الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République algérienne démocratique et populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
المركز الجامعي لعين تموشنت بلحاج بوشعيب
Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Ain-Temouchent
Institut de Technologie
Département de Génie Mécanique

Projet de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de Master en :
Domaine : Technologie
Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Construction Mécanique
Thème

Analyse numérique par la méthode des éléments finis du comportement vibratoire d'un rotor

Présenté Par :

1) Mr. Hadj Said Nasser Djamel Eddine
2) Mr Yahia Omar

Devant les jurys composés de :

Mr Belhanini Soufiane	MCA	C.U.B.B (Ain Temouchent)	Président
Mr Assem Hassan	MAA	C.U.B.B (Ain Temouchent)	Encadrant
Mr Nehari Tayeb	MCA	C.U.B.B (Ain Témouchent)	Examinateur
Mr Saimi Ahmed	MAB	Université de Blida	CO-Encadrant

Année universitaire 2019/2020

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère **de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique**

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib-Ain Temouchent

Institut de Technologie

Formulaire de déclaration sur l'honneur

Relatif à l'engagement pour respecter les règles d'authenticité scientifique dans l'élaboration d'un travail de recherche

(Annexe de l'arrêté n°933 du 28 juillet 2016 fixant les règles relatives à la prévention et la lutte contre le plagiat)

Je soussigne, l'étudiant (e),

Hadj Said Nasser Djamel Eddine

Détenteur d'une carte d'étudiant N° **2929** délivrée le **11/09/2019**

Inscrit à l'institut de Technologie au niveau du département **Génie Mécanique**

Et chargé de préparer un mémoire de fin d'étude en Master 2.

Intitulé : **Analyse numérique par la méthode des éléments finis du comportement vibratoire d'un rotor.**

Déclare sur l'honneur, m'engager à respecter les règles scientifiques, méthodologiques, et les normes de déontologique professionnelle et de l'authenticité académique requise dans l'élaboration du projet de recherche suscité.

À Ain témouchent, le 24/06/2020

Signature de l'étudiant :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère **de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique**

Centre Universitaire Belhadj Bouchaib-Ain Temouchent

Institut de Technologie

Formulaire de déclaration sur l'honneur

Relatif à l'engagement pour respecter les règles d'authenticité scientifique dans l'élaboration d'un travail de recherche

(Annexe de l'arrêté n°933 du 28 juillet 2016 fixant les règles relatives à la prévention et la lutte contre le plagiat)

Je soussigne, l'étudiant (e),

Yahia omar

Détenteur d'une carte d'étudiant N° **2991** délivrée le **11/09/2019**

Inscrit à l'institut de Technologie au niveau du département **Génie Mécanique**

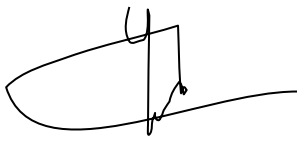
Et chargé de préparer un mémoire de fin d'étude en Master 2.

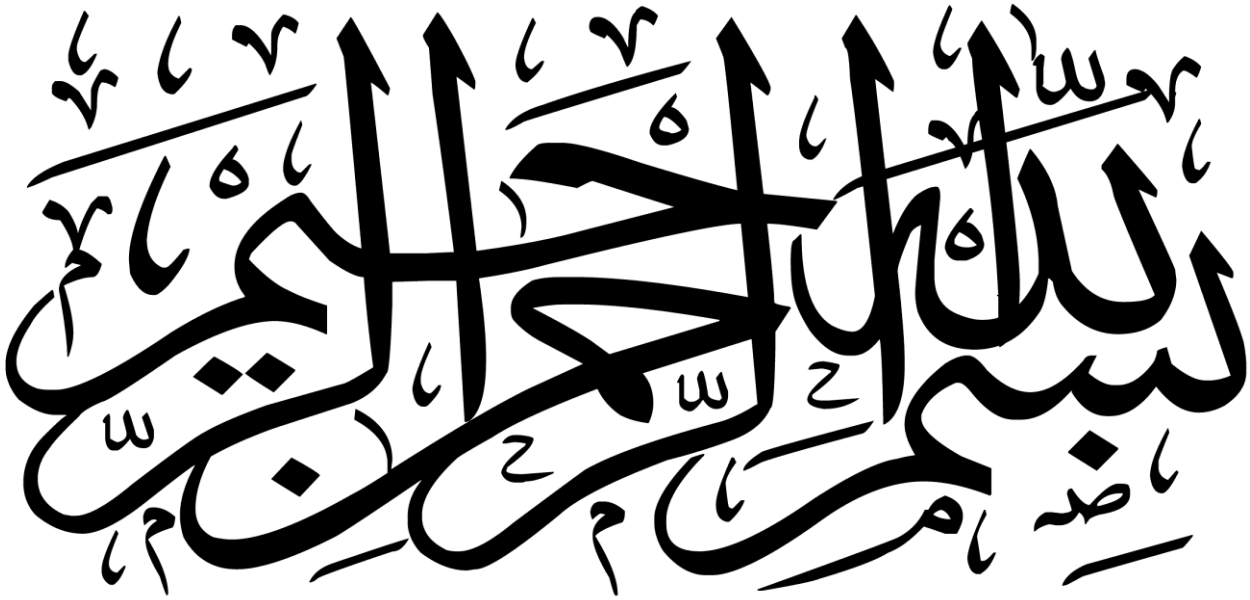
Intitulé : **Analyse numérique par la méthode des éléments finis du comportement vibratoire d'un rotor.**

Déclare sur l'honneur, m'engager à respecter les règles scientifiques, méthodologiques, et les normes de déontologique professionnelle et de l'authenticité académique requise dans l'élaboration du projet de recherche suscité.

À Ain témouchent, le 24/06/2020

Signature de l'étudiant :




بسم الله الرحمن الرحيم

Remercîment

Mes meilleurs remerciements et ma profonde gratitude pour monsieur ASSEM.H professeur au centre universitaire Belhadj Bouchaib ain temouchent, pour m'avoir encadré tout en m'accordant sa confiance et apporté ses précieux conseils.

Je remerci aussi monsieur BELHANINI SOUFYANE professeur au centre universitaire Belhadj Bouchaib ain temouchent pour m'avoir aidé et encourager à terminer mes études, sans oublier monsieur NHARI TAYEB professeur au centre universitaire Belhadj Bouchaib ain temouchent pour son soutien.

Je remerci monsieur SAIMI AHMED professeur a l'université de Blida pour son aide a enrichir notre travail.

Ma reconnaissance à tous les enseignants qui ont contribué a ma formation et enfin a ma réussite.

Enfin, je tiens à remercier tous mes collègues, amis et proches de centre universitaire Belhadj Bouchaib ain temouchent qui m'ont soutenu et aidé de manière directe ou indirecte.

Hadj Said

Remercîment

Mes meilleurs Je remercie Dieu pour cette opportunité, pour la vie, la santé, l'intelligence et la force dans tout ce parcours très enrichissant.

En premier lieu, j'aimerais remercier monsieur ASSEM.H professeur au centre universitaire Belhadj Bouchaib ain temouchent, pour m'avoir encadré tout en m'accordant sa confiance et apporté ses précieux conseils.

Je remerci monsieur SAIMI AHMED professeur a l'université de Blida pour son aide a enrichir notre travail

Je remercie très profondément tous les membres du département génie mécanique du centre universitaire Belhadj Bouchaib ain temouchent, professeurs, techniciens et administrateurs qui m'ont beaucoup soutenus durant ce projet.

Enfin, merci beaucoup aux personnelles des laboratoires mécanique et physique du Centre universitaire Belhaj Bouchaib, pour avoir fourni le climat approprié à la recherche scientifique.

Omar

Dedicace

Je remercie Dieu tout puissant qui m'a permis d'arriver à ce but.

Chaleureusement je dédie ce modeste travail

A ceux qui m'ont éclairé le chemin de la sagesse et m'ont offert

tout ce qui est cher, et comble le cœur dans la vie avec une

immense générosité et une tendre affection.

Je tiens à remercier chaleureusement ma très chère mère, ma chère épouse

et tous mes collègues des laboratoires pour leur confiance et leur soutien

et leurs encouragements durant mes études.

Et tous mes meilleurs amis.

Hadj Said

Dedicace

Je dédie cet humble travail.

À mes très chers parents.

À mes chères frères et mes chères sœurs.

À ma chère épouse, mes chères filles ***Assil*** *et* ***Rahaf.***

À tous les membres de l'unité secondaire de la protection civile à Ras eL Ma de Sidi Bel Abbès, pour leur aide dans la réalisation de mon objectif.

À tout mes amis.

Omar

ملخص

مشاكل الاهتزاز هي أحد الأسباب الرئيسية للآلات الدوارة في العالم الصناعي اليوم ولإعطاء المزيد من الأداء وتقليل هذه الظاهرة أكثر مع وظائف جيدة وموثوقة أفضل ،
الباحثون الاعتماد بشكل أكبر على المحاكاة والحسابات للحصول على نتائج أفضل.
يقدم هذا العمل تحليلاً رقميًا حول السلوك الاهتزازي للدوار البسيط.
نحدد خصائص العناصر الأساسية للدوار: القرص ، العمود ، المحمل وعدم التوازن ثم سنقوم بتطوير تعبيرات الـ طاقات الحركية والتشوه وكذلك العمل الافتراضي المقابل لهذه العناصر بواسطة معادلات لاغرانج من أجل تحديد معادلات الحركة.
الطريقة المتبعة لتسوية الحسابات هي النمذجة بطريقة العناصر المحدودة الهرمية المثلثية التي سمحت لنا بالتنبؤ بـ ظواهر السلوك الاهتزازي للدوار.
تتيح هذه الطريقة تحديد الترددات الطبيعية كدالة للسرعة الدورانية للدوار ورسم مخطط كامبل وتحديد السرعات الحرجة المحتملة
تستند مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها على نمذجة العناصر المحدودة مع هذه الحسابات عن طريق برنامج متقن وتستخدم
لحساب الترددات الطبيعية لخط الشجرة المكون من عدد غير محدود من عناصر العضو الدوار..
الكلمات المفتاحية: ديناميكية الدوار ، اهتزاز الدوار ، تحليل اهتزاز الدوار.

Résumé

Les problèmes vibratoires sont l'une des principales causes que subissent les machines tournantes dans le monde industriel actuel et pour donner plus de performance et diminuer encore plus ce phénomène avec une bonne fonctionnalité et une meilleur fiabilité les chercheurs se basent beaucoup plus sur la simulation et les calculs pour avoir des meilleurs résultats.

Ce travail propose une analyse numérique sur le comportement vibratoire d'un rotor simple.

Nous déterminons les caractéristiques des éléments de base du rotor : disque, arbre, palier et balourd puis on développera les expressions des énergies cinétiques et de déformation ainsi que le travail virtuel correspondant a ces éléments par les équations de Lagrange afin de déterminée les équations du mouvement

La méthode suivis pour la résolution des calculs est la modélisation par la méthode des éléments finis hiérarchiques trigonométriques qui nous a permis de prévoir les phénomènes du comportement vibratoire des rotors.

Cette méthode permet de déterminer les fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation du rotor, de tracer le diagramme de Campbell, et de déterminer les vitesses critiques éventuelles.

La confrontation des résultats obtenus est basée sur une modélisation par éléments finis avec ces calculs moyennant un programme élaboré et servant à calculer les fréquences propres d'une ligne d'arbre constituée par un nombre indéfini d'éléments rotors.

Mots clés : dynamique des rotors, vibration des rotors, analyse vibratoire des rotors.

Abstract

Vibration problems are one of the main causes of rotating machines in today's industrial world and to give more performance and reduce this phenomenon even more with good functionality and better reliability, researchers rely much more on simulation and calculations to get better results.

This work offers a numerical analysis on the vibration behavior of a simple rotor.

We determine the characteristics of the basic elements of the rotor: disc, shaft, bearing and unbalance then we will develop the expressions of kinetic energies and deformation as well as the virtual work corresponding to these elements by the Lagrange equations in order to determine the equations of motion

The method followed for the resolution of computations is the modeling by the method of the trigonometric hierarchical finite elements which allowed us to predict the phenomena of the vibratory behavior of the rotors.

This method makes it possible to determine the natural frequencies as a function of the rotational speed of the rotor, to plot the Campbell diagram, and to determine the possible critical speeds.

The comparison of the results obtained is based on a finite element modeling with these calculations by means of an elaborate program and used to calculate the natural frequencies of a tree line constituted by an indefinite number of rotor elements.

Key words: rotor dynamics, rotor vibration, rotor vibration analysis.

SOMMAIRE

Remerciement ……...

Dédicaces……

Résumé……

Introduction général. ……..……1

Etude bibliographique…….3

Chapitre I : Formulation Cinématique d'un Rotor

Introduction…….…6

I-1- notion sur les rotors des machines tournants ……..6

I-1-1 définition ……....……..6

I-1-2 classification…….…..6

I-1-2-1 paramètres géométriques…….-…….……6

I-1-2-2 paramètres mécaniques……....…7

I-1-3 les composants de base d'un rotor……7

I-1-3 -1 l'arbre……..……7

I-1-3-2 disques……...……...…7

I-1-3-3 paliers…….…….…....7

I-1-3-4 balourds…….…….…….……7

I-2- hypothèse cinématique…….…….....…8

I-3- calcul des énergies des différents composants de rotor……..…..…9

I-3-1 Vitesse d'un point de la section droite de l'arbre…….…….9

I-3-2 Energie cinétique de l'arbre……...…10

I-3-3 Energie cinétique du disque……...…….10

I-3-4 Energie de déformation de l'arbre…….…....……..11

I-3-5 Paliers……..……..……...…14

I-3-5-1 Travail des forces de raideur et d'amortissement……....15

I-4 - Force axiale …….....16

I-4-1 Calcul de la force axiale……..…17

Chapitre II : modélisation par la méthode des éléments finis hiérarchiques trigonométriques

Introduction……...……18

II-1 Champs des déplacements…….....19

II-2 Fonctions de forme…….……20

II-3 Modélisation du disque par la méthode des éléments finis

hiérarchiques Trigonométriques…….…….…..…21

II-3-1 Détermination des matrices……..……...……...…21

II-3-1-1 Matrice de rigidification centrifuge $[R_D]$……...…22

II-3-1-2 Matrice masse $[M_D]$ …….……...…23

II-3-1-3 Matrice gyroscopique $[C_{gD}]$……...…….....…24

II-4 Modélisation de l'arbre par la méthode des éléments finis hiérarchiques

Trigonométriques…….....…….26

II-4-1 Détermination des matrices de l'arbre……...……..27

II-4-1-1 Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre $[R_A]$ …….……..…27

II-4-1-2 Matrice masse de l'arbre $[M_A]$……..……29

II-4-1-3 Matrice gyroscopique de l'arbre $[C_{gA}]$…….……..…29

II-4-1-4 Matrice de rigidité de l'arbre $[K_A]$…….……30

II-5 Détermination des matrices dues aux paliers …….……31

II-5-1 Matrices raideurs et amortissements visqueux ……...…31

II-5-1-1 Matrice amortissement des paliers……..…….32

II-5-1-2 Matrice de rigidité des paliers …...…….……32

II-6 Equation du mouvement ……...……...…32

Chapitre III: résultat et interprétation

III-1 Caractéristiques mécaniques et géométriques…….…..…34

III-2 Fréquences vibratoires d'un Arbre …….…….……34

III-2-1 Détermination des résultats d'un arbre encastrée encastrée……..…….……35

III-2-2 Détermination des paramètres de fréquence……..…..…..36

III-3 Résultats et interprétations……..……37

III-4 Arbre encastrée encastrée EE……..……..37

III-4-1 Arbre EE avec force axiale …… ……....…37

III-4-1-1 Fréquences propres du system en rotation……...…..….38

III-4-1-2 Paramètres des fréquences du système en rotation …….…….39

III-4-1-3 Diagrammes de Campbell ……..……40

III-4-2 Fréquences propres de la Poutre EE sans force axiale…….…..…43

III-4-2-1 Fréquences propres avec sans force axiale...…… ……..……...……..…44

Conclusion ……45

III-5- Rotor sans disque……..……..…….46

III-6- Rotor avec disque…….…….……..47

III-Conclusion général…….…….……48

Références bibliographiques…….……50

Annexe 01…….…..51

Annexe 02…….…..53

liste des symboles

$\emptyset$	Matrice vitesse de rotation
Ω_1	Vitesse de rotation autour de l'axe ox
Ω_2	Vitesse de rotation autour de l'axe oy
Ω_3	Vitesse de rotation autour de l'axe oz
$[Q]$	Matrice de passage du repère mobile au repère fixe
$\{r_p\}$	Vecteur position d'un point dans le repère mobile
$\{R_p\}$	Vecteur position d'un point dans le repère fixe
{ß}	Le vecteur déplacement
u	Le déplacement suivant la direction ox
v	Le déplacement suivant la direction oy
w	Le déplacement suivant la direction oz
ξ	La déformation linéaire en flexion d'un point de l'arbre
σ	Contrainte de flexion.
dv	Élément de volume de l'arbre
E	Module de Young
I_m	Moment d'inertie moyen
I_a	Moment d'inertie asymétrique
K	Raideur des paliers
C	Amortissement
F	Force généralisées
P_{ax}	La force axiale d'un arbre en rotation
ρ	Masse volumique de l'arbre.
ν	Coefficient de poisson.
Ω	Vitesse de rotation.
b	diamètre extérieur de l'arbre rotor

a	diamètre intérieur de l'arbre rotor
N_u	Les fonctions de forme suivant la direction x.
N_w	Les fonctions de forme suivant la direction z.
q_u et q_w	Représentent les vecteurs déplacements généralisés
$[M_D]$	Matrice masse du disque
$[R_D]$	Matrice de rigidification centrifuge du disque
$[C_{gD}]$	Matrice gyroscopique du disque
$[R_A]$	Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre
$[M_A]$	Matrice masse de l'arbre.
$[C_{gA}]$	Matrice gyroscopique de l'arbre
$[K_A]$	Matrice de rigidité de l'arbre
E_{cR}	Energie cinétique du rotor.
E_{cD}	Energie cinétique du disque
E_{cA}	Energie cinétique de l'arbre.
E_{dR}	Energie de déformation du rotor
E_{dA}	Energie de déformation de l'arbre
λ	Facteur scalaire
p	Amplitude de la grandeur complexe $q(t)$
$[M]$	Matrice masse.
$[C_g]$	Matrice gyroscopique.
$[C_p]$	Matrice d'amortissement visqueux due aux paliers
$[K_A]$	Matrice de raideur de l'arbre.
$[K_p]$	Matrice de raideur des paliers.
$[R]$	Matrice de la rigidification centrifuge.

$\overline{A}$ *et* $\overline{B}$	Matrices augmentés ou matrices composites
θ	Vecteur généralisé du système.
ω_0	Pulsation propre du rotor a l'arrêt
R_d	Rayon de giration du rotor
L	Longueur de l'arbre.

Liste des figures

Figure I.1 Diagramme de Campbell ……...……4

Figure I.2 Présentation d'un rotor simple……..…..6

Figure I.3 Éléments de base d'un rotor……...…….……6

Figure I.4 Poutre d'Euler Bernoulli……..…...6

Figure I.5 Nutation et Précession…….……...……....7

Figure I.6 Représentation du disque du rotor…….…….……9

Figure I.7 Déformation de l'arbre et ses repères…….……9

Figure I.8 Palier hydrodynamique avec Profils de vitesse…….…...…14

Figure I.9 Modèle d'un Palier……...15

Figure I.10 Rotor sur paliers rigides…….……16

Figure II.1 Représentation d'un élément de poutre de type p…….18

Figure II.2 déformation de l'arbre autour de l'axe *OZ* ……19

Figure II.3 Déformation de l'arbre autour de l'axe *OX* …….……19

Figure II.4 Degrés de libertés d'un disque……...……...…21

Figure II.5 Degrés de libertés d'un élément arbre…….…….……26

Figure III.1 Arbre avec disque au milieu……..……..……35

Figure III.2 Rotor sans disque …….……..…….…...…46

Figure III.3 Les six premiers modes de vibration d'un Rotor sans disque……..……..46

Figure III3 .4 Rotor avec disque ……...……..……47

Figure III.5 Diagramme de Campbell du rotor avec disque…….……...……..…47

Graphe III.1 mode1 poutre EE avec force axiale…….…….…. 39

Graphe III.2 mode2 poutre EE avec force axiale ……...…40

Graphe III.3 mode3 poutre EE avec force axiale ……...…40

Graphe III.4 mode4 poutre EE avec force axiale ……...…41

Graphe III.5 mode5 poutre EE avec force axiale ……...……41

Graphe III.6 mode 6 poutres EE avec force axiale ……...……42

Graphe III.7 les six premiers modes de la poutre EE avec force axiale…….…..……43

Liste des tableaux

Tableau III.1 fréquences propres de la poutre EE avec force axiale…….……38

Tableau III.2 Paramètres de fréquences obtenus pour la poutre EE avec force…….. 39

Tableau III.3 fréquences propres de la poutre EE sans force axiale ……43

Tableau III.4 mode 1 avec et sans amortissement …….…..…44

Tableau III.5 mode 2 avec et sans amortissement……..…….……44

Tableau III.6 mode 3 avec et sans amortissement……..…….……44

Tableau III.7mode 4 avec et sans amortissement……..……...…45

Tableau III.8 mode 5 avec et sans amortissement……..…..…45

Tableau III.9 mode 6 avec et sans amortissement……..…..……45

Introduction générale :

Pendant plusieurs années les rotors sont devenus des éléments indispensables pour les grandes usines industrielles, pour cela La dynamique de machines tournantes est devenue une spécialité indispensable pour le bon fonctionnement de ces machines.

Les spécialistes de la dynamique des machines tournantes ont définis les rotors et les arbres comme étant tout élément tournant autour d'un axe fixe.

Les rotors constituent les pièces essentielles des machines tournantes utilisées dans :

* fabrication mécanique, arbre tournants des machines outils,
* transformation d'énergie : arbre d'alternateurs des centrales électrique.
* transport: arbres de transmission des véhicules et engins roulant, arbre d'hélice des sous marins,
*Aéronautique : arbre des réacteurs d'avions et arbre multi rotor concentriques.
*Nucléaire : arbre des centrifugeuses nucléaire.

Les rotors ont un rôle très important agissant sur la fonction des machines tournantes qu' est la transmission de puissance destiner a transformer une forme d'énergie a une autre forme d'énergie.

Les constructeurs sont obligés d'améliorer leurs produits et faire plus de progrès dans l'etude et la conception pour augmenter les performances et le rendement de ces machines en les faisant fonctionné pour des vitesses très élevées.

La tendance actuel vise a augmenté la vitesse de rotation et déminé le poids du rotor, pour éviter les dangers qui peuvent provoquer les grandes vibrations dangereuses des rotors provoquant l'endommagement et la rupture par fatigues de leurs éléments (palier, disque, arbre, …).

Le comportement dynamique des arbres tournants est principalement du aux vibrations de flexion qui peuvent être existés par plusieurs causes, la cause la plus influente est l'excentricité du centre de gravite appelle balourd, ce qui mène a un déséquilibre sur le long du rotor.

La dynamique du rotor est nécessaire pour écrire les équations du mouvement soit dans un repère fixe ou tournant a la même vitesse de rotation du rotor, le repère tournant est utilise pour étude des disques pour réaliser le comportement vibratoire d'un rotor on va utiliser la méthode des éléments finis.

Pour parler sur le comportement vibratoire des rotors et comment on peut les traiter on a proposé de faire une analyse numérique très employer par la méthode des éléments finis on utilise la version « p » dans notre calcul, et se basant sur la théorie d'Euler Bernoulli.

L'étude de la dynamique des machines tournantes est donc plus que jamais d'actualité.

La thématique de recherche abordée dans le cadre de notre thème de master est l'analyse numérique par la méthode des éléments finis du comportement vibratoire d'un rotor,

Le mémoire est structuré d'une introduction générale et de trois chapitres suivis d'une conclusion générale, chaque chapitre contient plusieurs titres et sous titres avec et une conclusion générale et en fin des références bibliographiques.

Dans le premier chapitre on donnera des notions sur les rotors puis on fera une étude cinématique sur un rotor, déterminé les caractéristiques de ses éléments de base et leurs énergies cinétique et de déformation pour obtenir la mise en équation du mouvement.

Les équations du mouvement du rotor sont obtenues par application des équations de Lagrange

Dans le deuxième chapitre on procède a faire une étude du comportement d'un rotor par la méthode des éléments finis on expliquant les différentes versions (H, P et HP) et on appliquant que la version « p » suivant la théorie d'Euler Bernoulli.

Grâce à cette méthode, il est possible de déterminer avec précision les fréquences propres.

Dans ce chapitre on présentera la procédure et les moyens pour une étude bien précise de l'analyse vibratoire du comportement des rotors.

Dans le troisième chapitre on va interpréter et discuté les résultats trouvés.

Enfin on achève notre travail par une conclusion générale.

Etude bibliographique :

Le comportement dynamique et vibratoire des rotors ont une très grande importance dans l'industrie actuelle.

L'histoire de la dynamique des rotors a débuté avec les chercheurs depuis 15 décennies.

En 1869 Rankine a été le premier a faire des études détaillés et des recherche sur les comportements des rotors.il a utilisé la deuxième loi de newton sur l'étude de stabilité de mouvement d'un arbre en rotation. [1]

Malgré plusieurs travaux de recherche que se soit théoriques, expériences ou numérique ce phénomène attire beaucoup plus les ingénieurs, les chercheurs et les savants.

Dans de nombreuses recherches sur les phénomènes reliés au comportement dynamique des systèmes de rotor rigides ou flexibles, symétriques ou dissymétriques montés sur des paliers élastiques linéaires ou non linéaires dans le cas d'un support fixe, comme par exemple les travaux de Lalanne et Ferraris [2], Genta [3,4].

Le rotor, dans la plupart des recherches est modélisé par des poutres droites de sections constantes.

Les vibrations d'une poutre est un phénomène qui a été étudié par les chercheurs :Lalanne et al. [5] ainsi que Thomas et Laville [6], ils les ont classées comme un problème de mécanique des milieux continus.

La vitesse critique est un phénomène classiquement observés en dynamique des rotors, elle correspond à la vitesse où l'excitation par balourd coïncide avec une des fréquences propres du système.

Dunkerley, Il définit alors la vitesse critique comme la vitesse à la résonance d'une structure élastique non tournante où les vibrations de la machine atteignent des niveaux élevés.

Il est connu que les modes propres d'un système en rotation sont des modes complexes deux à deux conjugués à pulsations propres purement imaginaires. Cela est dû aux effets gyroscopiques induits par la rotation, qui couplent les déplacements horizontaux et verticaux [7]. Ils peuvent cependant être associés pour obtenir des modes réels qualifiés soi direct, ou rétrograde, suivant le mouvement de précession qui leur est associé dans un sens identique ou contraire au mouvement de rotation.

Le point essentiel est la dépendance de leur fréquence propre en fonction de la vitesse de rotation. Le graphique représentant l'évolution de celles-ci en fonction de s'appelle le diagramme de Campbell [8]

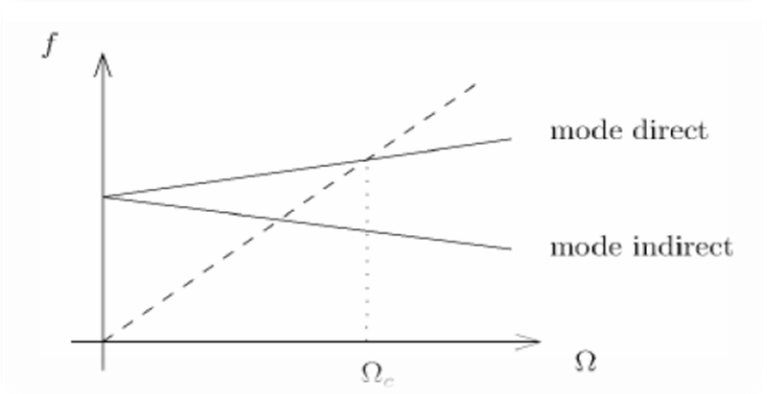


Figure I.1 Diagramme de Campbell

On peut démontrer que la partie de l'énergie cinétique relative aux termes gyroscopiques est positive ou négative pour les modes directs ou rétrogrades alors que les effets gyroscopiques tendent à rigidifier ou assouplir la structure d'ou, les courbes croissantes et décroissantes du diagramme de Campbell sont relatives au mode direct ou rétrograde.

En utilisant des fonctions de forme appropriées relatives aux poutres modélisant l'arbre du rotor les énergies cinétiques et de déformation sont exprimées en fonction des vecteurs des déplacements nodaux et des vitesses nodales correspondantes des éléments finis modélisant les composants du rotor. Les forces généralisées sont déterminées en établissant le travail virtuel des forces extérieures au rotor

Modélisation par la méthode des éléments finis :

Le calcul par éléments finis a incité beaucoup de scientifiques à développer leurs recherches sur cette méthode, elle est basée sur deux différents types de versions et leurs combinaisons qui sont :

Version h : dans cette version le nombre de fonction de forme est fixé pour chaque élément et les fonctions de formes sont des polynômes linéaires.

Version p : appelée aussi méthode des éléments finis hiérarchique –MEFH, les degrés des fonctions polynomiales peuvent êtres augmenté tout en gardant la taille de la maille constante, généralement le degré polynomiale est noté par ''P''cette version est plus simple et sa convergence est plus rapide.

Version h-p : Une approximation d'éléments finis est dite hiérarchique si le passage du nœud '1'au nœud '2' ne modifie pas les fonctions de formes, cette formulation présente plusieurs avantages [9]**.** beaucoup de chercheurs scientifiques se sont concentrés sur ce chemin et ont créés plusieurs codes d'élémentsfinis

Probe [10] et le Fiesta **[**11] Szabo et Babuska [12] ont publié un manuel sur ces deux versions, F.Cugnon et P.Beckers [13] ont donnés une comparaison entre ces deux versions et leurs combinaisons pour donnée la version h-p

V.Heuveline et Rannacher [14] ont travaillé sur la version h-p de la méthode des éléments finis M.Suri [15] a utilisé la version h-p de la méthode des éléments finis pour les coques,

Pour cette étude, on utilise une modélisation de type éléments finis hiérarchique trigonométriques.

L'auteur montre l'avantage de ces fonctions par rapport aux fonctions polynomiales.

Chap I

Formulation Cinématique d'un Rotor

Introduction :

La mise en équation commente par la détermination des caractéristique des élément du rotor, il s'agit de déterminer les expressions des énergies du élément de base (disque, arbre, palier, balourd). L'énergie cinétique caractérise de disque, l'arbre et le balourd.

L'application des équations de Lagrange permet en suite la détermination des équations du mouvement.

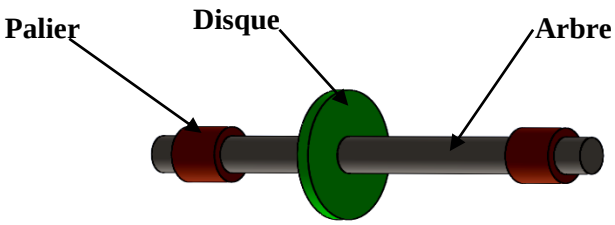


Figure I.2 : Présentation d'un rotor

I-1 Notions Sur Les Rotors des machines tournantes

I -1-1 Définition

Un rotor est l'élément tournant d'une machine .il est constitué d'un arbre supporté par des paliers, et comportant un ou plusieurs disques. Le domaine d'application des rotors est très vaste, ils sont utilisés dans les machines tournantes industrielles et autres.

Le rôle principale des rotors c'est la transformation d'énergie selon les applications auxquelles ils sont destinés (l'aéronautique, l'industrie pétrolière, centrale électrique et hydraulique, l'industrie électronique et pharmaceutique, …etc.), ils sont souvent composés de plusieurs tronçons et soumis à des sollicitations d'origines diverses **[16]** .

I -1-2 Classifications des rotors

Suivant les éléments de base des rotors On peut les classés selon deux paramètres.

I -1-2-1 Les paramètres géométriques:

- **rotor arbre long** : les dimensions de l'arbre sont plus grandes à celui de disque. Il est bien adapté pour modéliser les rotors des différentes machines tournantes industrielles (turbine, générateur… etc.)
- **rotor type disque arbre**: les dimensions du disque sont plus grandes à celles de l'arbre.
- **rotor a aubes** : ce type est bien adapté pour étudier le comportement vibratoire de quelques rotors ayant une structure aubage (hélicoptère, aérogénérateur, turboréacteur, soufflerie industrielle, …etc.).

- **rotor libre** : ce type de rotor est caractérisé par l'absence des suspensions (paliers, support).

I -1-2-2 Les paramètres mécaniques on distingue les modèles suivants :

- **rotor rigide :** un rotor peut être considéré comme rigide lorsqu'il tourne à des vitesses inférieures à la vitesse critique associées à la flexion de l'arbre. Alors le rotor rigide possède des paliers souples et la déformation de l'arbre de rotation est négligeable.
- **rotor de Jeffcott :** utilisé pour l'étude du comportement dynamique des rotors industrielle en flexion, la configuration de ce modèle est caractérisée par des points matériels attachés dans un arbre non massique dans le but de négliger les effets gyroscopique. [16]

I -1-3 Les composants de base d'un rotor :

Un rotor se compose de plusieurs éléments de base sont les suivants (l'arbre, disque et paliers, le balourd qui ne peut pas être complètement évité doit aussi être pris en compte).

I -1-3-1 L'arbre : c'est l'élément principal du rotor, il peut être rigide ou flexible et cela dépond de ses propriétés mécaniques du matériau de fabrication

I -1-3-2 Disque : le disque peut être rigide ou déformable.il est représenté sous plusieurs forme géométriques.

I -1-3-3 Palier : le palier est considéré comme support du rotor, il peut être rigide ou flexible (isotrope ou anisotrope).

L'arbre rotor loge dans un logement qui le sépare de la surface du palier. Pour ne pas avoir des frottements agressifs entre les deux surfaces, on procède à la lubrification par l'huile ou la graisse.

I -1-3-4 Balourd : le balourd est une masse excentré d'un rotor, il se réparti le long du rotor dont la résultante de cette répartition peut être assimilée a une ou deux masses.

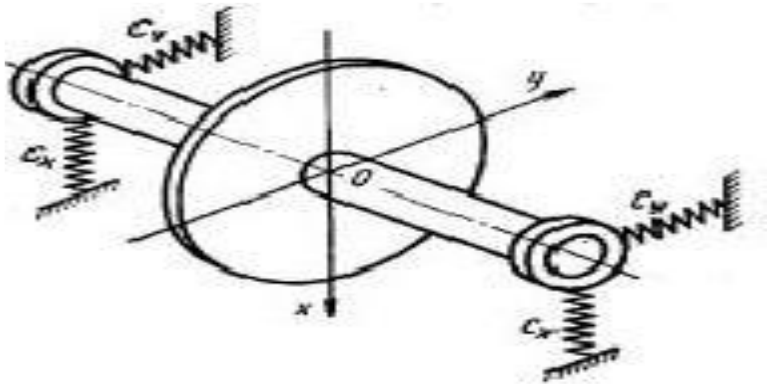


Figure I.3 Éléments de base d'un rotor [17]

I -2 Hypothèses cinématique :

L'étude de ce rotor est basée sur les hypothèses suivantes :

- L'arbre est déformable.
- Le disque est rigide.
- Le rotor tourne à une vitesse constante Ω .
- L'arbre et le disque ont les mêmes caractéristiques mécaniques.
- On se place dans le cas de petites de déplacement et de rotation.
- Déformation linéaire.

L'arbre est du type d'Euler Bernoulli [18] c'est-à-dire toute section plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant déformation reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation de cet arbre et l'effet de cisaillement est nul fig. **I**.4. Ces hypothèses correspondent à la majorité des rotors industriels**.**

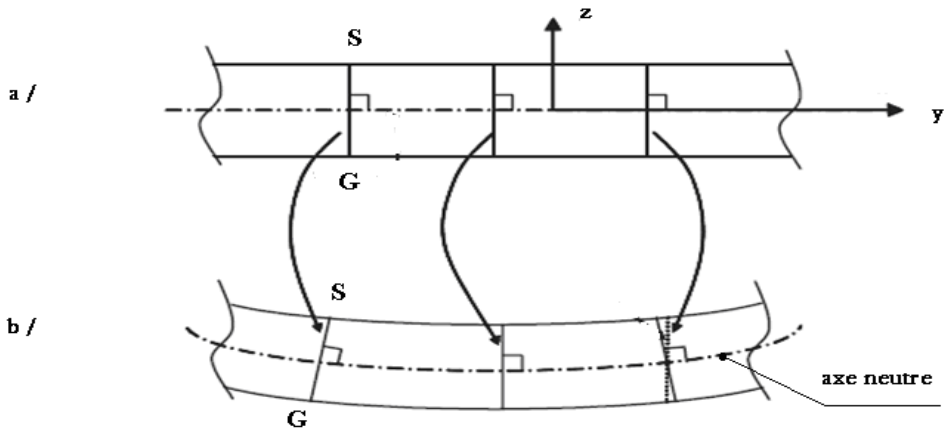


Figure I.4 Poutre d'Euler Bernoulli [18]

a : Avant déformation

b : Apres déformation

Lors du mouvement, le rotor génère plusieurs phénomènes qui sont : La nutation, la précession, la rotation propre du rotor fig I.5 et autres spécifications qui seront étudiés et détaillés ultérieurement en définissant toutes les énergies du rotor et leurs équations du mouvement. La mise en équation du mouvement est obtenue à partir des énergies cinétiques et de déformations des différents composants du rotor.

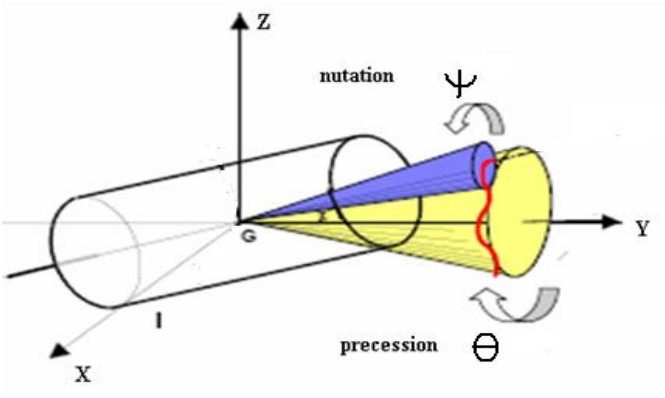


Figure I.5 Nutation et Précession [20]

I -3 Calcul des énergies des différents composants du rotor :

L'arbre du rotor est déformable, il est caractérisé par une énergie cinétique et une énergie de déformation. Le disque est rigide, il est caractérisé seulement par son énergie cinétique

I -3-1 Vitesse d'un point de la section droite de l'arbre :

Le repère mobile d'un arbre en rotation possède en général trois composantes de vitesse Et sa matrice vitesse de rotation est définie par $\dot{\phi}$ [19]:

$$\dot{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

Avec : Ω_1 Vitesse de rotation autour de l'axe ox

Ω_2 Vitesse de rotation autour de l'axe oy

Ω_3 Vitesse de rotation autour de l'axe oz

La rotation de l'arbre s'effectue autour de l'axe OY et la matrice vitesse de rotation peut s'écrire sous la forme suivante

On pose $$\Omega = \Omega_2 \qquad (1.2)$$

$$\dot{\phi} = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

Le vecteur position $\{B\}$ est donné par:

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

Avec : u Le déplacement suivant la direction ox

v Le déplacement suivant la direction oy

w Le déplacement suivant la direction oz

I -3-2 Energie cinétique de l'arbre :

L'énergie cinétique est définie par l'expression suivante [20]

$$E_{CA} = \frac{1}{2}\rho \int_V \{B\}^T [\dot{\phi}][\dot{\phi}] \{B\} dv + \frac{1}{2}\rho \int_V \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \tag{1.5}$$

Avec le premier terme qui contribue a la formation de la matrice de rigidification centrifuge, le deuxième terme a la matrice masse et le dernier terme a la matrice gyroscopique.

I -3-3 Energie cinétique du disque :

Le disque d'épaisseur « e » de diamètre extérieur A_{ext} et diamètre intérieur A_{int} supposé parfaitement rigide est caractérisé seulement par son énergie cinétique fig I.6

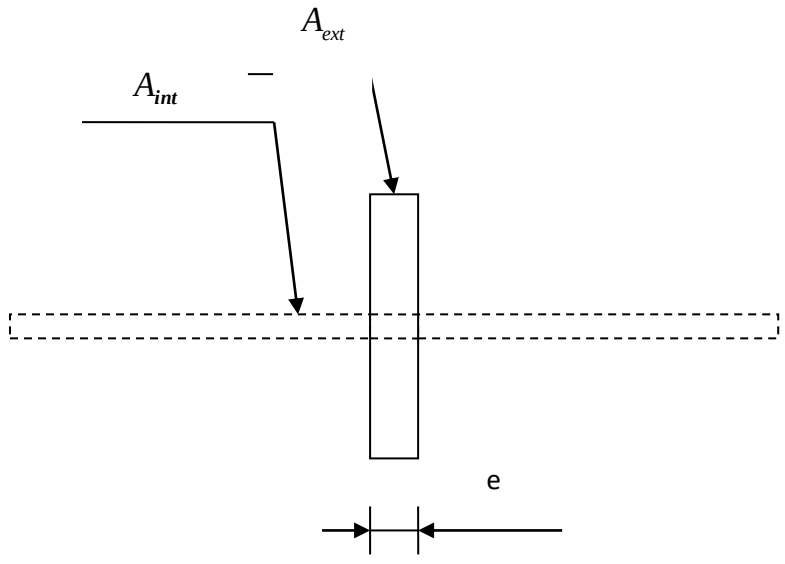


Figure I.6 Représentation du disque du rotor

L'expression de l'énergie cinétique du disque est donnée par analogie avec celle de l'arbre et qui peut s'écrire :

$$E_{CD} = \frac{1}{2}\rho \int_V \{B\}^T [\dot{\phi}][\dot{\phi}] \{B\} dv + \frac{1}{2}\rho \int_V \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \qquad (1.6)$$

I -3-4 Energie de déformation de l'arbre :

L'énergie de déformation ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre.

Dans ce calcul, le disque est supposé par hypothèse comme rigide, seules les déformations dues a la flexion de l'arbre sont prisent en compte, l'arbre pour ce rotor est modélisé par une poutre d'Euler Bernoulli fig I.4.

Soient $u^*(y,t)$ et $w^*(y,t)$ les déplacements des points de la ligne moyenne de l'arbre dans le repère tournant voir fig I.7

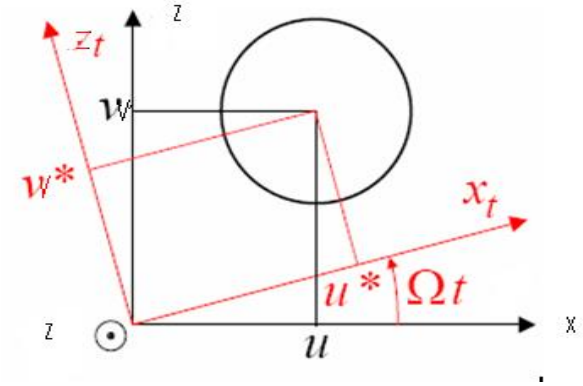


Figure I.7 Déformation de l'arbre et ses repères.

Les projections d'un point de la section droite déformée sur le repère fixe :

$$u^* = u.cos.\Omega t - w.sin.\Omega t \qquad (1.7)$$

$$w^* = u.sin.\Omega t + w.cos.\Omega t \qquad (1.8)$$

La déformation linéaire en flexion d'un point de l'arbre de coordonnées x et z dans le repère lié à l'arbre est [21] :

$$\varepsilon_{yy} = -x\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \qquad (1.9)$$

L'énergie de déformation est donnée par :

$$E_{dA} = \frac{1}{2}\int_v \varepsilon_l .\sigma .dv \qquad (1.10)$$

σ : Contrainte de flexion.

dv : Élément de volume de l'arbre.

La relation entre contrainte et déformation est :

$$\sigma = E.\varepsilon_l \tag{1.11}$$

E : Module de Young

ε_l : Déformation linéaire

L'énergie de déformation E_{dA} prend la forme :

$$E_{dA} = \frac{E}{2}\int_v \left(\varepsilon_l^2\right).dv \tag{1.12}$$

$$E_{dA} = \frac{E}{2}\int_0^l \iint_s \left(- x\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right)^2 ds\, dy \tag{1.13}$$

$$E_{dA} = \frac{E}{2}\int_0^l \iint_s \left(x^2\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\right)^2 + z^2\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right)^2 + 2xz\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right) ds\, dy \tag{1.14}$$

Par symétrie le troisième terme de l'intégrale est nul et, en introduisant les inerties de section:

$$I_X = \int_S z^2.ds \quad \text{Et} \quad I_z = \int_S x^2.ds \tag{1.15}$$

(1.16)

En remplaçant et par leurs valeurs (1.19) et (1.20) dans (1.28).

(1.17)

En prenant en considération de la relation

(1.18)

(1.19)

I -3-5 Paliers :

Tous les arbres tournants sont supportés par des paliers. Ces paliers sont de types rigides créent des forces sur l'arbre. On peut trouver [22] des palier lisse hydrodynamique fig I.8, palier lisse hydrostatique, palier a roulements…..

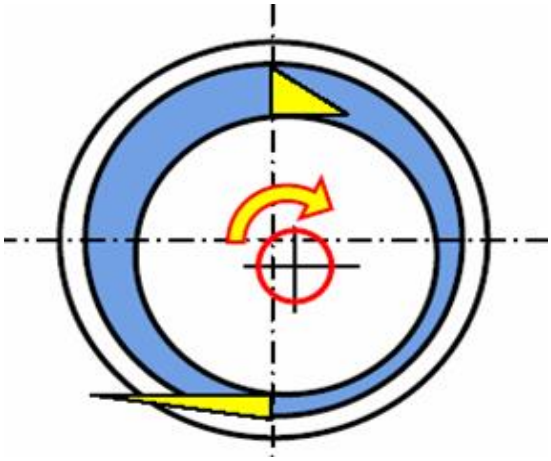


Figure I.8 Palier hydrodynamique avec Profils de vitesse [22].

La modélisation des paliers est représentée sur la fig I.9.

Ou on note:

La raideur suivant l'axe ox $K_{XX} = K_{P11}$ (1.25)

La raideur suivant l'axe oz $K_{ZZ} = K_{P22}$ (1.26)

La raideur des termes croisés $K_{ZX} = K_{XZ} = K_{P21} = K_{p12}$ (1.27)

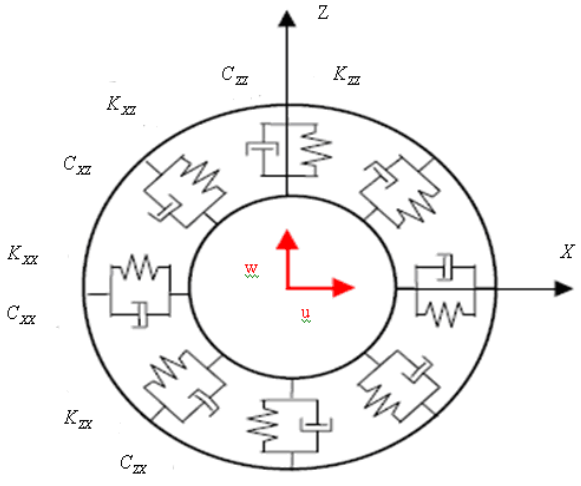


figure I.9 Modèle d'un Palier.

I -3-5-1 Travail des forces de raideur et d'amortissement.

Le travail virtuel des forces de raideurs et d'amortissements est définis par :

$$dW = F_u \delta u + F_w \delta w \tag{1.28}$$

Avec : F_u *et* F_w sont les forces généralisées

$$dW = -K_{P11} u\delta u - K_{P12} w\delta u - K_{P21} w\delta w - K_{P22} u\delta w - C_{P11}\dot{u}\delta u - C_{P12}\dot{w}\delta u - C_{P21}\dot{w}\delta w - C_{P22}\dot{u}\delta w \tag{1.29}$$

Sous forme matricielle nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} K_{P11} & 0 & K_{P12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{P21} & 0 & K_{P22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ w_1 \\ \psi_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{P11} & 0 & C_{P12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{P21} & 0 & C_{P22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{w}_1 \\ \dot{\psi}_1 \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

En général les termes de raideur et d'amortissement sont différents, Pour cette étude on suppose que les termes de raideurs verticales, horizontales et croisés sont égale

$$K_{P11} = K_{P12} = K_{P21} = K_{P22} \tag{1.31}$$

Et les termes d'amortissements verticaux, horizontaux et croisés sont égaux.

$$C_{P11} = C_{P12} = C_{P21} = C_{P22} \tag{1.32}$$

Ce système tournant est soumis à l'effet de la force axiale.

I -4 Force axiale :

On considère l'arbre de ce rotor comme étant un arbre cylindrique de rayon intérieur a et de rayon extérieur b et de longueur 2L fig I.10, qui tourne avec une vitesse de rotation Ω constante. La rotation de cet arbre crée une déformation latérale [23]. Si la déformation latérale est réduite a zéro, la contrainte normale est crée dans cette direction.

Pour compenser ces déformations, les contraintes radiales dues à l'effet des forces centrifuges créent des forces axiales qui agissent sur les fréquences propres des vibrations de l'arbre.

I -4-1 Calcul de la force axiale :

L'état de déformation de l'arbre est un état plan [23], la déformation suivant l'axe oy est nulle et par suite les paliers suppriment les mouvements suivant l'axe de cet arbre fig I.10

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{ry} = 0 \qquad (1.33)$$

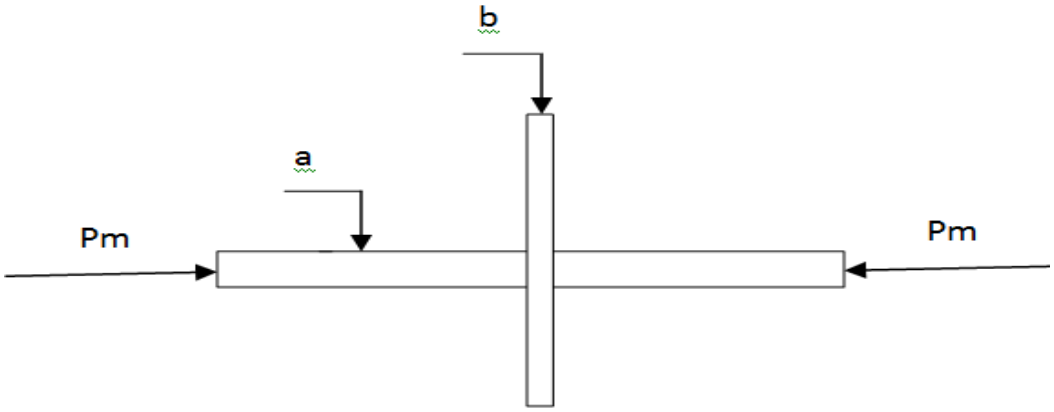


figure I.10 Rotor sur paliers rigides

La force axiale P_{ax} d'un arbre en rotation est donnée par la relation suivante [23] :

$$P_{ax} = \frac{\pi}{2}\rho\Omega^2 \nu\left(b^4 - a^4\right) \qquad (1.34)$$

Avec :

ρ **:** Masse volumique de l'arbre

ν : Coefficient de poisson.

Ω : Vitesse de rotation.

b : diamètre extérieur.

a : diamètre intérieur

P_{ax}= pm

Chap II

Modélisation par la méthode des éléments finis hiérarchiques trigonométrique

Introduction et modélisation par la méthode des éléments finis

Le problème consiste en général à déterminer l'état d'une structure soumise à des sollicitations. La structure est caractérisée par sa géométrie, le ou les matériaux qui la constituent, Elle est soumise à des sollicitations des efforts, des déplacements, des flux de chaleurs et des vitesses. Pour un dimensionnement optimal de la structure il faut connaître :

Les déplacements en tous points.

Les déformations, les contraintes.

Les températures.

Les fréquences propres …… etc

La solution du problème discrétisé est une solution approchée du problème réel, la méthode utilisée pour cette étude est La méthode des éléments finis hiérarchique trigonométrique développée par le professeur HOUMAT A[9] .La caractéristique particulière de cette méthode et que l'arbre est modélisé par un seul élément a deux nœuds et que la précision du résultat est obtenue en augmentant l'ordre de la fonction trigonométrique a tout instant sans faire varier la modélisation initiale.

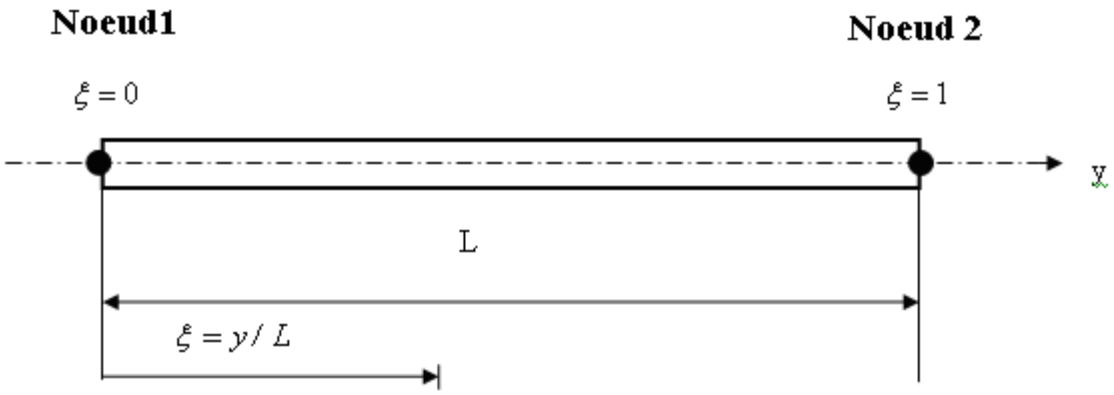


figure II.1 Représentation d'un élément de poutre de type p

La coordonnée adimensionnelle ξ est reliée a l'axe oy par

$$\xi = y / L \qquad (2.1)$$

Avec : $0 \leq \xi \leq 1$

II -1 Champs des déplacements :

Le champ de déplacement d'un point M de la section droite de l'arbre du rotor défini suivant les hypothèses du paragraphe I.2 du chap1 est donné par la relation :

$$\begin{cases} u(X,Y,Z) = u_0(Y) \\ v(X,Y,Z) = v_0(Y) - Z\,\psi(Y) - X\,\theta(Y) \\ w(X,Y,Z) = w_0(Y) \end{cases} \qquad (2.2)$$

Avec: $u_0(Y)$: Déplacement transversal suivant OX .

$v_0(Y)$: Déplacement longitudinal négligé suivant OY.

$w_0(Y)$: Déplacement transversal suivant OZ.

$\psi(Y)$: Rotation de la section droite autour de OZ

$\theta(Y)$: Rotation de la section droite autour de OX

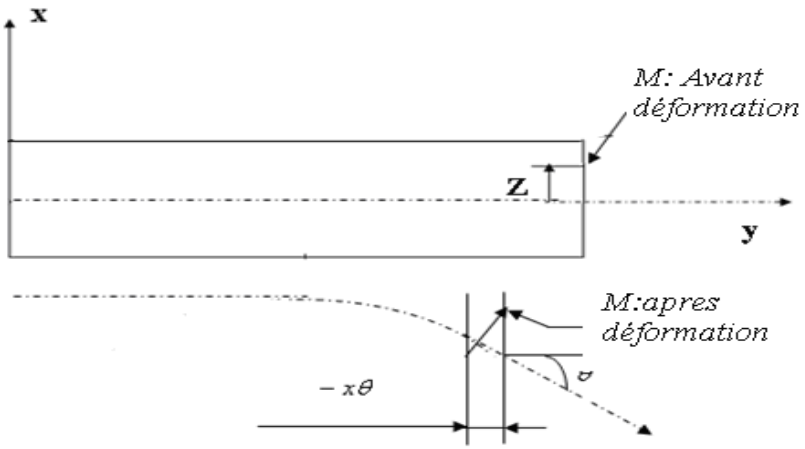


Figure II.2 déformation de l'arbre autour de l'axe OZ

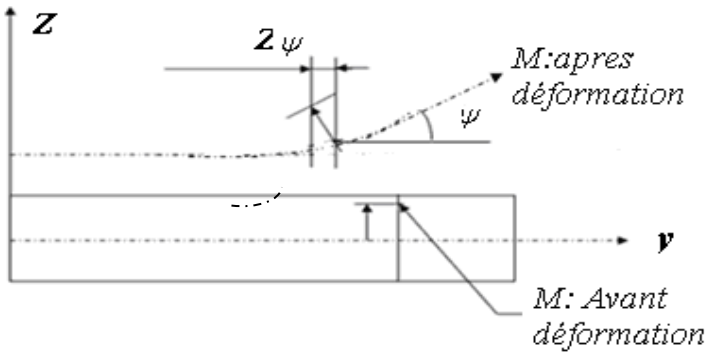


figure II.3 Déformation de l'arbre autour de l'axe OX

Dans le cas des hypothèses d'Euler Bernoulli, les rotations θ et ψ s'expriment en fonction de u_0 et w_0

$$\theta(Y) = u_{0,Y} \tag{2.3}$$

$$\psi(Y) = w_{0,Y} \tag{2.4}$$

Pour une flexion dominante ($v_0 = 0$), le déplacement s'exprime par :

$$v(X,Y,Z) = -Z\, w_{0,Y} + X\, u_{0,Y} \tag{2.5}$$

Le champ de déplacement obtenu est le suivant

$$\begin{cases} u(X,Y,Z) = u_0(Y) \\ v(X,Y,Z) = -Z\,\psi(Y) + X\,\theta(Y) \\ w(X,Y,Z) = w_0(Y) \end{cases} \tag{2.6}$$

II -2 Fonctions de forme :

Les fonctions de forme utilisées sont les fonctions de forme hiérarchique trigonométrique définies [9].

$$N : \begin{cases} f_1(\xi) = 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ f_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \\ f_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ f_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \\ f_{r+4}(\xi) \end{cases} \tag{2.7}$$

$$f_{r+4}(\xi) = \delta r\left[-\xi + (2+(-1)^r)\xi^2 - (1+(-1)^r)\xi^3\right] + \sin \delta r\, \xi \tag{2.8}$$

$$\delta r = r\pi$$

$$r = 1,2,3...$$

Les fonctions de forme associées aux deux nœuds sont :

$$f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), f_4(\xi) \tag{2.9}$$

Les fonctions de forme associées à l'intérieur de l'élément arbre (entre les nœuds) sont :

$$f_{r+4}(\xi) \tag{2.10}$$

Le champ des déplacements d'un point de la poutre sont données par….

$$u_0(\xi) = \sum_{i=1}^{PF} X_i\, f_i(\xi) = [N_u]\{q_u\} \tag{2.11}$$

$$\{q_u\}^T = \{X_1, X_2, X_3 ... X_{P_X}\}^T$$

$$w_0(\xi) = \sum_{i=1}^{PF} Z_i f_i(\xi) = [N_w]\{q_w\} \qquad (2.12)$$

$$\{q_w\}^T = \{Z_1, Z_2, Z_3 ... Z_{P_Z}\}^T$$

N_u : Les fonctions de forme suivant la direction x.

N_w : Les fonctions de forme suivant la direction z.

q_u et q_w Représentent les vecteurs déplacements généralisés

$$\{q\} = \{q_u, q_w\}^T \qquad (2.13)$$

II -3 Modélisation du disque par la méthode des éléments finis version p :

L'étude par la méthode des éléments finis hiérarchique trigonométriques présentée ici concerne le cas le plus répandu d'un disque symétrique et rigide, on modélise ce disque par un nœud possédant quatre degrés de libertés fig II .4

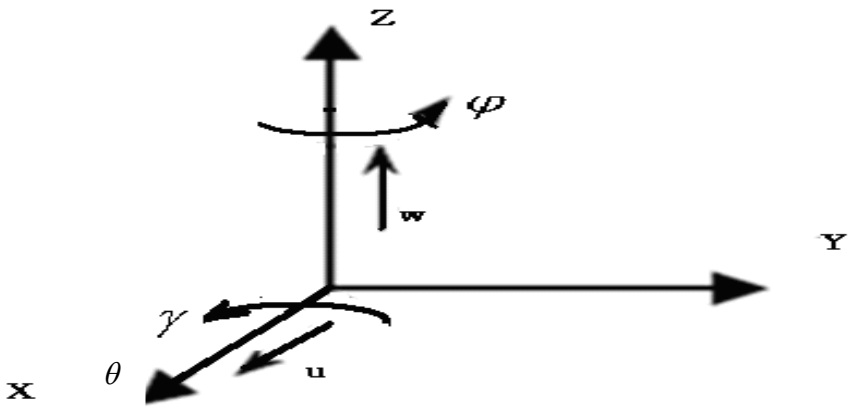


Figure II.4 Degrés de libertés d'un disque

Ces quatre degrés de libertés sont modélisés par deux déplacements u, w et par deux rotations θ, ψ

II -3-1 Détermination des matrices :

La détermination des matrices : masse, gyroscopique et rigidification centrifuge sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique du disque donnée par la relation (1.6) suivante :

$$E_{CD} = \frac{1}{2}\rho \int_V \{B\}^T [\dot{\phi}][\dot{\phi}] \{B\} dv + \frac{1}{2}\rho \int_V \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}]\{B\} dv$$

Apres intégration, l'expression de l'énergie cinétique prend la forme suivante.

$$E_{CD} = \frac{1}{2}\rho S e\left(\{B\}^T [\dot{\phi}][\dot{\phi}]\{B\}\right) + \frac{1}{2}\rho S e\left(\{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\}\right) + \rho S e\Omega\left(\{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}]\{B\}\right). \qquad (2.14)$$

Avec $\{B\}$ le vecteur déplacement exprimé par les fonctions de forme, le disque est placé au nœud $\xi = 1$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u_0(y,t) \\ \theta_0(y,t) \\ w_0(y,t) \\ \psi_0(y,t) \end{Bmatrix} = N(\xi = 1)\, q(t) \qquad (2.15)$$

Avec le premier terme qui contribue a la formation de la matrice de rigidification centrifuge ,Le deuxième terme a la matrice masse et le troisième terme a la matrice gyroscopique.

II -3-1-1 Matrice de rigidification centrifuge $[R_D]$:

La matrice de rigidification centrifuge est déduite du premier terme de la relation (2.14).

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2}\rho\, S_D\, e\left(\{B\}^T [\dot{\phi}]^T [\dot{\phi}]\{B\}\right) \qquad (2.16)$$

L'énergie cinétique exprimée par la matrice des vitesses de rotations

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2}\rho S_D\, e \left(\{B\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} \right) \qquad (2.17)$$

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2}\rho S_D\, e\Omega^2 \left(\{B\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{B\} \right) \qquad (2.18)$$

On a deux déplacements suivant u et w, l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme.

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2}\rho S_D\, e\Omega^2 \left(\{q\}^T [N]^T [N]\{q\}\right) \qquad (2.19)$$

En introduisant les deux plans la matrice de rigidification est.

$$E_C(R_D) = \frac{1}{2}\rho S_D e\Omega^2 \left(\{q_u\}^T [N_u]^T [N_u]\{q_u\}\right) + \frac{1}{2}\rho S_D e\Omega^2 \left(\{q_w\}^T [N_w]^T [N_w]\{q_w\}\right) \quad (2.20)$$

$$[R_{Du}] = \rho S_D e\Omega^2 \left([N_u]^T [N_u]\right) \quad (2.21)$$

$$[R_{Dw}] = \rho S_D e\Omega^2 \left([N_w]^T [N_w]\right) \quad (2.22)$$

La matrice globale de rigidification centrifuge est donnée par la matrice suivante

$$[R_D] = \begin{bmatrix} [R_{Du}] & 0 \\ 0 & [R_{Dw}] \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

La matrice de rigidifiassions centrifuge globale est donnée par les fonctions de formes:

$$[R_D] = \begin{bmatrix} \rho S_D e\Omega^2 \left([N_u]^T [N_u]\right) & 0 \\ 0 & \rho S_D e\Omega^2 \left([N_w]^T [N_w]\right) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

II -3-1-2 Matrice masse $[M_D]$:

Le deuxième terme de la relation (2.14) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse.

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2}\rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv. \quad (2.25)$$

L'énergie cinétique du disque peut s'écrire sous la forme suivante

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2}\rho S_D e \left(\{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\}\right). \quad (2.26)$$

L'énergie cinétique du disque exprimée par les fonctions de forme

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2}\rho S_D e \left(\{\dot{q}\}^T [N]^T [N]\{\dot{q}\}\right). \quad (2.27)$$

En introduisant les deux plans on obtient.

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2}\rho S_D e \left(\{\dot{q}_u\}^T [N_u]^T [N_u]\{\dot{q}_u\}\right) + \frac{1}{2}\rho S_D e \left(\{\dot{q}_w\}^T [N_w]^T [N_w]\{\dot{q}_w\}\right) \quad (2.28)$$

$$[M_{Du}] = \rho S_D e \left([N_u]^T [N_u]\right) \quad (2.29)$$

$$[M_{Dw}] = \rho S_D \, e\left([N_w]^T [N_w]\right) \tag{2.30}$$

La matrice globale de rigidification centrifuge est donnée par

$$[M_D] = \begin{bmatrix} [M_{Du}] & 0 \\ 0 & [M_{Dw}] \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Avec $[M_{Du}]$ la matrice de rigidification dans la direction ox et $[M_{Du}]$ la matrice de rigidification dans la direction oz, ces deux composantes de matrice peuvent êtres exprimées par les fonctions de formes

$$[M_D] = \begin{bmatrix} \rho S_D \, e\left([N_u]^T [N_u]\right) & 0 \\ 0 & \rho S_D \, e\left([N_w]^T [N_w]\right) \end{bmatrix}. \tag{2.32}$$

II -3-1-3 Matrice gyroscopique $[C_{gD}]$:

Le troisième terme de la relation (2.14) de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique du disque

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \, \{B\} \, dv \tag{2.33}$$

Substituons la matrice des vitesses et le vecteur déplacement par leurs valeurs dans l'expression de l'énergie cinétique on obtient

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \tag{2.34}$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \tag{2.35}$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{-\Omega \dot{w} \quad 0 \quad \Omega \dot{u}\} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \tag{2.36}$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{-\Omega \dot{w} \, u + \Omega \dot{u} \, w\} \, dv \tag{2.37}$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho\Omega\int_v \{-\dot{w}\,u + \dot{u}\,w\}\,dv \tag{2.38}$$

L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_C(C_{gD}) = \rho\Omega\int_v \left(-[N_u]\{q_u\}[N_w]^T\{\dot{q}_w\}^T + [N_w]\{q_w\}[N_u]^T\{\dot{q}_u\}^T\right)dv \tag{2.39}$$

Appliquons les équations de Lagrange aux termes de l'énergie cinétique pour déterminer l'expression des sous matrices gyroscopiques dans les plans oxy et oxz.

1°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur $\{q_u\}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\{\dot{q}_u\}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\{q_u\}} = \rho\Omega\int_v \left(\frac{d}{dt}\left([N_w]\{q_w\}[N_u]^T\right) + [N_u][N_w]^T\{\dot{q}_w\}\right)dv \tag{2.40}$$

Transformation par les coordonnées adimensionnelle

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\{\dot{q}_u\}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\{q_u\}} = 2\rho S_D\, e\Omega\left([N_u]^T[N_w]\ \{\dot{q}_w\}\right) \tag{2.41}$$

2°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur $\{q_w\}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\{\dot{q}_w\}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\{q_w\}} = \rho\Omega\int\left(\frac{d}{dt}\left(-[N_u]\{q_u\}[N_w]^T\right) - [N_w]\{\dot{q}_u\}[N_u]^T\right)dv \tag{2.42}$$

Transformation par les coordonnées adimensionnelle

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\{\dot{q}_w\}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\{q_w\}} = -2\rho S_D\, e\Omega\left(\frac{d}{dt}\left(-[N_u]^T[N_w]^T\right)\{\dot{q}_u\}\right) \tag{2.43}$$

On conclusion on peut dire que :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\{\dot{q}_u\}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\{q_u\}} = -\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\{\dot{q}_w\}^T}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\{q_w\}^T}\right) \tag{2.44}$$

Ou encore on posant :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\{\dot{q}_u\}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial\{q_u\}}=2\rho S_D\, e\Omega\left(\frac{d}{dt}\left(\left[N_u\right]^T\left[N_w\right]\ \{\dot{q}_w\}\right)\right)=C_{gD1} \qquad (2.45)$$

Et :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\{\dot{q}_w\}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial\{q_w\}}=-2\rho S_D\, e\Omega\left(\frac{d}{dt}\left(-\left[N_u\right]^T\left[N_w\right]\right)\{\dot{q}_u\}\right)=C_{gD2} \qquad (2.46)$$

On remarque que :

$$C_{gD1}=-C_{gD2} \qquad (2.47)$$

Et la matrice gyroscopique du disque peut s'écrire se mettre sous la forme.

$$\left[C_{gD}\right]=\begin{bmatrix}0 & -\left[C_{gD2}\right]\\ \left[C_{gD2}\right] & 0\end{bmatrix} \qquad (2.48)$$

II -4 Modélisation de l'arbre par la méthode des éléments finis hiérarchiques :

La modélisation par la méthode des éléments finis hiérarchique trigonométrique concerne un arbre symétrique et déformable a deux nœuds figure 2.5 et pour chaque nœud quatre degrés de liberté

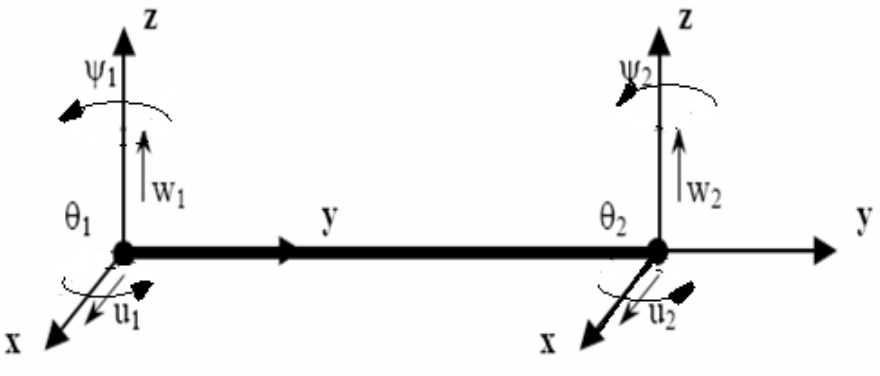


figure 2.5 : Degrés de libertés d'un élément arbre

Soit $\{B\}$ le vecteur déplacement exprimer par les fonctions de formes.

$$\{B\}=\begin{Bmatrix}u_0(y,t)\\ \theta_0(y,t)\\ w_0(y,t)\\ \psi_0(y,t)\end{Bmatrix}=N(\xi=0;1)\ q(t) \qquad (2.49)$$

$q(t)$ **:** Vecteur déplacement généralisé

$$\{B\} = [N]\{q\} = \begin{bmatrix} [N_u] & 0 \\ 0 & [N_w] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

$$u_0 = N_u \; q_u \tag{2.51}$$

$$\theta_0 = \frac{\partial N_u}{\partial y} q_u \tag{2.52}$$

$$w_0 = N_w \, q_w \tag{2.53}$$

$$\psi_0 = \frac{\partial N_w}{\partial y} q_w \tag{2.54}$$

N_u et N_w sont les fonctions de forme des poutres en flexion suivant deux directions. x et z

q_u et q_w sont les déplacements aux nœuds et à l'intérieur de la poutre dans deux directions x et z.

II -4-1 Détermination des matrices de l'arbre.

La détermination des matrices : masse, gyroscopique et rigidification centrifuge sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre donnée par la relation (1.5)

$$E_{CA} = \frac{1}{2}\rho \int_V \{B\}^T [\dot{\phi}][\dot{\phi}] \{B\} dv + \frac{1}{2}\rho \int_V \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho \int_V \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}]\{B\} dv$$

II -4-1-1 Matrice de rigidification centrifuge de l'arbre $[R_A]$:

Le premier terme de la relation (1.5) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice de rigidification centrifuge .

: $$E_C(R_A) = \frac{1}{2}\rho \int_v \{B\}^T [\dot{\phi}]^T [\dot{\phi}]\{B\} dv \tag{2.55}$$

Substituons la matrice des vitesses par sa valeur on obtient:

$$E_C(R_A) = \frac{\rho}{2} \int_v \{B\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} \, dv \tag{2.56}$$

$$E_C(R_A) = \frac{\rho}{2}\int_v \{B\}^T \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega^2 \end{bmatrix} \{B\}\, dv \tag{2.57}$$

$$E_C(R_A) = \frac{\rho\Omega^2}{2}\int_v \{B\}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{B\}\, dv \tag{2.58}$$

Substituons les vecteurs déplacements par les fonctions de forme.

$$E_C(R_A) = \frac{\rho\Omega^2}{2}\int_v \{q\}^T\ [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N]\{q\} dv \tag{2.59}$$

L'énergie cinétique exprimée par la coordonnée adimensionnelle

$$E_C(R_A) = \frac{\rho S_A L\Omega^2}{2}\int_0^1 \{q\}^T\ [N]^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [N]\{q\} d\xi \tag{2.60}$$

On a que deux déplacements u et w, donc la matrice de rigidification centrifuge de l'arbre exprimée par les fonctions de formes est.

$$E_C(R_A) = \frac{\rho S_A L\Omega^2}{2}\left(\int_0^1 \{q_u\}^T\ [N_u]^T\ [N_u]\{q_u\} d\xi + \int_0^1 \{q_w\}^T\ [N_w]^T\ [N_w]\{q_w\} d\xi\right) \tag{2.61}$$

Les composantes de la matrice de rigidification sont.

$$[R_{Au}] = \rho S_A L\Omega^2 \int_0^1 [N_u]^T [N_u] d\xi \tag{2.62}$$

$$[R_{Aw}] = \rho S_A L\Omega^2 \int_0^1 [N_w]^T [N_w] d\xi \tag{2.63}$$

La matrice de rigidification centrifuge globale peut s'écrire sous forme matricielle suivante

$$[R_A] = \begin{bmatrix} [R_{Au}] & 0 \\ 0 & [R_{Aw}] \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

II -4-1-2 Matrice masse de l'arbre $[M_A]$.

Le deuxième terme de la relation (1.5) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse.

$$E_C(M_A) = \frac{1}{2}\rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv. \tag{2.65}$$

En substituant le vecteur déplacement par les fonctions de forme.

$$E_C(M_A) = \frac{\rho S_A L}{2}\left(\int_0^1 \{\dot{q}_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{\dot{q}_u\} d\xi + \int_0^1 \{\dot{q}_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{\dot{q}_w\} d\xi \right). \tag{2.66}$$

Les composantes de la matrice de rigidification sont.

$$[M_{Au}] = \rho S_A L \int_0^1 [N_u]^T [N_u] d\xi \tag{2.67}$$

$$[M_{Aw}] = \rho S_A L \int_0^1 [N_w]^T [N_w] d\xi \tag{2.68}$$

La matrice masse peut s'écrire sous forme :

$$[M_A] = \begin{bmatrix} [M_{Au}] & 0 \\ 0 & [M_{Aw}] \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

II -4-1-3 Matrice gyroscopique de l'arbre $[C_{gA}]$.

Le troisième terme de la relation (1.5) de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique de l'arbre.

$$E_C(C_{gA}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \tag{2.70}$$

$$E_C(C_{gA}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} dv \tag{2.71}$$

L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_C(C_{gD}) = \rho S_A L\Omega \int_0^1 \left(-[N_u]\{q_u\}[N_w]^T \{\dot{q}_w\}^T + [N_w]\{q_w\}[N_u]^T \{\dot{q}_u\}^T \right) d\xi \qquad (2.72)$$

Appliquons les équations de Lagrange aux termes de l'énergie cinétique pour avoir une séparation des vecteurs de coordonnées généralisées dans la relation (2.72) :

1°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur $\{q_u\}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_u\}^T}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_u\}^T} = 2\rho S_A L\Omega \int_0^1 \left([N_u]^T [N_w] \ \{\dot{q}_w\} \right) d\xi \qquad (2.73)$$

$$C_{g\,A1} = 2\rho S_A L\Omega \int_0^1 \left([N_u]^T [N_w] \ \{\dot{q}_w\} \right) d\xi \qquad (2.74)$$

2°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur $\{q_w\}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \{\dot{q}_w\}^T}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \{q_w\}^T} = -2\rho S_A L\Omega \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}\left(-[N_u]^T [N_w]^T \right)\{\dot{q}_u\} \right) d\xi \qquad (2.75)$$

$$C_{g\,A2} = -2\rho S_A L\Omega \int_0^1 \left(\frac{d}{dt}\left(-[N_u]^T [N_w]^T \right)\{\dot{q}_u\} \right) d\xi \qquad (2.76)$$

On peut dire que :

$$C_{g\,A1} = -C_{g\,A2} \qquad (2.77)$$

La matrice gyroscopique de l'arbre peut s'écrire sous la forme suivante

$$[C_{gA}] = \begin{bmatrix} 0 & -[C_{g\,A2}] \\ [C_{g\,A2}] & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.78)$$

II -4-1-4 Matrice de rigidité de l'arbre $[K_A]$:

La matrice rigidité de l'arbre est déterminée à partir de son énergie de déformation donnée par la relation (1.24). Par substitution du champ de déplacement en terme des fonctions de forme et de la coordonnée adimensionnelle, on a :

$$E_{dA} = \frac{E}{2} \int_0^l \left[I_m \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \right) \right] dy. \qquad (2.79)$$

L'énergie de déformation donnée par la coordonnée adimensionnelle

$$E_{dA} = \frac{E}{2L^3} \int_0^l \left[I_m \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 \right) \right] d\xi. \tag{2.80}$$

$$E_{dA} = \frac{EI_m}{2L^3} \int_0^1 \left(\left(\{q_u\}^T [N_u'']^T [N_u''] \{q_u\} \right) + \left(\{q_w\}^T [N_w]^T [N_w''] \{q_w\} \right) \right) d\xi \tag{2.81}$$

Avec les dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 N_u}{\partial^2 \xi} = N_u'' \tag{2.82}$$

$$\frac{\partial^2 N_w}{\partial^2 \xi} = N_w'' \tag{2.83}$$

Par raison de symétrie des deux plans oxy et ozy on a.

$$[K_{dA}] = \begin{bmatrix} [K_{dAu}] & 0 \\ 0 & [K_{dAw}] \end{bmatrix} \tag{2.84}$$

II -5 Détermination des matrices dues aux paliers :

La détermination des matrices de la rigidité $[K_P]$ et la matrice d'amortissement $[C_P]$.

II -5-1 Matrices raideurs et amortissements visqueux:

Par hypothèse on a supposé que les composantes de la matrice raideur sont de l'ordre de 10^8 N/m et la matrice d'amortissement est déduite de la relation suivante: [24]

$$\xi' = \frac{C_p}{2 M_t \omega_1} \tag{2.85}$$

ξ' : Constante d'amortissement est de l'ordre 10^{-2}.

M_t : Masse totale du rotor

ω_1 Première pulsation obtenue avec $K_p = 10^8 N/m$

II -5-1-1 Matrice amortissement des paliers :

Les composantes verticales et horizontales et les termes croisés de l'amortissement C_p dus aux paliers sont par hypothèse égaux. La matrice de l'amortissement C_p dus aux paliers est déterminée en annexe 2.

II -5-1-2 Matrice de rigidité des paliers :

Les composantes verticales et horizontales et les termes croisés de la rigidité K_p dus aux paliers sont par hypothèse égaux, La matrice de la rigidité K_p due aux paliers est déterminée en annexe 2.

La matrice raideur et la matrice d'amortissement sont en général symétriques et peuvent variées d'une manière significative avec la vitesse de rotation

II -6 Equation du mouvement :

Les équations de Lagrange utilisent l'expression des énergies calculées à partir d'une formulation de type éléments finis, le vecteur des déplacements du rotor est noté $\{q\}$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{cR}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_{cR}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{dR}}{\partial q_i} = 0 \qquad (2.86)$$

Avec l'énergie cinétique du rotor :

$$E_{cR} = E_{cD} + E_{cA} \qquad (2.87)$$

$$E_{dR} = E_{dA} \qquad (2.88)$$

E_{cR} : Energie cinétique du rotor.

E_{cD} : Energie cinétique du disque.

E_{cA} : Energie cinétique de l'arbre.

E_{dR} : Energie de déformation du rotor

E_{dA} : Energie de déformation de l'arbre.

On obtient l'équation finale du mouvement du rotor

$$[M]\ddot{q} + (\Omega[C_g] + [C_p])\dot{q} + ([K_A] + [K_P] + [R])q = 0 \qquad (2.89)$$

$[M]$: Matrice masse.

$[C_g]$: Matrice gyroscopique.

$[C_p]$: Matrice d'amortissement visqueux due aux paliers

$[K_A]$: Matrice de raideur de l'arbre.

$[K_p]$: Matrice de raideur des paliers.

$[R]$: Matrice de la rigidification centrifuge.

On pose :

$$K = K_A + K_p + R \quad (2.90)$$

$$M = M_A + M_D \quad (2.91)$$

$$C = C_g = C_{gA} + C_{gD} + C_P$$

L'équation différentielle prend la forme :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C_g]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = 0$$

Les solutions de cette équation différentielle En tenant compte de l'amortissement structural donnent les fréquences recherchées a variables complexes [19].

Chap III

Résultat et interprétation

Application N°1

III -1 Caractéristiques mécaniques et géométriques :

L'élément rotor au repos n'est soumis ni à la force axiale ni à l'amortissement structural, Cas stationnaire ses caractéristiques physiques et géométriques sont :

$\rho = 7800 kg/m^3$ $\nu = 0.33$ $E = 2.07.10^{11} Pa$ L=1m

Arbre :

Rayon intérieur $a = 0.02m$

Rayon extérieur $b = 0.05m$

Disque :

Rayon intérieur $A = 0.05m$

Rayon extérieur $B = 0.18m$

III -2 Fréquences vibratoires d'un Arbre :

Afin d'illustrer l'influence de la vitesse de rotation sur les pulsations propres d'un système tournant conservatif, considérons l'arbre cylindrique du système tournant étudié comme étant un arbre,

caractérisé par une longueur l, un module d'élasticité E et un moment d'inertie diamétral I et supportant en son milieu un disque mince indéformable de masse m et de moment d'inertie diamétral I_d et polaire I_p, la structure apparentée a la famille des rotors de jeffcott dérivée du model de Laval, tourne a une vitesse angulaire constante Ω autour de son axe longitudinal et vérifiant les hypothèses des poutres et des arbres de Bernoulli Euler .

Nous supposons que les extrémités de l'arbre sont encastrées et la rotation de l'arbre autour de son axe longitudinal restant libre.

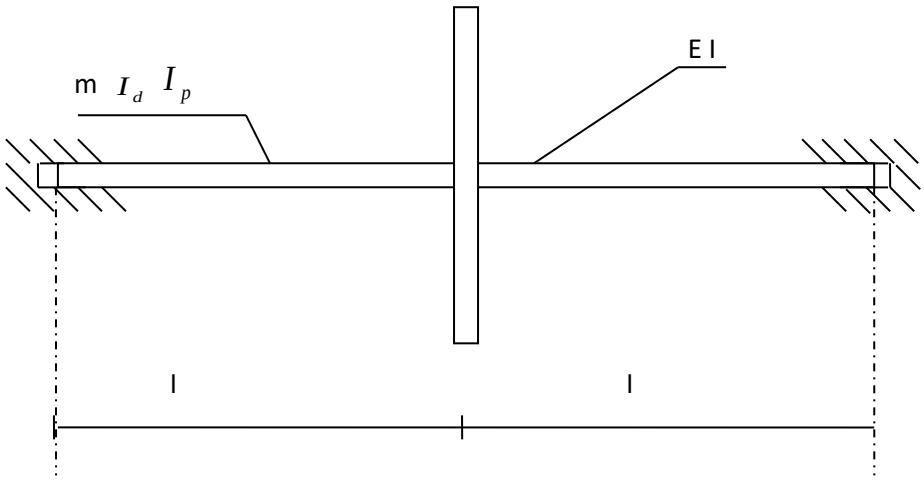


Figure III.1 Arbre avec disque au milieu

Apres la prise en compte des conditions aux limites de type encastrement aux deux extrémités le tracé des diagrammes de Campbell du système tournant aura, quatre paramètres de pulsations propres qui sont [20]:

$$\varpi_1 = \varpi_2 \tag{3.1}$$

$$\omega_3 = -\Omega + \sqrt{\Omega^2 + \frac{\omega_0^2}{12 R_d^2}} \quad 3 \tag{3.2}$$

$$\omega_4 = \Omega + \sqrt{\Omega^2 + \frac{\omega_0^2}{12 R_d^2}} \tag{3.3}$$

$^{R}{}_{d}$: Rayon de giration. du rotor

ϖ_0 : Pulsation initiale de chaque mode de vibration.

Ω : vitesse de rotation du rotor.

III -2-1 Détermination des résultats d'un arbre encastrée encastrée :

Les solutions propres du système en mouvement sont de types complexes conjuguées deux à deux :

$$\lambda_r = \alpha_r \pm i\varpi_r \tag{3.4}$$

$$\lambda_r = \boldsymbol{Re}(\lambda_r) \pm \boldsymbol{Im}(\lambda_r) \tag{3.5}$$

La partie réelle $\boldsymbol{Re}(\lambda_r)$ correspond à l'étude de la stabilité du rotor

La partie imaginaire $\boldsymbol{Im}(\lambda_r)$ correspond à l'étude des fréquences propres

L'arbre considéré pour cette étude est un arbre cylindrique caractérisé par une longueur, un module d'élasticité E, supportant en son milieu un disque mince indéformable de masse m_d.

Les fréquences propres du système a l'arrêt sont données dans le tableau Tab III.1 , ces valeurs sont nécessaires pour la suite du calcul

III -2-2 Détermination des paramètres de fréquence :

Les paramètres de fréquence ci-dessous représentant la variation des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre.

$$\omega_3 = -\Omega + \sqrt{\Omega^2 + \frac{\omega_0^2}{12\,R_d^2}} \tag{3.6}$$

$$\omega_4 = \Omega + \sqrt{\Omega^2 + \frac{\omega_0^2}{12\,R_d^2}} \tag{3.7}$$

Ω : Vitesse de rotation de l'arbre

ω_0 : 1er Pulsation propre du 1er mode de vibration du rotor

R_d : Rayon de giration. du rotor

$$R_d^2 = \frac{I_R}{m_t\, l^2} \tag{3.8}$$

m_t : La masse totale (masse arbre +masse disque)

l : Longueur de l'arbre

I_R : Moment d'inertie du rotor

$$I_R = I_{Ad} + I_{Dd} + I_{Dp} \tag{3.9}$$

Le moment d'inertie diamétral du disque :

$$I_{Dd} = \frac{\pi}{4}\left(B^4 - A^4\right) \tag{3.10}$$

Le moment d'inertie polaire du disque :

$$I_{DP} = \frac{\pi}{2}\left(B^4 - A^4\right) \tag{3.11}$$

B et A : rayon extérieur et intérieur du disque

Le moment d'inertie diamétral de l'arbre

$$I_{Ad} = \frac{\pi}{4}\left(b^4 - a^4\right) \tag{3.12}$$

b et a : rayon extérieur et intérieur de l'arbre.

La masse du disque :

$$m_D = \rho \,.ep.S_d \tag{3.13}$$

La masse de l'arbre

$$m_A = \rho \,.l.S_A \tag{3.14}$$

Avec :

$\rho = 7800\ kg/m^3$ La masse volumique

$ep_d = 0.10\ m$ Epaisseur du disque

S_d Section du disque

S_A Section de l'arbre.

l Longueur de l'arbre

III -3 Résultats et interprétations :

Les valeurs données dans les tableaux ci-dessous correspondent aux solutions propres du système en mouvement et sont du types complexes conjuguées deux a deux :

$$\lambda_r = \alpha_r \pm i\,\varpi_r \tag{3.15}$$

$$\lambda_r = \boldsymbol{Re}(\lambda_r) \pm \boldsymbol{Im}(\lambda_r) \tag{3.16}$$

La partie réelle $\boldsymbol{Re}(\lambda_r)$ correspond à l'étude de la stabilité du rotor

La partie imaginaire $\boldsymbol{Im}(\lambda_r)$ correspond à l'étude des fréquences propres

Les résultats des fréquences propres obtenus pour différentes conditions aux limites et pour différentes vitesses de rotations sont classés par ordre croissant dans les tableaux suivants.

III -4 Arbre encastrée encastrée EE:

Le rotor est supposé à la condition limite encastrée encastrée sous l'effet de la force axiale.

III -4-1 Arbre EE avec force axiale

Les valeurs représentées dans le tableau III.2et III.3 correspondent respectivement aux fréquences propres et aux paramètres de fréquence propres du rotor en mouvement et sont des solutions purement imaginaires.

III -4-1-1 Fréquences propres du système en rotation :

Les fréquences propres du la poutre encastrée encastrée avec force axiale sont données dans le tableau Tab III.1 ci-dessous.

Tab III.1fréquences propres de la poutre EE avec force axiale **(Ω tr/mn, F Hz)**

	$\Omega = 0$	$\Omega = 10^4$	$\Omega = 210^4$	$\Omega = 310^4$	$\Omega = 410^4$	$\Omega = 510^5$
Mode 1	21.47	24.73	27.27	29.77	33.93	34.01
Mode 2	23.489	25.229	27.621	29.831	32.114	34.172
Mode 3	28.715	33.061	42.081	50.397	57.726	64.297
Mode 4	39.054	41.592	47.265	53.709	60.028	66.004
Mode 5	52.737	53.776	56.618	60.641	65.249	70.054
Mode 6	64.841	65.447	67.172	69.782	73.005	76.607

III -4-1-2 Paramètres de fréquence du système en rotation :

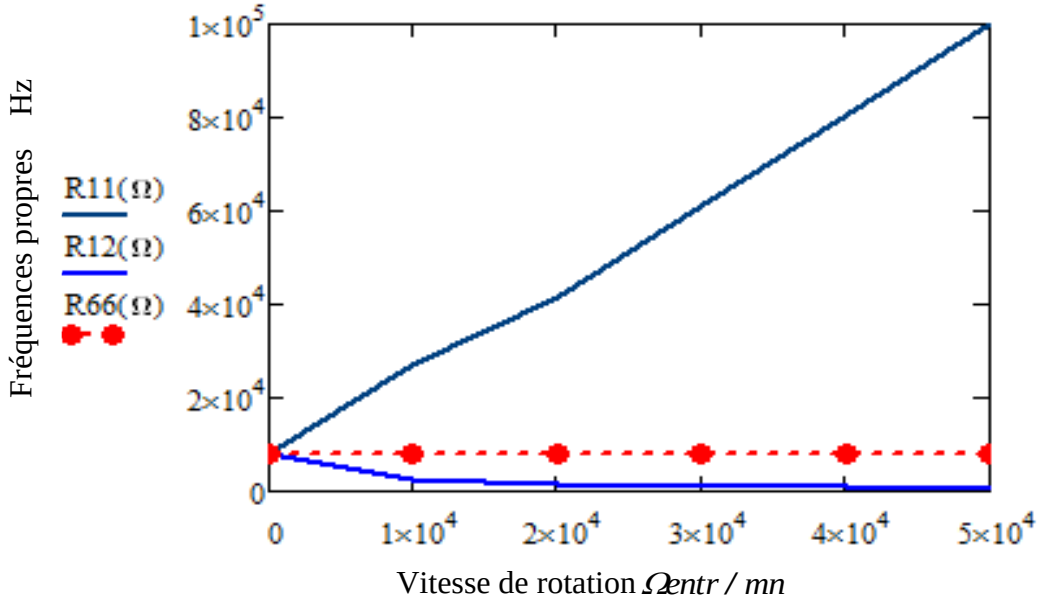
Les valeurs qui sont données dans le Tab III.2 correspondent aux paramètres des fréquences de la poutre encastrée encastrée avec force axiale.

Tab III.2 Paramètres de fréquences obtenus pour la poutre EE avec force axiale. **(Ω tr/mn, F Hz)**

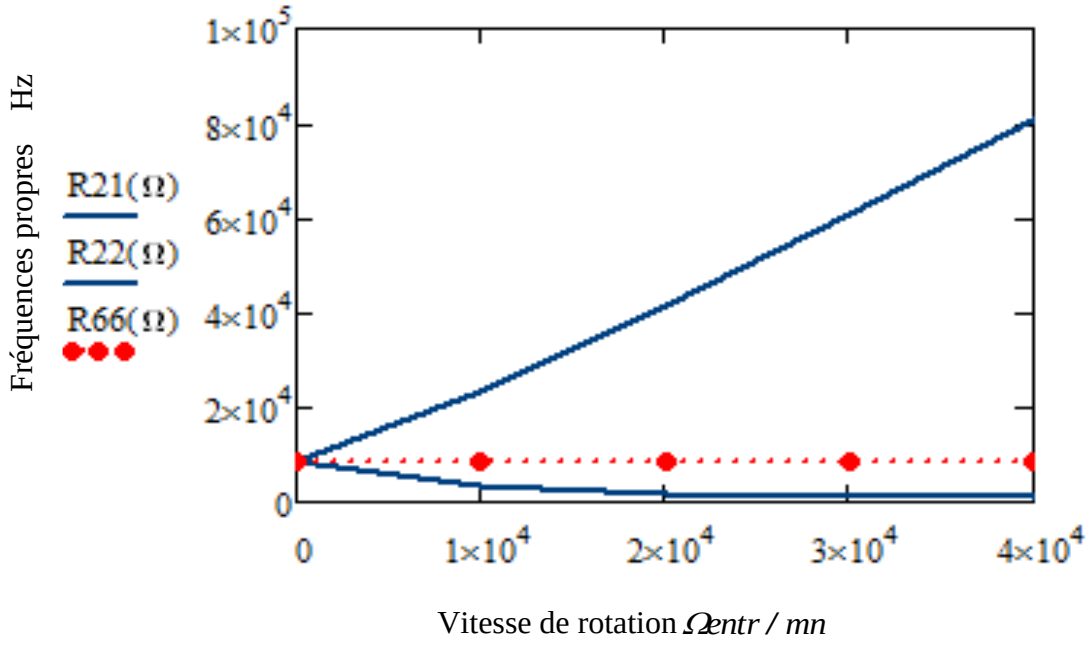
	$\Omega = 0$	$\Omega = 10^4$	$\Omega = 2.10^4$	$\Omega = 3.10^4$	$\Omega = 4.10^4$	$\Omega = 5.10^4$
Mode 1	7.8010^3 7.8010^3	2.6910^4 2.6810^3	4.1410^4 1.4610^3	6.1010^4 998.89	8.0710^4 754.52	1.0010^5 605.64
Mode2	8.5410^3 8.5410^3	2.3110^4 3.1510^3	4.1710^4 1.7410^3	6.1010^4 1.1910^3	8.0910^4 1.1910^3	1.0010^5 724.12
Mode3	1.04410^3 1.04410^3	2.4410^4 4.4510^3	4.2510^4 2.5610^3	6.1710^4 1.7610^3	8.1310^4 1.3310^3	1.0110^5 1.0710^3
Mode4	1.4110^4 1.4110^4	2.7510^4 7.5110^3	4.4610^4 4.6310^3	6.3210^4 3.2610^3	8.2510^4 2.5010^3	1.0210^5 2.02610^3
Mode5	1.9110^4 1.9110^4	3.1610^4 1.1610^3	4.7710^4 7.7010^3	6.5610^4 5.6010^3	8.4310^4 4.3510^3	1.0210^4 1.9710^3
Mode6	2.3510^4 2.3510^4	3.5610^4 1.5610^4	5.0910^4 1.0910^3	6.8110^4 8.1510^3	8.6410^4 6.4210^3	1.0510^5 5.2710^3

III -4-1-3 Diagrammes de Campbell:

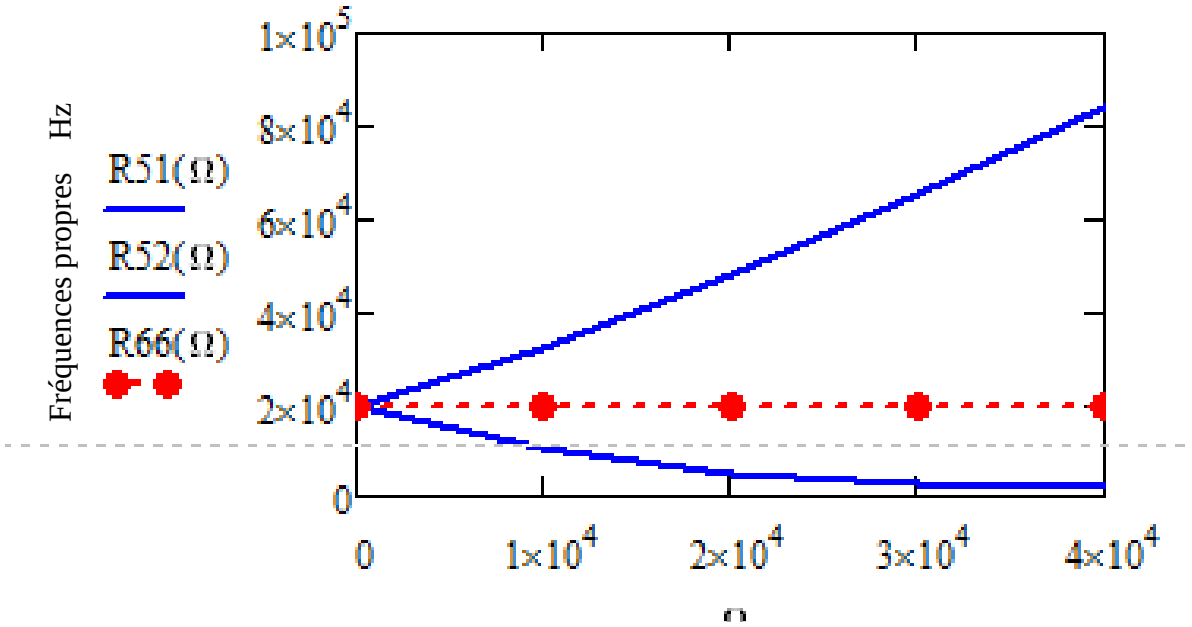
Les diagrammes ci-dessous correspondent aux diagrammes de quatre modes de vibrations de la poutre encastrée encastrée avec force axiale.



Graphe III.1 mode1 poutre EE avec force

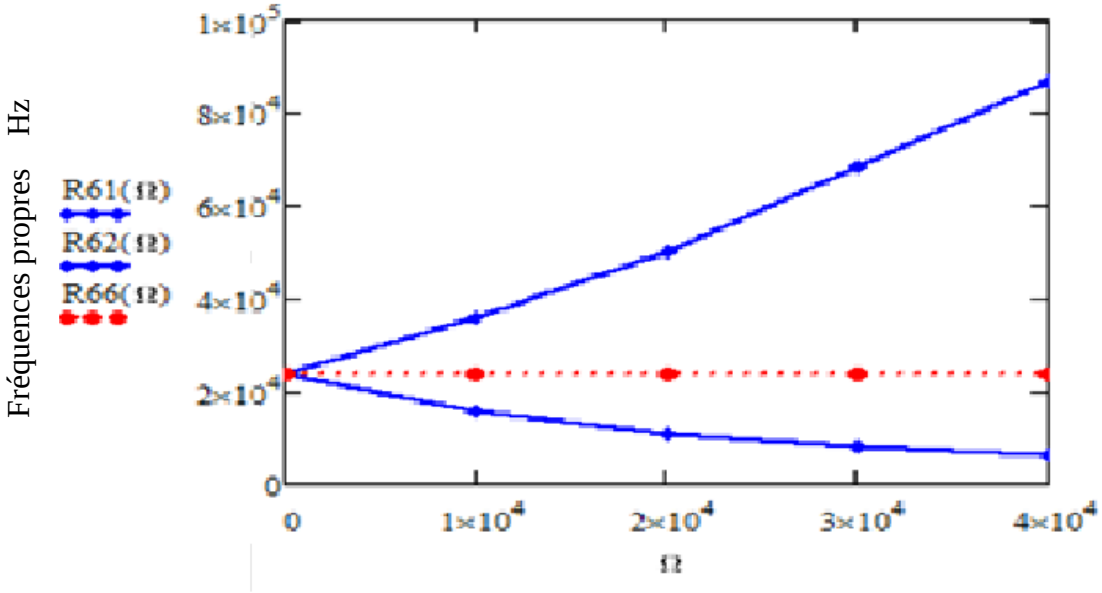


Graphe III.2 mode2 poutre EE avec force



Vitesse de rotation *Ωentr / mn*

Graphe III.3 mode 5 poutre EE avec force



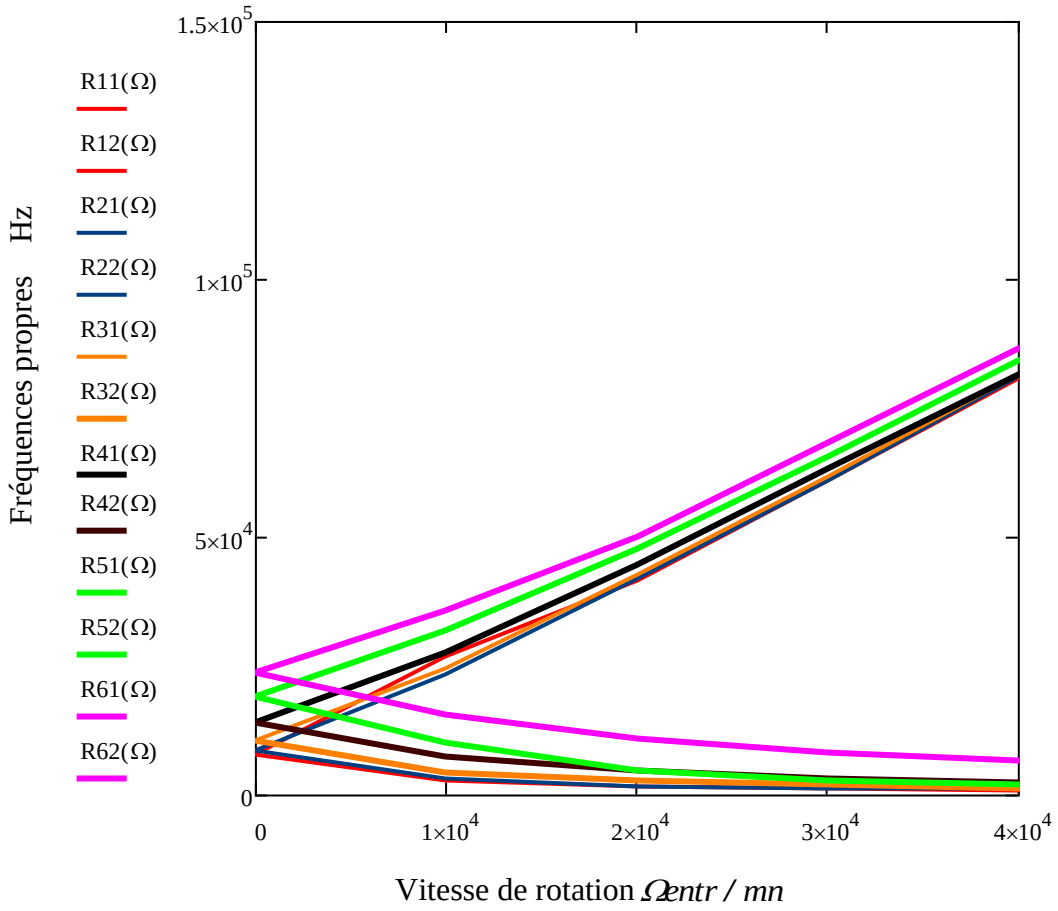
Vitesse de rotation *Ωentr / mn*

Graphe III.4 mode 6 poutre EE avec force axiale

On constate sur les graphes précédant représentant les diagrammes de Campbell que la branche de la précession directe tend a augmenter avec la vitesse de rotation et la précession rétrogradée tend a s'annuler avec la vitesse de rotation, et l'effet gyroscopique a une grande influence sur le comportement vibratoire du rotor et tend a séparer les deux branches du diagramme de Campbell.

Dans le graphe ci-dessous, on a groupé toutes les représentations de tous les modes de la poutre encastrée encastrée qui correspondent aux tracés des précessions directes et des précessions rétrogradées.

Cette synthèse nous permet de voir et de comparer l'évolution des précessions directes et rétrogradé des six premiers modes et leurs convergences entre eux.



Graphe III.5 les six premiers modes de la poutre EE avec force axiale **R_{ij}** : ce sont les branches de chaque mode il représente les fréquences propres de vibration avec (i = 1 ,2,…..6 et j=1, 2)

III -4-3 Fréquences propres de la Poutre EE sans force axiale.

Les valeurs reportées sur les tableaux ci-dessous correspondent aux valeurs des fréquences propres d'un rotor en mouvement soumis à l'amortissement structurel et sans force axiale

Tab III.3 fréquences propres de la poutre EE sans force axiale: **(Ω tr/mn, F Hz)**

	$\Omega = 0$	$\Omega = 10^4$	$\Omega = 210^4$	$\Omega = 310^4$	$\Omega = 410^5$	$\Omega = 510^5$
Mode 1	21.47	24.732	27.268	29.751	31.897	34.961
Mode 2	23.48	25.229	27.611	29.811	32.079	34.118
Mode 3	28.715	33.051	42.062	50.373	57.699	64.266
Mode 4	39.054	41.586	47.25	53.686	60.998	65.969
Mode 5	52.737	53.767	56.588	60.586	65.171	69.957
Mode 6	64.841	65.442	67.152	69.741	72.942	76.523

III -4-2-1 Fréquences propres avec et sans force axiale :

La comparaison des résultats obtenus de la vibration d'un rotor avec et sans force axiale est faite sur les fréquences propres qui représentent des solutions purement imaginaires.

Tab III.4mode 1 avec et sans amortissement : **(Ω tr/mn, F Hz)**

	Ω =0	$\Omega = 1\,10^4$	$\Omega = 2\ 10^4$	$\Omega = 310^4$	$\Omega = 410^4$	$\Omega = 510^4$
ω_a (avec a)	21.474	24.735	27.277	29.776	31.938	34.018
ω_S (sans a)	21.474	24.732	27.268	29.751	31.897	33.961

Les fréquences propres avec force axiale sont supérieures aux fréquences propres sans force axiale

Tab III.5 mode 2 avec et sans amortissement : **(Ω tr/mn, F Hz)**

	Ω =0	$\Omega = 1\,10^4$	$\Omega = 2\ 10^4$	$\Omega = 310^4$	$\Omega = 410^4$	$\Omega = 510^4$
ω_a (avec a)	23.489	25.229	27.621	29.831	32.114	34.172
ω_S (sans a)	23.489	25.229	27.610	29.811	32.079	34.118

Les fréquences propres avec force axiale sont supérieures aux fréquences propres sans force axiale **.**

Tab III.6 mode 3 avec et sans amortissement : **(Ω tr/mn, F Hz)**

	Ω =0	$\Omega = 1\,10^4$	$\Omega = 2\,10^4$	$\Omega = 310^4$	$\Omega = 410^4$	$\Omega = 510^4$
ω_a (avec a)	28.715	33.061	42.081	50.397	57.726	64.297
ω_S (sans a)	28.715	33.050	42.062	50.373	57.699	64.266

Les fréquences propres avec force axiale sont supérieures aux fréquences propres sans force axiale **.**

Tab III.7 mode 4 avec et sans amortissement : **(Ω tr/mn, F Hz)**

	Ω =0	$\Omega = 1\,10^4$	$\Omega = 2\,10^4$	$\Omega = 310^4$	$\Omega = 410^4$	$\Omega = 510^4$
ω_a (avec a)	39.054	41.592	47.265	53.709	60.028	66.004
ω_S (sans a)	39.054	41.586	47.250	53.686	59.998	65.969

Les fréquences propres avec force axiale sont supérieures aux fréquences propres sans force axiale

Tab III.8 mode 5 avec et sans amortissement : **(Ω tr/mn, F Hz)**

	Ω =0	$\Omega = 1\,10^4$	$\Omega = 2\,10^4$	$\Omega = 310^4$	$\Omega = 410^4$	$\Omega = 510^4$
ω_a (avec a)	52.737	53.776	56.618	60.641	65.249	70.054
ω_S (sans a)	52.737	53.767	56.588	60.586	65.171	69.957

Les fréquences propres avec force axiale sont supérieures aux fréquences propres sans force axiale

Tab III.9 mode 6 avec et sans amortissement : **(Ω tr/mn, F Hz)**

	Ω =0	$\Omega = 1\,10^4$	$\Omega = 2\,10^4$	$\Omega = 310^4$	$\Omega = 410^4$	$\Omega = 510^4$
ω_a (avec a)	64.841	65.447	67.172	69.782	73.005	76.607
ω_S (sans a)	64.841	65.442	67.152	69.741	72.942	76.523

Les fréquences propres avec force axiale sont supérieures aux fréquences propres sans force axiale

Conclusion :

Les fréquences propres des vibrations d'un rotor sous l'effet de la force axiale sont supérieurs aux fréquences propres des vibrations sans force axiale cela explique que l'effet de la force axiale tend a agir sur les vibrations de la structure en diminuant sont amplitude et en augmentant sa fréquence propre.

Application N°2

Le rotor étudié dans cette partie est le même rotor avec la même étude mais le disque n'existe pas donc l'effet gyroscopique diminue. Cette étude est faite par une application matlab du laboratoire de dynamiques des machines IS2M Tlemcen. [25]

III -5 Rotor sans disque : C'est un rotor de transmission.

Fig III.2 Rotor sans disque

Les résultats obtenus pour ce rotor est un diagramme de Campbell qui peu décrire le comportement vibratoire du rotor.

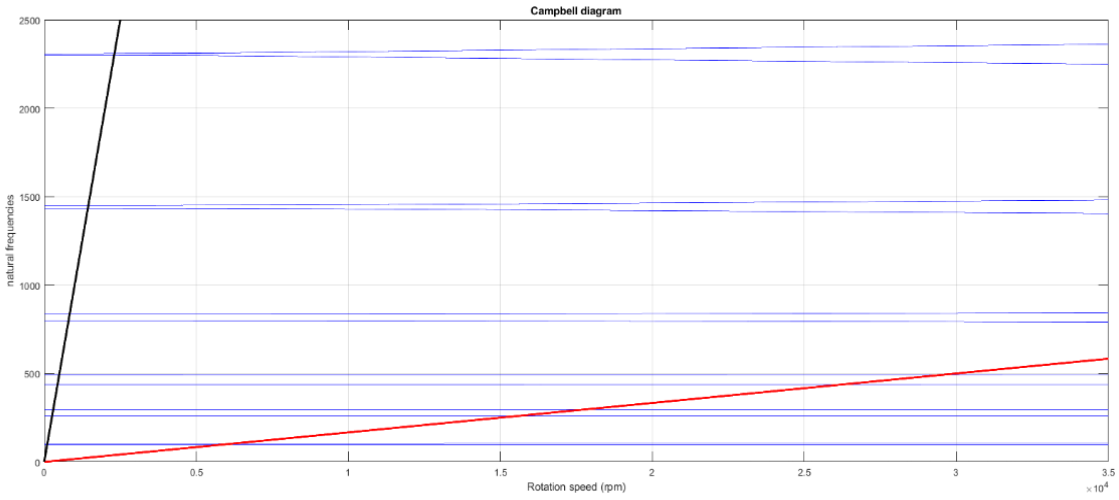


Fig III.3 Les six premiers modes de vibration d'un Rotor sans disque.

On ne constate que les six premiers modes de vibrations representés dans la fig 2 de cette application N°2, Ces modes se définissent par deux branches vibratoires qui sont la branche de la précession directe et de la précession indirecte (appelée aussi (Nutation) et ces mode fréquentielles sont classés du plus petit au plus grand sur le graphe avec les divers vitesses critiques propres du système (droite en noire y=Ω) et la vitesse critique du balourd (droite en rouge y=$\frac{\Omega}{60}$).on constate aussi que les deux branches sont presque fermées cela est veu dire que l'effet gyroscopique est tres faible et iln 'arrive pas a séprer les deux branches.

Application N°3

Le rotor étudié dans cette partie est le même rotor avec la meme étude mais le disque n'est pas au milieu donc l'effet gyroscopique diminue. Cette étude est faite par une application matlab du laboratoire de dynamiques des machine IS2M Tlemcen.[25]

III -6 Rotor avec disque :Rotor d'une petite machine (pompe, …..)

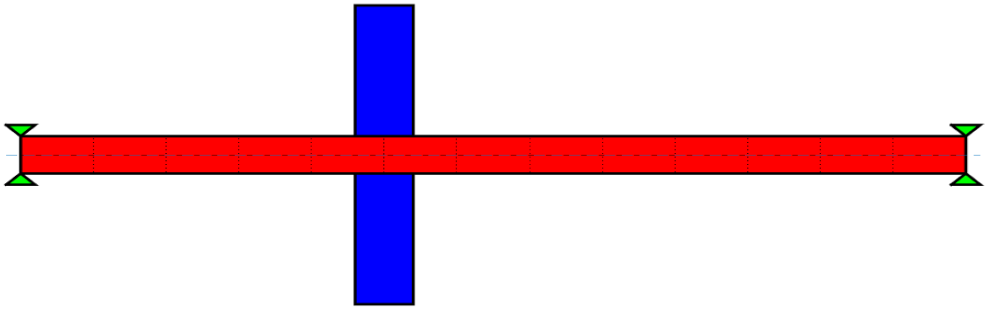


Fig 3.4 Rotor avec disque

Le diagramme de Campbell de ce rotor est representé dans la fig 5 ci-dessous.

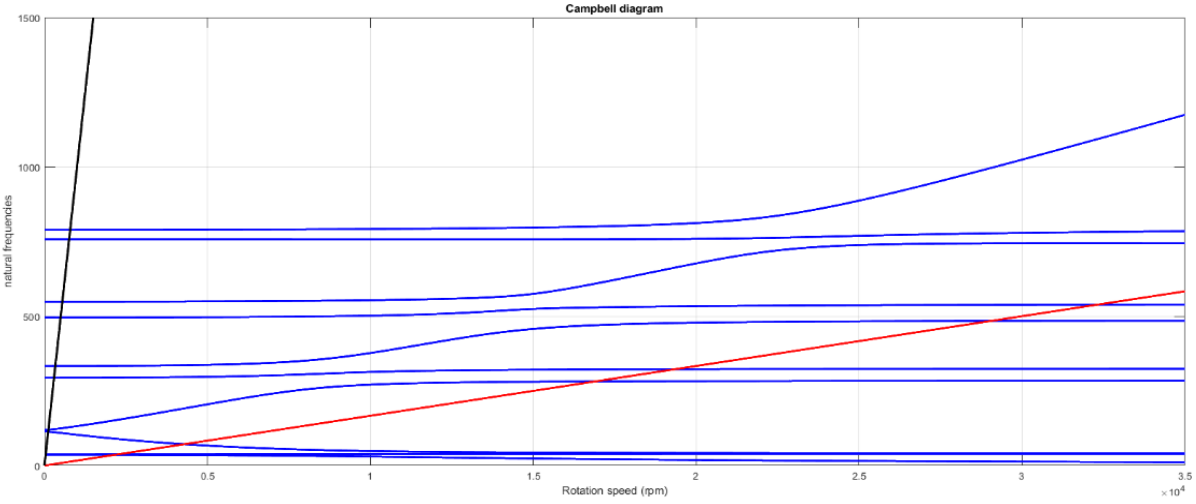


Fig3.5 Diagramme de Campbell du rotor avec disque.

On constate que ce rotor a les branches des précessions directes varient non linéairement cela est du a l'existence d'un balourd important qui crée un déséquilibre dans le rotor et une dissymétrie dans les paliers (sur l'axe des fréquences les deux branches ont des points différents pour $\Omega = 0$ vitesse de ortation du rotor.

On remarque que les vitesses critiques propres du système (droites en noire y=Ω) des deux rotors sont inférieurs aux vitesses criques du balourd (droites en rouge y=$\frac{\Omega}{60}$) cela veux dire que l'éxistence du balourd donnent des vitesses critiques erronnées et le rotor peut tourner a l'une d'entres elles

Conclusion Générale

Conclusion générale:

Ce travail nous a permis de déterminer le comportement vibratoire d'un rotor composé d'un disque rigide et d'un arbre, sous l'effet de la force axiale a été prise en compte, et son origine ont été définies.

Nous avons appliqué la version p de la méthode des éléments finis pour la détermination des matrices : masse, rigidité, gyroscopique, et de la rigidification centrifuge.

Nous constatons que les modes propres d'un système conservatif en rotation sont des modes complexes deux a deux conjugués a pulsation propres purement imaginaire et sont dues aux effets gyroscopique, induits par la rotation qui couplent les déplacements horizontaux et verticaux.

Ils peuvent ce pendant, êtres associés pour obtenir des modes réels qualifiés soit de mode directe ou de mode rétrograde, suivant que le mouvement de précession qui leur est associe a un sens identique ou contraire au mouvement en rotation.

Le point essentiel est la dépendance de leurs fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation du rotor.

On remarque aussi que les branches de la précession directe convergent entre eux pour de très grandes vitesse, et les branches de la précession rétrogradé convergent aussi entre eux pour s'affaiblir avec l'augmentation de la vitesse de rotation.

On peut dire qu'avec l'augmentation de la vitesse de rotation les branches de la précession directe et rétrogradé de touts les modes convergents entre eux.

Nous avons étudiés l'effet de la force axiale sur les vibratoires d'un rotor, et on a constater que les fréquences propres des vibrations d'un rotor sont supérieurs aux fréquences propres des vibration sans forces axiales ceci montre que les forces axiales agissent sur les vibration de l'arbre en diminuant ses amplitudes et en augmentant ses fréquences propres. On peu dire donc que l'effet de la force axiale tend a diminuer les vibrations excessives et atténuer et neutraliser tous les dangers qui découlent de ses vibrations.

Nous avons tracé les graphes des diagrammes de Campbell pour les six premiers modes et pour conditions aux limites E E avec Force axiales, et les courbes croissantes et décroissantes du diagramme de Campbell sont relatives aux modes directes et rétrogrades.

Les résultats obtenus pour cette étude peuvent ouvrir des perspectives complémentaire pour l'étude de stabilité d'un rotor avec amortissement structurel, sous l'effet de la force axiale et sous l'effet d'un balourd, et l'études d'un rotor étager (cas d'un réacteur d'avion) sous l'effet de l'amortissement structurel, balourd et de la force axiale .

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES:

[1]. Jeffcott. H.1919 Phil Mag., Series 6, 37, 304. The Lateral Vibration of Loaded shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed the Effect of Want of Balance.

[2] Lalanne M., Ferraris G. Rotor dynamics prediction in engineering, 2nd Edition, Chichester, John Wiley, 1998, 254 p.

[3] GENTA G. Vibration of structures and machines. New York : Springer, 1995

[4] GENTA G. Dynamics of rotating systems. New York: Springer, 2005.

[5] LALANNE M., BERTHIER P., DER HAGOPIAN J. Mechanical vibrations for engineers. Chichester : Wiley, 1984.

[6] THOMAS M., LAVILLE F. Simulation des vibrations mécaniques par Matlab, Simulink et Ansys. Presse de l'université du Québec, 2007.

[7] M. Imregun and D. J. Ewins. ―Complex modes- Origins and limits‖. In Procee-dings of the 13th IMAC, (1995).

[8] Campbell R. Théorie Générale de l'Equation de Mathieu (et de quelques autres équations essentielles de la mécanique), Paris, Masson et Cie, 1955, 2'7lp.

[9] A,Houmat, An alternative hierarchical Finite element Formulation Applied to Plate vibrations journal of sound and vibration.1997, 206 (2) 201-215.

[10] Szabo B.A PROB Theoretical manual release1. Technologies Corp, St Louis, MO, 1985

[11] Szabo B.A FIESTA Theoretical manual Release1. Technologies Corp, St Louis, MO, 1985

[12] Szabo et Babushka The p-version of the finite element method SIAM J Numeric, 1981, Volume 18

[13] Frederic .Cugnon et Pierre .B. Comparaison entre la méthode des éléments finis h , p et la version hp et leurs avantage Université de liège.

[14] V.Heuvline, R Rannacher, Duality-based adaptivity in the hp- finite element method 2003.

[15] Manil Suri, La version HP de la méthode des éléments finis aux problèmes de mécaniques des vibrations.

[16] thèse de MAGISTER (étude et comportement vibratoire et simulation numérique des charges dynamiques d'un rotor flexible) de Mr. Brahimi Hamza, Université de Boumerdès, Année universitaire 2009/2010.

[17] GHARBI Radouane analyse des phénomènes vibratoires en dynamique des rotors modélisation et expérimentation année 2014 université de Batna.

[18] Euler Bernoulli from wikipédia the free encyclopedia Google .com

[19] Thomas Gmur Problèmes Dynamique des structures Analyse modale numérique

[20] Assem Hassan 2009 thése magistere univ tlemcen

[21] U de liege dynamique des turbomachines .année d'impression 2005

[22] J.Pellet, Notice de modélisation de l'amortissement structurale Document du 2-06-03

[24] William W, S.B Theory and problems of mechanical vibrations schaum's outline seri

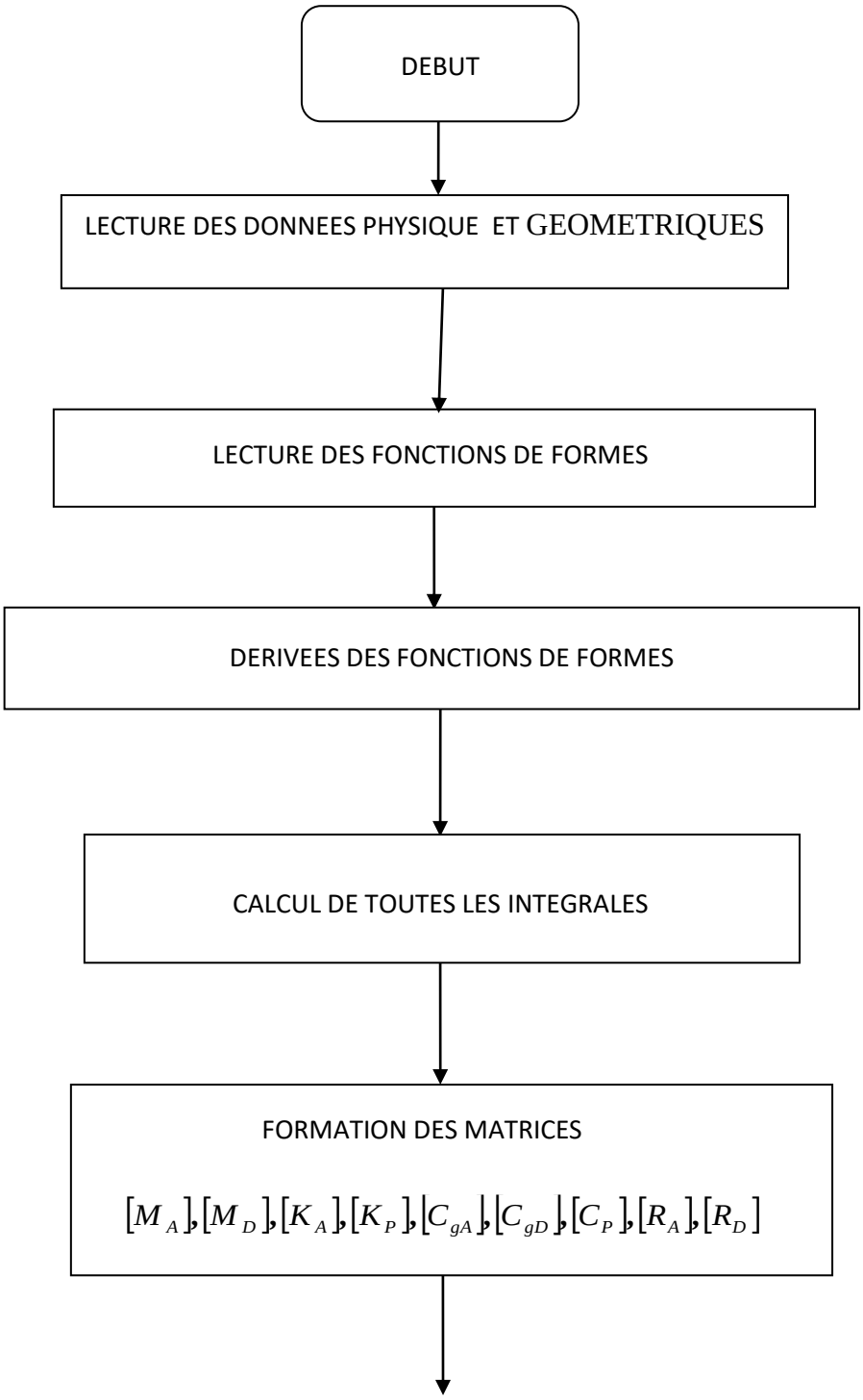
[25] Saimi Ahmed (applications faites au laboratoire de mécanique a Tlemcen (Matlab).

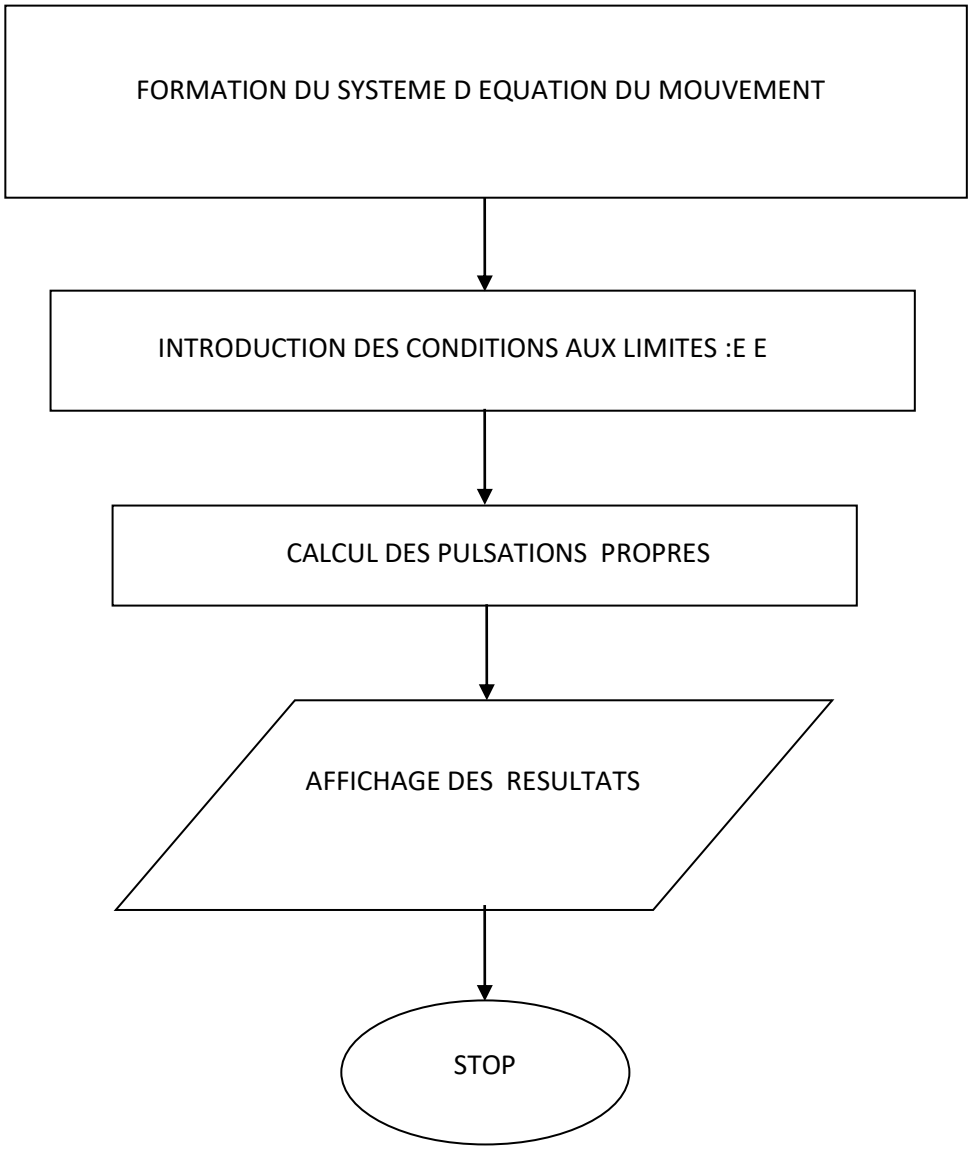
ANNEXE

Annexe 1

Organigramme de calcul des pulsations propres:

Le calcul des pulsations propres se fait selon un ordre chronologique bien definis et se traduit par l'organigramme suivant




FORMATION DU SYSTEME D EQUATION DU MOUVEMENT
INTRODUCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES :E E
CALCUL DES PULSATIONS PROPRES
AFFICHAGE DES RESULTATS
STOP

Annexe 02

1 - Matrices de la raideur élastique des paliers $[K_P]$

Par hypothèse les composantes de la raideur élastique des paliers sont égales :

$$K_{Pu1u1} = K_{Pw1w1} = K_{Pu1w1} = K_{Pw1u1} = K_{Pu1w1} = K_{Pu2u1} = K_{Pu2w2} = K_{Pw2u2}$$

la matrice de rigidité globale due aux paliers est donnée par.

$$[K_P] = \begin{bmatrix} [K_{P11}] & [K_{P12}] \\ [K_{P21}] & [K_{P22}] \end{bmatrix}$$

Avec, le bloc de matrice suivant ox pour les composantes horizontales

$$[K_{P11}] = \begin{bmatrix} K_{Pu1u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{Pu2u2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et , le bloc de matrice suivant oz pour les composantes verticales

$$[K_{P22}] = \begin{bmatrix} K_{Pw1w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{Pw2w2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les termes croisés sont donnés par les deux matrices ci dessous

$$[K_{P12}] = \begin{bmatrix} K_{Pw1u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{Pw2u2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K_{P21}] = \begin{bmatrix} K_{Pu1w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{Pu2w2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs des composantes de la raideur élastique des paliers prisent par hypothèses sont :

Palier 1 :

$$K_{Pu1u1} = 10^8\ N/m$$

$$K_{Pw1w1} = 10^8\ N/m$$

$$K_{Pu1w1} = 10^8\ N/m$$

$$K_{Pw1u1} = 10^8\ N/m$$

Palier 2 :

$$K_{Pu2u2} = 10^8\, N/m$$

$$K_{Pw2w2} = 10^8\, N/m$$

$$K_{Pu2w2} = 10^8\, N/m$$

$$K_{Pw2u2} = 10^8\, N/m$$

2-Matrice amortissement des paliers $[C_P]$

On pose par hypothèse que toutes les composantes de l'amortissement dues aux paliers sont égales sont égales

$$C_{Pu1u1} = C_{Pw1w1} = C_{Pu1w1} = C_{Pw1u1} = C_{Pu2u2} = C_{Pw2w2} = C_{Pu2w2} = C_{Pw2u2}$$

La matrice amortissement globale est constituée par les blocs de matrice suivants.

$$[C_P] = \begin{bmatrix} [C_{P11}] & [C_{P12}] \\ [C_{P21}] & [C_{P22}] \end{bmatrix}$$

Le bloc de matrice suivant ox pour les composantes horizontale

$$[C_{P11}] = \begin{bmatrix} C_{Pu1u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{Pu2u2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le bloc de matrice suivant oz pour les composantes verticales

$$[C_{P22}]=\begin{bmatrix} C_{Pw11w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{Pw2w2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les termes croisés sont donnés par les deux matrices ci-dessous.

$$[C_{P12}]=\begin{bmatrix} C_{Pw1u1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{Pw2u2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[C_{P21}]=\begin{bmatrix} C_{Pu1w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{Pu2w2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque :

on remarque que les matrices sont de dimension 10 et les vecteurs déplacements sont aux nœuds et dans cet ordre (u,θ, w,ψ) et ce qui reste se sont les déplacements entre les nœuds représentée par la fonction trigonométrique des fonction de formes qui est fonction de p ici p=10 qui donne la dimension totale de toutes les matrices recherchées ils contiennent les déplacements aux nœuds et les déplacements a l'intérieur

- Les valeurs de la rigidité des paliers sont posées a l'intérieur de la matrice de rigidité aux points uu et ww.
- la meme chose pour l'amortissement des paliers.