qquad = \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)}(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left((\mathrm{x}_1 - a)^\alpha - (\mathrm{x}_2 - a)^\alpha\right)
\end{aligned}
$$

Quand $\mathrm{x}_1 \to \mathrm{x}_2$ *le membre de droit de l'intégrale tend vers 0 ; d'où la continué de* $\mathcal{F}$.

*En conséquent des étapes 2 et 3 et le Théorème de **Arzéla-Ascoli** 3.1 on a* $\mathcal{F}(\mathcal{B}_\varsigma)$ *est relativement compact pour tout* $\mathcal{B}_\varsigma$ *borné c'est-à-dire :* $\mathcal{F}$ *est complètement continue.*

Par conséquent

$\mathcal{F} : \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R})$ *est continue et complètement continue.*

• ***Étape** :4 (Estimation à priori)*

Maintenant, il reste à montrer que

$$\Omega = \{y \in \mathcal{C}(\mathcal{J}, \mathbb{R}) \;\; y = \lambda\mathcal{F}(y) \;\; \forall\, 0 < \lambda < 1\}$$

Soit $y \in \Omega$ *,alors* $y = \lambda\mathcal{F}(y)$ *pour certains* $0 < \lambda < 1$.

Ainsi ,pour tout $\mathrm{x} \in \mathcal{J}$

nous avons

$$\begin{aligned}
\mid y(\mathrm{x}) \mid \ &= \mid \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} f(t,y(t))dt \mid \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mid \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} f(t,y(t))dt \mid \\
&\leqslant \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-\mathrm{t})^{\alpha-1}\mathrm{dt} \\
&\leqslant \underbrace{\frac{Mb^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}}_{C}
\end{aligned}$$

où C *est une constante positive .*

▶ *En conséquent du Théorème du point fixe de* ***Leray Schauder****, nous concluons que* $\mathcal{F}$ *a un point fixe, ce qui est la solution du problème* (III.11).(III.12)

Remarque 1.1

Il est claire que les points fixes de l'opérateur $\mathcal{F}$ *sont les solutions de l'équation* (II) .

1.2 Unicité de solution

▶ *Notre deuxième résultat concernant l'unicité de la solution du problème* (III.11).(III.12)*, est basé sur le Théorème de point fixe de Banach 3.4.*

Théorème 1.2

Supposons que

$(\mathcal{H})_3$ *: Il existe une constante* $k > 0$ *telle que : pour tout* $t \in \mathcal{J}$ *et tout* $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

on a

$$\mid f(t,y_1) - f(t,y_2) \mid \leqslant k \mid y_1 - y_2 \mid$$

Si

$$\frac{kb^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{F}$$

alors ,le problème (III.11).(III.12) *admet une solution unique sur* $\mathcal{J} = [a,b]$.

Il est clair que les points fixes de l'opérateur $\mathcal{F}$ *sont les solutions du problème* (III.11).(III.12) *;en effet si* $y \in \mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$ *alors* $\mathcal{F}(y) \in \mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$.

Pour montrer que $\mathcal{F}$ *admet un point fixe ,il suffit de prouver que* $\mathcal{F}$ *est une contraction*

En effet, si $y_1, y_2 \in \mathcal{C}(\mathcal{J},\mathbb{R})$, $\forall \ \mathrm{x} \in \mathcal{J}$ *on a :*

$$
\begin{aligned}
| \mathcal{F}(y_1)(\mathrm{x}) - \mathcal{F}(y_2)(\mathrm{x}) | & \\
& | \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} \mid f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) dt \mid \\
& \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} \mid f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \mid dt \\
& \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} \sup_{t \in \mathcal{J}} \mid f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \mid dt \\
& \leqslant \frac{k \parallel y_1 - y_2 \parallel_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{\mathrm{x}} (\mathrm{x}-t)^{\alpha-1} dt \\
& \leqslant \frac{kt^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \parallel y_1 - y_2 \parallel_\infty \\
& \leqslant \frac{kb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel y_1 - y_2 \parallel_\infty
\end{aligned}
$$

Et par suite

$$\parallel \mathcal{F}(y_1) - \mathcal{F}(y_2) \parallel_\infty \leqslant \frac{kb^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \parallel y_1 - y_2 \parallel_\infty$$

Donc de (F) *on peut déduire que* $\mathcal{F}$ *est une contraction et d'après le Théorème de Banach 3.4 le problème* (III.11).(III.12) *à une seule solution qui est le point fixe de* $\mathcal{F}$.

Exemple 1.1

Considérons le problem de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivant :

$$
\begin{cases}
\mathfrak{D}^\alpha y(\mathrm{x}) & = \dfrac{ce^{\mathrm{x}} y}{(e^{\mathrm{x}} + e^{-\mathrm{x}})(1+y)} \qquad ; \mathrm{x} \in \mathcal{J} = [0, b] \ , \ 0 < \alpha < 1 \\
(\mathfrak{I}^{1-\alpha} y) & = 0
\end{cases}
\tag{III.13}
$$

où $c > 1$ *constante .*

Soit

$$f(\mathrm{x}, y) = \frac{ce^{\mathrm{x}} y}{(e^{\mathrm{x}} + e^{-\mathrm{x}})(1+y)} \ ; (\mathrm{x}, y) \ \in \ [0, b] \times [0, \infty[.$$

Soient $y_1, y_2 \in [0, \infty[$ *et* $\mathrm{x} \in \mathcal{J}$ *; alors nous avons*

$$\begin{aligned}
|f(\mathrm{x}, y_1) - f(\mathrm{x}, y_2)| &= \frac{e^{\mathrm{x}}}{c(e^{\mathrm{x}} + e^{-\mathrm{x}})} \left| \frac{y_1}{1+y_1} - \frac{y_2}{1+y_2} \right| \\
&= \frac{e^{\mathrm{x}} |y_1 - y_2|}{c(e^{\mathrm{x}} + e^{-\mathrm{x}})(1+y_1)(1+y_2)} \\
&\leqslant \frac{e^{\mathrm{x}}}{c(e^{\mathrm{x}} + e^{-\mathrm{x}})} |y_1 - y_2| \\
&\leqslant \underbrace{\frac{1}{c}}_{k<1} |y_1 - y_2|
\end{aligned}$$

par conséquent l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ *est satisfaite d'où la condition* (F) *est vérifie pour* $c > \frac{b^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$ *, on déduit alors que le problème* (III.13) *possède une solution unique sur* $\mathcal{J}$.

Conclusion Général

Notre but principal dans ce mémoire est de présenter l'approche fractionnaire de `Riemann-Liouville` *qui est très applicable dans la théorie des équations différentielles car le calcul fractionnaire se pose dans plusieurs applications dans la description de nombreux évènements du monde réel, par exemple, il est souvent applicable dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie,l'électrique...*

Ce travail s'inscrit dans un des axes de la théorie de la commande des systèmes complexes, la complexité étant dans l'ordre non entier de la dérivation des équations différentielles .
Ce mémoire peut se décomposer en deux grandes étapes principales :

❶ *Identifier l'approche fractionnaire de* `Riemann-Liouville` *avec leur propriétés .*

❷ *Appliquer ces définitions aux systèmes avec dérivation non entière .*

Nous avons rassemblé les outils nécessaires pour cette étude à partir du premier chapitre de cet mémoire qui est consacré aux définitions et notions générales qu'on aura besoin dans la suite du travail . Nous rappelons les notions de l'intégrale et la dérivée classique pour atteindre à une généralisation au sens fractionnaire après, fonctions spéciales (Gamma,Béta...), des définitions d'analyse fonctionnelle .
Le deuxième chapitre du mémoire est dédié à l'approche non entier de `Riemann-Liouville` *, pour éclairer les notions corresponds aux calculs fractionnaires de* `(RL)`.
et on a vu l'intégration au sens de `Riemann-Liouville` *ainsi que la dérivation.*
Et par une étude plus profonde on a présenté la relation entre eux.

Dans le troisième chapitre nous introduisons la notion des Théorèmes de point fixe pour obtenir l'existence et l'unicité de solution d'un problème de Cauchy à valeur intégrale d'ordre fractionnaire définie sur un intervalle réel borné .nous intéressons le cas où la condition est nulle .
Finalement on a terminé ce chapitre par Exemple d'équation différentiel d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

[1] Benchohra, M., Hamani, S., and Ntouyas, S. K. Boundary value problems for differential equations with fractional order. *Surveys in Mathematics & its Applications 3* (2008).

[2] Demailly, J. Analyse numérique et équations différentielles ; collection grenoble sciences, presses universitaires de grenoble, 1996.

[3] Diethelm, K. *The analysis of fractional differential equations : An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type.* Springer, 2010.

[4] Granas, A., and Dugundji, J. *Fixed point theory.* Springer Science & Business Media, 2013.

[5] Lang, S. *Analyse réelle.* Cours. Mathématiques. InterEditions, 1977.

[6] Mathai, A. M., Saxena, R. K., and Haubold, H. J. *The H-function : theory and applications.* Springer Science & Business Media, 2009.

[7] Miller, K. S., and Ross, B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.

[8] Munkhammar, J. Riemann-liouville fractional derivatives and the taylor-riemann series, 2004.

[9] N'Doye, I. *Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires.* PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I ; Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca, 2011.

[10] Oldham, K., and Spanier, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, vol. 111. Elsevier, 1974.

[11] Podlubny, I. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, vol. 198. Elsevier, 1998.

[12] Ross, B. The development of fractional calculus 1695–1900. *Historia Mathematica 4*, 1 (1977), 75–89.

[13] SLMANE, M. *Équations différentielles d'ordre fractionnaires dans des espaces de Banach.* PhD thesis, 2012.

[14] Tarasov, V. E. *Fractional dynamics : applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media.* Springer Science & Business Media, 2011.

Résumé

L'objective essentielle de cette étude consiste à connaitre le calcul différentiel fractionnaire.
On s'intéresse au calcul différentiel fractionnaire de `Riemann-Liouville`*. Dans ce thème, nous présentons des définitions utiles tout au long de ce mémoire, nous rappelons une identification de l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens de* `Riemann-Liouville` *, quelques propriétés concernant ces calculs, Et à la fin nous avons discuté l'existence et l'unicité des solutions d'un problème fractionnaires en utilisant la théorie des points fixes.*

Mots-clés : *Calcul différentiel fractionnaire, Riemann-Liouville, Problème fractionnaire, LA théorie des point fixe .*

ملخص

الهدف الأساسي من هذه الدراسة هو معرفة حساب التفاضل الجزئي. في هذا العمل ، نحن مهتمون بحساب التفاضل الجزئي آلريمان ليوفيلْ ، نقدم تعريفات مفيدة طوال هذه المذكرات ، نذكر تحديدًا للمشتق الأساسي والمشتق الجزئي بمعنى لريمان ليوفيل ، بعض الخصائص المتعلقة بهذه الحسابات وفي النهاية ناقشنا وجود وتفرد حل المشكلة الجزئي باستخدام نظرية النقطة الثابتة.

الكلمات المفتاحية حساب التفاضل الجزئي ريمان ليوفيل ، مشكلة كسرية ، نظرية النقطة الثابتة

Abstract

The essential objective of this study is to know the fractional differential calculus. we are interested in the fractional differential calculus of `Riemann-Liouville`*. In this theme, we present useful definitions throughout this memoir, we recall an identification of the integral and the fractional derivative in the sense of* `Riemann-Liouville`*, some properties concerning these calculations, And in the end we discussed the existence and uniqueness of fractional problem solving using fixed point theory.*

Keywords : *Fractional differential calculus, Riemann-Liouville, Fractional problem, fixed point theory.*