

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République algérienne démocratique et populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
جامعة عين تموشنت بلحاج بوشعيب  
Université –Ain Temouchent- Belhadj Bouchaïb  
Faculté des Sciences et de Technologie  
Département de Génie mécanique



Projet de Fin d'Etudes  
Pour l'obtention du diplôme de Master en :  
Domaine : Technologie  
Filière : Génie mécanique  
Spécialité : Construction mécanique  
Thème

*Analyse numérique de la dynamique des rotors FGM*

Présenté Par :

- 1) M<sup>elle</sup>. BOUABANE Ahlem
- 2) M<sup>r</sup>. CHAREUF Afroul Mostafa

Devant le jury composé de :

Dr Bahram. K	DR	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Président
Dr Belhenini .S	DR	UAT.B.B (Ain Temouchent)	Examineur
M <sup>f</sup> Assem .H	DR	UAT.B.B (Ain Témouchent)	Encadrant
M <sup>f</sup> Saimi .A	DR	Université de Blida	Co-encadrant

*Année Universitaire 2021/2022*



# REMERCIEMENTS



# Remerciements

Il sera difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes qu'on a pu réaliser ce mémoire.

Nous remercions tout d'abord **Allah** le tout puissant qui nous a permis d'arriver au bout de nos efforts en nous donnant la santé, la force, le courage et en nous faisant entourer des merveilleuses personnes dont nous tenons à remercier.

Nous adressons nos remerciements à nos parents, nos frères et sœurs et à ceux qui ont partagé avec nous tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail. Ils nous ont chaleureusement soutenus et encouragés tout au long de notre parcours. A nos familles, nos proches et à ceux qui nous donnent de l'amour et de la vivacité.

Nos remerciements s'adressent aussi à nos encadrants **Mr. HACEN ASSEM** et **Mr. SAIMI AHMED** pour leurs efforts ainsi à tous les enseignants qui nous ont aidé dans notre travail.

Nous adressons également nos sincères remerciements aux membres de jury **Dr BAHRAM** et **Dr BELHENINI** qui ont accepté d'évaluer ce travail, soyez assuré de notre plus profond respect.

Enfin, un grand merci à nos amis, **HOUDA** et **FATNA** en particulier pour leur soutien et encouragement.



RÉSUMÉ  
ABSTRACT  
ملخص

# Résumé

Le présent travail porte sur une analyse numérique de la dynamique des rotors FGM, le système constitue un arbre en FGM avec un disque isotrope supportés par des paliers. Une étude théorique est faite permettant l'établissement des énergies cinétiques et de déformation basé sur le modèle d'Euler Bernoulli nécessite la détermination des équations de mouvement à partir des équations de Lagrange. La méthode des éléments finis version « p » est utilisée pour modéliser la structure étudiée. Dans cette étude nous avons adopté deux structures dont l'arbre FGM est constitué de deux mélanges métal-céramique (SUS304-Zircone) et (SUS304-Silicone Nitride) où les propriétés changent graduellement dans la direction de l'épaisseur pour étudier l'influence de l'indice volume fraction ainsi le rapport géométrique L/D sur les fréquences propres. Nous avons utilisé l'application APPROTOR pour le calcul des fréquences propres du système dont les résultats sont présentés sous forme de graphes et comparaisons.

# Abstract

The present work relates to a numerical analysis of the dynamics of FGM rotors, the system constitutes a shaft in FGM with an isotropic disc supported by bearings. A theoretical study is made allowing the establishment of the kinetic energies and deformation based on the model of Euler Bernoulli requires the determination of the equations of motion from the equations of Lagrange. The “p” version finite element method is used to model the studied structure. In this study we adopted two structures where the shaft FGM consists of two metal-ceramic mixtures (SUS304-Zirconium) and (SUS304-Silicon Nitride) where the properties change gradually in the direction of the thickness to study the influence of the volume index and the geometric ratio L/D on the natural frequencies. We used the APPROTOR application for the calculation of the natural frequencies of the system, the results of which are presented in the form of graphs and comparisons.

## ملخص

يتعلق العمل الحالي بالتحليل العددي لديناميكيات دوارات متدرجة وظيفيا، ويشكل النظام عموداً من مواد متدرجة وظيفيا مع قرص متناح مدعوم بمحامل. تم إجراء دراسة نظرية تسمح بإنشاء الطاقات الحركية وطاقة اجهاد النظام بناءً على نموذج Euler Bernoulli يتطلب تحديد معادلات الحركة من معادلات لاغرانج. تم استخدام طريقة العناصر المحدودة للإصدار "p" لنمذجة البنية المدروسة. اعتمدنا في هذه الدراسة هيكلين يتكون العمود المتدرج وظيفيا من خليطين من المعدن والسيراميك (SUS304-Zircone) و (SUS304-Silicone Nitride) حيث تتغير الخصائص تدريجياً في اتجاه السماكة لدراسة تأثير مؤشر الحجم والنسبة الهندسية طول/قطر على الترددات الذاتية. استخدمنا تطبيق APPROTOR لحساب الترددات الطبيعية للنظام، والتي يتم تقديم نتائجها في شكل رسوم بيانية ومقارنات.

# Table des matières

Remerciements.....	2
Résumé.....	4
Abstract.....	4
ملخص.....	5
Liste des figures.....	9
Liste des tableaux.....	11
Liste des symboles.....	12
Introduction générale.....	15

## CHAPITRE I

### Rotors- matériaux à gradient fonctionnels

I.1 Introduction.....	19
I.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	19
I.3 Propriétés des céramiques.....	20
I.3.1 Définition.....	20
I.3.2 Propriétés physiques.....	20
I.3.3 Propriétés mécaniques.....	20
I.4 Les caractéristiques des céramiques.....	21
I.5 Historique des matériaux à gradient de propriétés.....	21
I.6 Avantages et inconvénients des FGM.....	24
I.6.1 Avantages.....	24
I.6.2 Inconvénients :.....	25
I.7 Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés.....	25
I.7.1 Domaine d'énergie.....	26
I.7.2 Domaine aérospatiale.....	26
I.7.3 Domaine automobile.....	28
I.7.4 Equipements et machines.....	28
I.7.5 Domaine biomédical.....	29
I.7.6 Défense.....	29
I.7.7 Domaine maritime.....	30
I.7.8 Domaine sportif.....	30
I.7.9 Autres applications.....	30

I.8	Modèle mathématique d'homogénéisation des propriétés matérielles des FGM .....	30
I.8.1	Propriétés matérielles des structures P-FGM .....	31
I.9	Définition du rotor .....	33
I.10	Classification des rotors .....	34
I.10.1	Les paramètres géométriques .....	34
a.	Rotor arbre long .....	34
b.	Rotor type disque arbre .....	34
c.	Rotor à aubes .....	34
d.	Rotor libre .....	34
I.10.2	Les paramètres mécaniques .....	34
a.	Rotor rigide .....	34
b.	Rotor flexible .....	35
I.11	Les composants de base d'un rotor :.....	35
a.	L'arbre .....	35
b.	Rotor rigide .....	35
c.	Rotor rigide .....	35
d.	Rotor rigide .....	35
I.12	Conclusion.....	36

## **CHAPITRE II**

### **Formulation par la méthode des éléments Finis**

II.1	Introduction .....	38
II.2	Définition de la méthode des éléments finis.....	38
II.3	Domaines d'applications de la MEF .....	39
II.4	Modélisation par la méthode des éléments finis en générale .....	39
II.5	Calcul des énergies des différents composants du rotor.....	40
II.5.1	Vitesse d'un point de la section droite de l'arbre .....	40
II.5.2	Energie cinétique de l'arbre .....	41
II.5.3	Energie de déformation de l'arbre.....	41
II.5.4	Energie cinétique du disque .....	43
II.5.5	Paliers .....	43
II.6	Modélisation par éléments finis .....	44
II.6.1	Champs de déplacement .....	45
II.6.2	Fonctions de forme .....	46

II.7 Modélisation par éléments finis du disque .....	47
II.7.1 Détermination des matrices .....	48
II.7.1.1 Matrice masse $[M_D]$ .....	48
II.7.1.2 Matrice gyroscopique $[C_{gD}]$ .....	49
II.8 Modélisation par éléments finis de l'arbre .....	51
II.8.1 Détermination des matrices .....	52
II.8.1.1 Matrice masse de l'arbre $[M_A]$ .....	52
II.8.1.2 Matrice gyroscopique de l'arbre $[C_{gA}]$ .....	53
II.8.1.3 Matrice de rigidité de l'arbre $[K_A]$ .....	53
II.9 Détermination des matrices des paliers .....	54
II.9.1 La matrice d'amortissement $[C_p]$ .....	54
II.9.2 La matrice de rigidité $[K_p]$ .....	55
II.10 Equation du mouvement.....	55
II.11 Conclusion.....	57

## **CHAPITRE III**

### **Résultats et interprétations**

III.1 Introduction.....	59
III.2 Présentation de l'application :.....	60
III.2.1 Caractéristiques principales .....	60
III.3 Présentation du modèle .....	52
III.3.1 Géométrie de l'arbre .....	62
III.3.2 Géométrie du disque .....	62
III.4 Graphes et interprétations .....	65
III.4.1 Diagramme de Campbell .....	65
III.4.2 Influence de l'indice de fraction volumique .....	67
III.4.2.1 SUS304-Zircone.....	67
III.4.2.2 SUS304-Silicone Nitride.....	68
III.4.2.3 Comparaison des mélanges .....	69
III.4.3 Influence du rapport longueur-diamètre pour $k=0.5$ .....	70
III.4.3.1 Comparaison des mélanges .....	72
III.4.4 Influence du rapport longueur-diamètre pour différents $k$ .....	71
III.4.4.1 Comparaison des mélanges .....	72
III.5 Conclusion .....	73
Conclusion générale.....	75
Références bibliographiques .....	77

# Liste des figures

## CHAPITRE I

<b>Figure I.1.</b> Concept des matériaux à gradient de propriétés.....	20
<b>Figure I.2.</b> Exemples des matériaux FGM dans la nature .....	22
<b>Figure I.3.</b> Protection thermique .....	23
<b>Figure I.4.</b> Principaux domaines d'application des matériaux FGM .....	25
<b>Figure I.5.</b> Une buse de sortie d'eau chaude d'un réacteur nucléaire en FGM.....	26
<b>Figure I.6.</b> Produits en matériaux FGM utilisés dans l'aérospatiale .....	27
<b>Figure I.7.</b> Les différentes applications des FGM dans l'aérospatiale.....	27
<b>Figure I.8.</b> Les applications des FGM dans le domaine automobile.....	28
<b>Figure I.9.</b> Outil de coupe de métaux conventionnel et FGM.....	29
<b>Figure I.10.</b> Application du FGM dans le domaine biomédical.....	29
<b>Figure I.11.</b> Coupe transversale du modèle d'arbre FG avec protection extérieure en céramique.....	31
<b>Figure I.12.</b> Variation du module de Young à travers le rayon de la structure P-FGM.....	33
<b>Figure I.13.</b> Rotor d'une turbine à gaz.....	34
<b>Figure I.14.</b> Présentation du rotor .....	35

## CHAPITRE II

<b>Figure II.1.</b> Exemple d'un modèle éléments finis.....	39
<b>Figure II.2.</b> Représentation du disque du rotor .....	41
<b>Figure II.3.</b> Déformation de l'arbre et ses repères .....	43
<b>Figure II.4.</b> Modèle d'un palier.....	44
<b>Figure II.5.</b> Représentation d'un élément de poutre de type.....	44
<b>Figure II.6.</b> Déformation de l'arbre dans le plan XOY .....	46
<b>Figure II.7.</b> Déformation de l'arbre dans le plan ZOY .....	46
<b>Figure II.8.</b> Degrés de liberté d'un disque .....	48
<b>Figure II.9.</b> Degrés de libertés d'un élément arbre .....	51

## CHAPITRE III

<b>Figure III.1.</b> Capture d'écran géométrie .....	61
<b>Figure III.2.</b> Capture d'écran des propriétés.....	61
<b>Figure III.3.</b> Capture d'écran géométrie du disque.....	62
<b>Figure III.4.</b> Capture d'écran des propriétés.....	62
<b>Figure III.5.</b> Capture d'écran des conditions aux limites .....	63
<b>Figure III.6.</b> Model du rotor avec disque 2D.....	63
<b>Figure III.7.</b> Model du rotor avec disque 3D.....	64
<b>Figure III.8.</b> Diagramme de Campbell SUS304-zircone avec $k=0.5$ .....	65
<b>Figure III.9.</b> Diagramme de Campbell SUS304-Silicon Nitride avec $k=0.5$ .....	66
<b>Figure III.10.</b> Fréquences naturelles en fonction de l'indice de volume fraction (SUS304-Zircone) ..	67
<b>Figure III.11.</b> Fréquences naturelles en fonction de l'indice de volume fraction (SUS304-Silicon Nitride).....	68
<b>Figure III.12.</b> Fréquences naturelles en fonction de l'indice de volume fraction.....	69
<b>Figure III.13.</b> Influence de rapport longueur-diamètre sur le premiers mode (SUS304-Silicon Nitride) avec $k=0.5$ (vitesse de rotation=5000tr/min) .....	70
<b>Figure III.14.</b> Influence de rapport longueur-diamètre sur le premiers mode (SUS304-Silicon Nitride) avec différent indice de volume fraction (vitesse de rotation=5000tr/min) .....	71
<b>Figure III.15.</b> Influence de rapport longueur-diamètre sur le premiers mode (SUS304-Zircone) avec différent indice de volume fraction (vitesse de rotation=5000tr/min) .....	71

# Liste des tableaux

## CHAPITRE I

**Tableau I.1.** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal .....21

## CHAPITRE III

**Tableau III.1.** Caractéristiques de l'application .....60

**Tableau III.2.** Propriétés des matériaux utilisés .....64

## Liste des symboles

$\sigma$	Contrainte de flexion
$\varepsilon$	Déformation
$E$	Module de Young
$\Omega$	Vitesse de rotation
$u$	Le déplacement suivant la direction OX
$v$	Le déplacement suivant la direction OY
$w$	Le déplacement suivant la direction OZ
$\rho_c$	La masse volumique de la céramique
$\rho_m$	La masse volumique du métal
$R_e$	Rayon externe du disque
$R_i$	Rayon interne du disque
$h$	Épaisseur de disque
$k$	L'indice de volume fraction
$dv$	Élément de volume de l'arbre
$E_c$	Module de Young de la céramique
$E_m$	Module de Young du métal
$F_u$ et $F_w$	Les forces généralisées
$u_0(Y)$	Déplacement transversal dans le plan (XOY)
$v_0(Y)$	Déplacement longitudinal OY
$w_0(Y)$	Déplacement transversal dans le plan (ZOY)
$\Psi(Y)$	Rotation de la section droite dans le plan (ZOY)
$\theta(Y)$	Rotation de la section droite dans le plan (XOY)
$N_u$	Les fonctions de forme suivant la direction x
$N_w$	Les fonctions de forme suivant la direction z
$\{q_u\}$ et $\{q_w\}$	Les vecteurs de déplacements généralisés
$q$	Le déplacement
$\dot{q}$	La vitesse
$\{B\}$	Vecteur de déplacement
$\{B\}$	Vecteur de rotation
$\xi$	La coordonnée adimensionnelle

$E_{cR}$	Energie cinétique du rotor
$E_{cD}$	Energie cinétique du disque
$E_{cA}$	Energie cinétique de l'arbre
$E_{dR}$	Energie de déformation du rotor
$E_{dA}$	Energie de déformation de l'arbre
$[M_A]$	Matrice masse d'arbre
$[M_D]$	Matrice masse du disque
$[C_g]_A$	Matrice gyroscopique d'arbre
$[C_gD]$	Matrice gyroscopique du disque
$[C_p]$	Matrice d'amortissement visqueux due aux paliers
$[K_A]$	Matrice de rigidité de l'arbre
$[K_p]$	Matrice de rigidité des paliers
$[\dot{\phi}]$	Matrice de vitesse de rotation
$[N_u]$	Matrice des fonctions de forme suivant l'axe x
$[N_w]$	Matrice des fonctions de forme suivant l'axe z

# Introduction générale

## Introduction générale

Le monde industriel est en constante évolution où la perfection des produits est l'obsession. Cette évolution et cette perfection ne peuvent se faire sans l'avancée de la science, qui permet à l'industrie d'utiliser les résultats de la recherche scientifique, permettant ainsi de concevoir des procédés innovants et des vecteurs de développement industriel.

Les machines tournantes ont été un facteur important dans l'évolution de l'humanité depuis l'aube de l'industrie. Elles font une partie intégrante de l'industrie moderne dans la production et la conversion de l'énergie (dans un turboréacteur d'un avion, turbocompresseur automobile, turbines de bateaux ou de sous-marins, turboalternateurs des centrales thermiques et nucléaires, éoliennes...), ainsi avec les exigences de concurrence mondiale, les ingénieurs et chercheurs sont amenés face à un défi dans divers domaines où les matériaux sont considérés comme une composante de recherche prometteuse ; l'objectif est de développer des matériaux suffisants pour augmenter les performances des machines dans le but d'accroître leur rendement, de diminuer leur poids et leur bruit en les faisant fonctionner dans des gammes de vitesses de rotation très élevées sous les différentes conditions et sollicitations. Ces performances ne peuvent être atteintes avec des matériaux à base de métal à cause de leurs propriétés qui ne sont pas assez polyvalentes surtout qu'ils ont montré leurs limites face à une conception des machines sophistiquées et soumises à des contraintes plus complexes. Viennent alors les matériaux composites, malgré leur ancienneté dans le monde mais ils ont apporté quelques solutions aux défis par leurs avantages fonctionnels : légèreté, haute rigidité, résistance mécanique et chimique, excellente dureté, durée de vie prolongée, un temps de fabrication le plus court possible, une meilleure isolation thermique, phonique.

Les matériaux composites sont constitués généralement de différents matériaux aux différentes propriétés au sein d'une même pièce, généralement sous forme de plusieurs couches appelées stratifiées où ils ont présenté un échec constant dans un milieu à hautes températures. À cause de leur hétérogénéité les propriétés matérielles à travers l'interface subissent un changement brusque se présente par le phénomène de délaminage qui peut plus loin provoquer le décollement ou la rupture de l'interface qui peut conduire à des accidents graves et incontrôlables (cas de l'explosion de la navette spatiale Columbia 2003) (Gehman, 2003).

À cet effet, une nouvelle gamme de matériaux appelés matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials « FGM ») a été conçue dont l'idée a été émulée à partir de la

nature pour résoudre les problèmes d'ingénierie en éliminant le problème rencontré dans les composites conventionnels et en réduisant les contraintes thermiques. Les FGM sont une nouvelle gamme de matériaux composites fabriqués par un certain nombre de procédés, ces matériaux ont une variation graduelle des propriétés en fonction des fractions volumiques de chacun des constituants, ces propriétés varient généralement selon l'épaisseur tel que : module de Young, coefficient de Poisson, la masse volumique selon des lois régissant bien définies comme la loi de puissance P-FGM. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre.

Actuellement les voies de développement des matériaux FGM cherchent à généraliser son application de plus en plus dans les domaines de l'énergie, l'aéronautique, l'aérospatiale, l'automobile et l'industrie mécanique dont leur arrivée a ouvert de nouvelles voies en augmentant la performance des machines industrielles grâce à leurs qualités intrinsèques spécialement celles opérantes dans des milieux corrosifs et à hautes températures. Face aux problèmes rencontrés, les matériaux FGM restent les matériaux les plus recherchés, les concepteurs ont été passionnés par les FGM de type (Céramique/Métal) parce qu'un tel mélange combine entre les propriétés du métal ductile et la céramique anti corrosive dont le but était de concevoir un rotor avec une graduation des propriétés continue à travers l'épaisseur, en passant d'une face complètement métallique vers une face complètement céramique selon les conditions du fonctionnement.(Assem et al., 2020)

D'autre part l'analyse vibratoire est devenue une discipline importante afin d'éviter qu'une trop grande vibration peut engendrer des dégâts sérieux : rupture, endommagement des paliers, frottement rotor/stator, c'est ce qui oriente nos efforts visant à comprendre le comportement des rotors en FGM afin les utiliser de manière favorable et optimale. En conséquence cette connaissance nécessite des outils de modélisation plus performants, et prenant en compte les spécifications de ces matériaux, parmi eux on dispose alors la méthode des éléments finis qui présente un outil efficace pour les structures très complexes dans les machines tournantes.

Dans cette optique, le travail de mémoire proposé, est porté sur une analyse numérique de la dynamique d'un rotor avec un arbre en matériaux à gradient de propriétés (FGM), dont l'objectif est d'étudier l'influence de certains paramètres sur le comportement vibratoire du

rotor, c'est ainsi que nous avons subdivisé le manuscrit du présent mémoire en trois chapitres dont les contenus se présentent comme suit :

Le premier chapitre s'intéresse à une présentation synthétique des matériaux fonctionnellement gradués, leur concept et l'histoire de leur développement. Il évoque aussi la loi régissant sur les propriétés des FGM, ainsi que leurs avantages et inconvénients et leurs domaines d'applications. D'autre part, il présente les différents éléments des rotors et leurs définitions.

Le deuxième chapitre est réservé pour la présentation de la méthode des éléments finis, ainsi pour la modélisation des différents éléments du rotor étudié où nous avons adopté la version « p » suivant la théorie d'Euler Bernoulli.

Le troisième chapitre s'est concentré à la présentation de l'application qui nous a servis à réaliser le travail, ainsi les graphes qui présentent nos résultats discutés et interprétés.

A la fin, une conclusion générale est dressée mettant en évidence les principaux résultats obtenus dans notre mémoire.

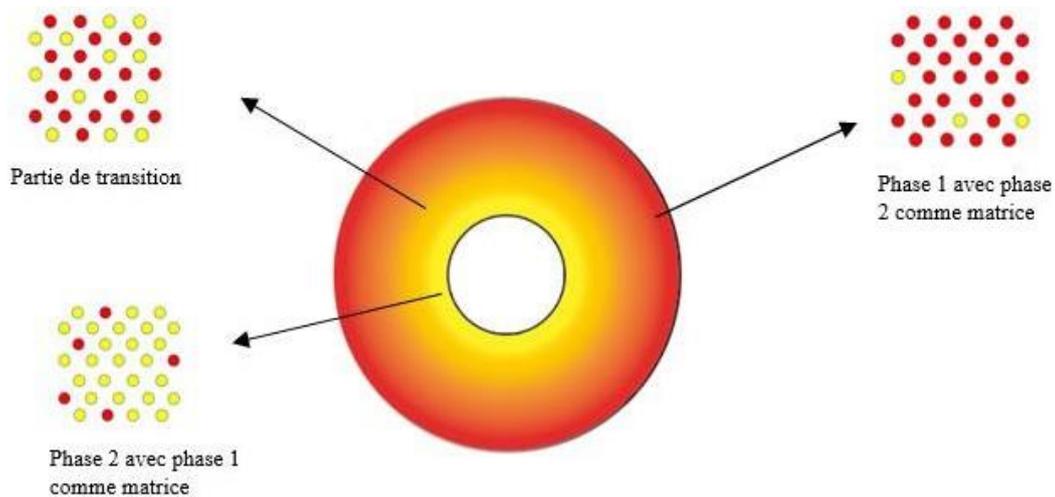
**CHAPITRE I**  
**Rotors-matériaux à gradient fonctionnel**

### **I.1 Introduction**

Les récentes technologies nécessitent d'employer des matériaux innovants caractérisés selon les exigences en termes de performances techniques, de durabilité, d'économie d'élaboration, de fiabilité et d'impact environnemental, des spécifications auxquelles les matériaux traditionnels ne répondent pas toujours. Dans ce contexte, la conception des matériaux avancés qui allient simultanément la rigidité, la résistance, une grande légèreté et une haute ténacité est un facteur très important. Pour atteindre ces objectifs, les industriels et les chercheurs ont contribué au développement d'une nouvelle génération des matériaux composites connus sous nom de « matériaux à gradient de propriétés » qui font l'objet d'importantes recherches où ce type des matériaux, a suscité beaucoup d'attention récemment en raison de leurs avantages. Des matériaux de haute performance tels que les FGMs permettent également dans le dernier du 20<sup>ème</sup> siècle de réaliser certaines innovations technologiques très étonnantes dans tous les domaines telle que les rotors des turbines.

### **I.2 Concept des matériaux fonctionnellement gradués**

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM), matériaux révolutionnaires, appartiennent à la classe des matériaux composites avancés dont lesquels la microstructure, la composition et ainsi que les propriétés mécaniques varient d'une manière continue et cohérente d'une surface à l'autre le long de l'axe de construction (Figure I.1) et dans n'importe quelle direction souhaitée, améliorant ainsi les performances et la fiabilité des matériaux et d'atténuer les concentrations de contraintes que l'on affronte dans les composites stratifiés (Popoola et al., 2016). La composition d'un matériau à gradient fonctionnel peut être définie comme "un changement de composition dans le volume de masse d'un matériau visant à mélanger et à faire varier dynamiquement les proportions des matériaux dans un volume tridimensionnel afin de produire une intégration homogène de structures fonctionnelles aux propriétés variées" (Mahmoud et Elbestawi, 2017)



**Figure. I.1.** Concept des matériaux à gradient de propriétés (Loh et al., 2018).

La gradation des propriétés du matériau diminue les contraintes résiduelles d'origines thermiques ainsi que les facteurs de concentration de contraintes. Cette variation graduelle de propriétés telles que le module d'élasticité de Young, coefficient de Poisson, le module d'élasticité de cisaillement, et la densité de la matière donne un matériau très efficace qui s'adapte aux besoins souhaité, et qui est appelé donc un matériau fonctionnellement gradué « FGM ». Ils sont fabriqués généralement à partir de constituants isotropes tels que les céramiques et les métaux, l'utilisation de la céramique et du métal ne sont pas fortuites. Ces matériaux sont choisis grâce à leurs caractéristiques exceptionnelles (Tableau I.1) qui sont énumérées comme suit :

## I.3 Propriétés des céramiques :

**I.3.1 Définition :** La céramique provient de la terre et de la roche concassée (matériaux géologiques) on distingue les céramiques argileuse et les céramiques techniques mais en s'intéresse à cette dernière.

**I.3.2 Propriétés physiques :** Les céramiques techniques, par leurs propriétés innovatrices résistent aux hautes températures et possèdent la propriété de la conduction minimale de transfert thermique.

**I.3.3 Propriétés mécaniques :** Elles dépendent des :

- ❖ Matières première utilisées.
- ❖ Méthodes de la mise en forme qui fixent les microstructures finales et déterminent la distribution des différentes phases en présence.

#### I.4 Les caractéristiques des céramiques :

Les propriétés de la céramique sont :

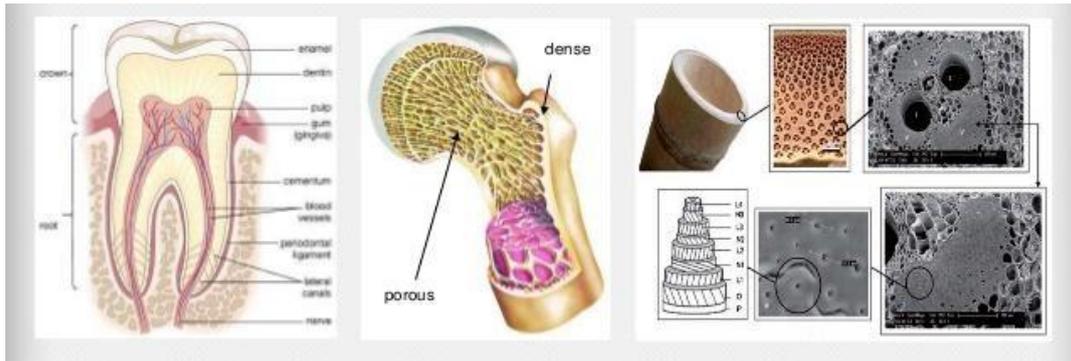
- ❖ Un module de YOUNG élevé (Liaison, covalent, ionique).
- ❖ Une dureté élevée (Abrasif, outils de coupe, surfaces de frottement qui doivent résister à l'usure, haute résistance mécanique, très bonne résistance à la chaleur, haute rigidité).
- ❖ Une très bonne résistance à la compression mais pas à la traction (Résistance à la compression = 200 MPa).

**Tableau I.1.** Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal (Elishakoff et al., 2016).

La face à haute température	Céramique	-Bonne résistance thermique ; -Bonne résistance à l'oxydation ; -Faible conductivité thermique.
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxation les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	-Bonne résistance mécanique -Conductivité thermique élevée, -Très bonne ténacité.

#### I.5 Historique des matériaux à gradient de propriétés

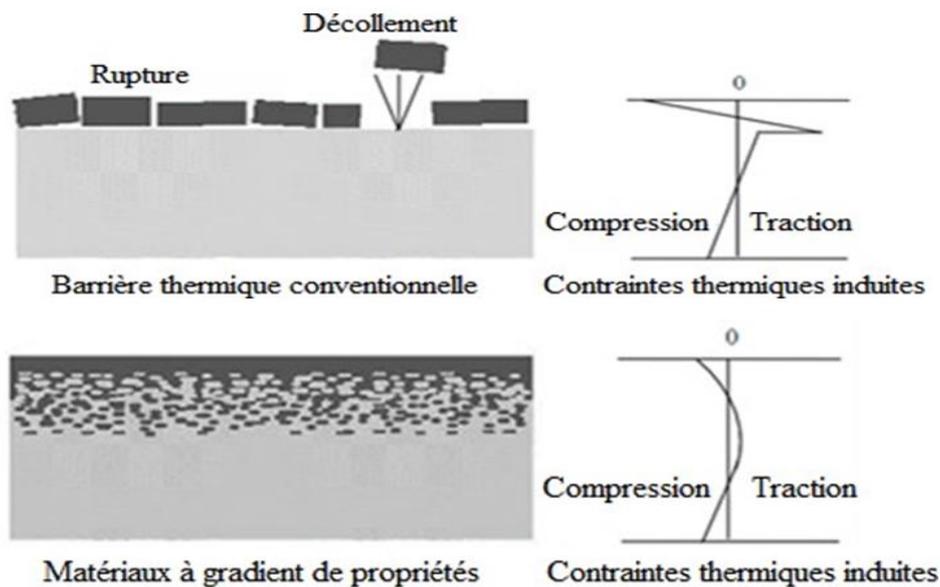
Bien que le concept des FGMs, ainsi que notre capacité à les fabriquer semblent être une innovation d'ingénierie de pointe, le concept n'est pas nouveau. Ces types de matériaux existent déjà dans la nature. À titre d'illustration, quelques exemples de FGMs naturels sont inclus dans la Figure I.2. Les os ont une classification fonctionnelle. Même nos peaux sont également graduées pour fournir une certaine ténacité, les qualités tactiles et élastiques dépendent de la profondeur de la peau et l'emplacement sur le corps. La nature donne toujours un moyen aux scientifiques, chaque fois qu'ils sont face aux problèmes technologiques (Mahamood et Akinlabi, 2017).



**Figure I.2.**Exemples des matériaux FGM dans la nature (Baghersahi, 2017).

Les matériaux à gradient de propriétés ont été développés pour la première fois au laboratoire national d'aéronautique du Japon en 1984 par Niino et ses collègues à Sendai. L'idée était de créer des matériaux qui agissent comme des barrières thermiques dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion (Koizumi, 1994). Les changements continus dans la constitution, la microstructure et même la porosité de ces matériaux conduisent à des gradients des propriétés matérielles telles que la résistance mécanique et la conductivité thermique (Koizumi, 1997). Ce nouveau matériau composite peut être utilisé pour diverses applications comme les revêtements des barrières thermiques pour les moteurs à combustion internes et les turbines à gaz (Nguyen et al., 2007).

En 1987, un projet à vaste échelle a été lancé par l'état japonais dont l'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique pour les projets aérospatiaux, capables d'éliminer la concentration de contrainte à l'interface (Abdizadeh, 1997). Dix-sept laboratoires de recherches, des entreprises et des universités possèdent participer à ce projet. Ils ont montré comment les FGM peuvent atténuer ces concentrations de contraintes en modifiant graduellement les propriétés matérielles en assurant la protection thermique que l'on trouve dans les barrières thermiques conventionnelles (Koizumi, 1997) (Figure I.3).



**Figure I.3.**Protection thermique (Houari, 2011).

Les matériaux composants les parois des structures spatiales et les murs thermiques spéciaux doivent fonctionner à des températures de surface de  $1800^{\circ}\text{C}$  et à un gradient de température de  $1300^{\circ}\text{C}$ . A cette époque, aucun matériau industriel ne pouvait résister à telles sollicitations thermomécaniques (Koizumi, 1994). Trois propriétés sont à considérer pour concevoir de tels matériaux :

- ❖ Résistance thermique, ainsi que la résistance à l'oxydation à haute température de la surface superficielle du matériau ;
- ❖ Ténacité du matériau côté basse température ;
- ❖ Relaxation effective des contraintes thermiques le long du matériau.

Durant cette période (1987-1989), les chercheurs ont réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10mm d'épaisseur et 30mm de diamètre) pouvant supporter une température maximale de 2000K (température de surface) et un gradient de température de 1000K.

Dans les années (1990-1991), l'objectif était de fabriquer des pièces de plus grandes tailles et de formes plus complexes que celles réalisées dans la première phase. Durant les années 90, les domaines d'applications des FGM s'est développé non seulement pour les matériaux de structure qui fonctionnent à haute température, mais s'est élargi aussi à d'autres divers applications (Okamura, 1991).

Le concept des FGM est non seulement l'intérêt de la conception des matériaux réfractaires performants pour les futures navettes spatiales, mais ainsi le développement de plusieurs matériaux fonctionnels, tels que les matériaux électroniques et optiques. En effet, un second projet a été lancé afin de rechercher et développer des matériaux FGM comme matériaux fonctionnels « Recherche sur les matériaux pour la conservation d'énergie avec la structure à gradient de propriétés ». Le programme a pour objectif d'appliquer la technologie des FGM afin d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie telle que l'énergie nucléaire, solaire, thermoélectrique et photovoltaïque (Attia, 2015).

### **I.6 Avantages et inconvénients des FGM**

Les matériaux fonctionnellement gradués possèdent plusieurs avantages qui peuvent les rendre intéressants et attractifs du point de vue de leur potentiel d'application, ainsi des inconvénients et/ou des problèmes apparaissent et peuvent empêcher leur usage.

#### **I.6.1 Avantages:**

Outre l'accomplissement de son objectif principal ; de fournir les différentes propriétés requises en divers surfaces et points du futur produit qui pourrait être réalisé par un simple revêtement [NAR 11] et bien d'autres soulignent plusieurs avantages supplémentaires des FGM. Ils énumèrent certains avantages provenant principalement de l'inexistence d'une interface forte FGM, tels que :

- ❖ Réduire les contraintes thermiques causées par la différence de coefficients de dilatation thermique des matériaux adoptés.
- ❖ Extension de la région fonctionnelle avant que la valeur limite de la déformation plastique soit atteinte.
- ❖ Assurer une meilleure cohésion entre les différents matériaux, par exemple le métal et la céramique.
- ❖ Absence d'une interface nette faudrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes.
- ❖ Suppression du phénomène de délaminage.
- ❖ Eliminer les singularités des contraintes à divers endroits, comme les surfaces libres, des racines de fissures, des coins, etc.
- ❖ Augmentation de la ténacité à la rupture.

## I.6.2 Inconvénients :

Le principal obstacle à une application généralisée de la FGM est la complexité de leur fabrication à cause de l'inadéquation des propriétés différentes.

Plus que la plupart des techniques de traitement des FGM sont très coûteuses.

## I.7 Domaines d'applications des matériaux à gradient de propriétés

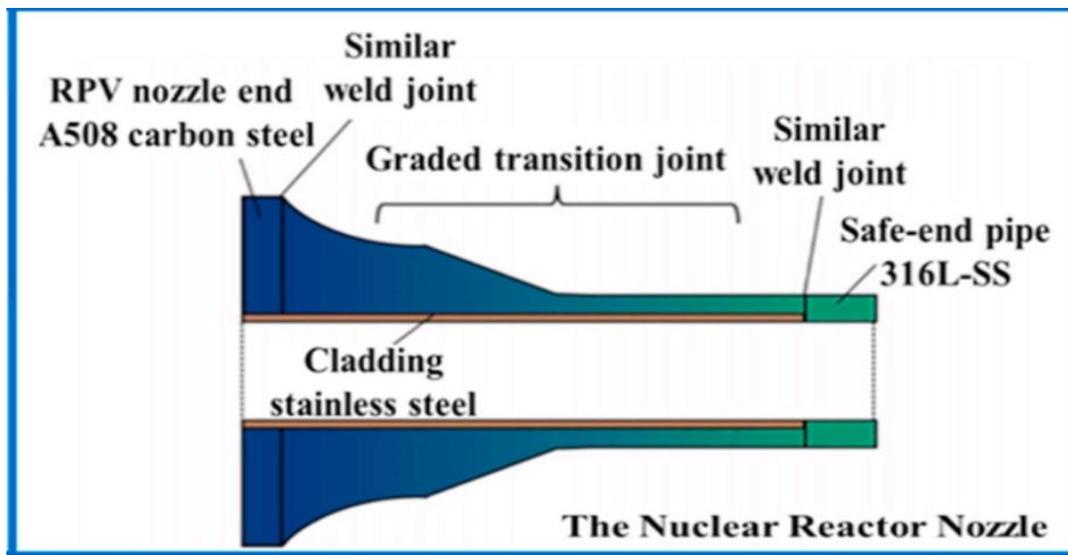
Dès l'arrivée des matériaux FGM, ils ont occupé une place particulière grâce à leurs caractéristiques exceptionnelles telles que la résistance, la rigidité, la conductivité, la résistance à l'usure et le poids léger...etc., qui les ont favorisées dans presque tous les domaines d'activités humaines (Figure I.4). Les matériaux à gradient de propriétés sont ainsi idéaux pour réduire le désaccord entre les propriétés thermomécaniques de la liaison métal-céramique qui aide à prévenir le phénomène de délaminage. Les demandes futures pour des matériaux fonctionnalisés sont dans de telles applications, où des propriétés thermiques, mécaniques et chimiques importantes sont exigées, et qui doivent être capables de supporter des conditions de travail sévères. Les matériaux à gradient de propriétés sont maintenant considérée comme l'un des matériaux les plus recherchés pour assurer un développement durable dans les différents domaines tel que :



**Figure I.4.** Principaux domaines d'application des matériaux FGM (Khathun, 2018).

### I.7.1 Domaine d'énergie

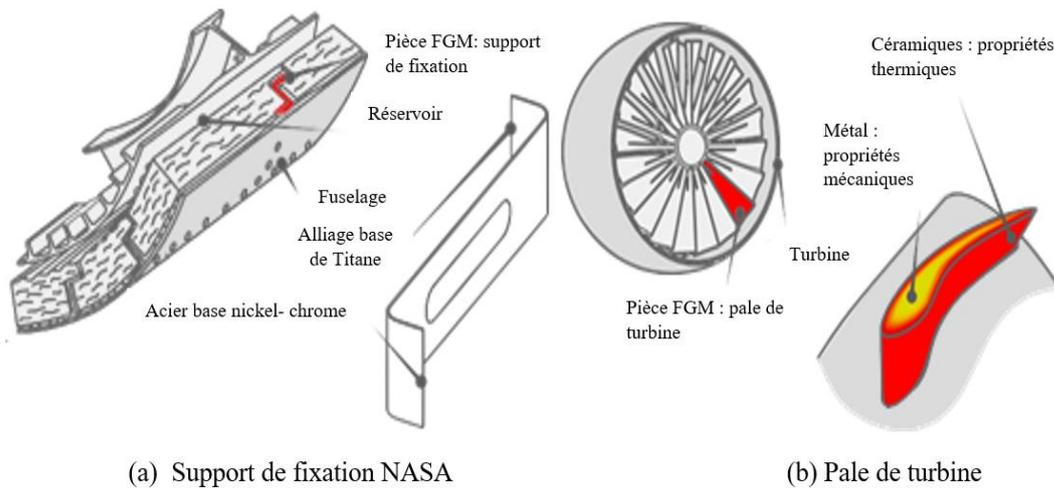
Les industries de l'énergie ont constamment besoin de différents types de matériaux à gradient de propriétés, pour améliorer l'efficacité de leurs certains équipements. Parmi les applications de ces matériaux dans l'industrie de l'énergie, citons l'entrée et la sortie des réacteurs nucléaires (Figure I.5), les convertisseurs thermoélectriques pour la conversion d'énergie, les panneaux solaires, les cellules photovoltaïques, les tubes et récipients sous pression, les électrodes graduées pour la production de combustibles à oxyde solide, les matériaux piézo-électriques à gradient fonctionnel pour les transducteurs à ultrasons, le diélectrique, les piles à combustible, les revêtements de pales et aubes de turbine, et pour les revêtements à barrière thermique (Yadroitsev et al., 2007).



**Figure I.5.** Une buse de sortie d'eau chaude d'un réacteur nucléaire en FGM (Saleh et al., 2020)

### I.7.2 Domaine aérospatiale

Le concept d'un matériau FGM a apparu dans ce domaine. Par exemple la NASA research a conçu des supports de fixation en FGM pour des navettes spatiales permettant de relier le réservoir au fuselage (Figure I.6.a). Ils ont trouvé que pendant les phases de vol, la température du fuselage peut atteindre les 1000°C alors que celle du réservoir est proche des 400°C. Donc, L'invention de ces supports de fixation en appliquant un gradient de matériau d'un alliage base Titane à un alliage base Nickel-Chrome, doit leur permettre de résister aux contraintes thermiques et à l'usure qui affectent leur durée de vie, en effet le cas est similaire en pale de turbine (Figure I.6.b) (Domack et Baughman, 2005).



**Figure I.6.** Produits en matériaux FGM utilisés dans l'aérospatial (Domack et Baughman, 2005 ; Qian et Dutta, 2003).

Il s'agit notamment des composants du moteur-fusée, des panneaux d'échange de chaleur et certaines structures, comme les réflecteurs, les boîtiers de la caméra, le bord d'attaque des missiles et les navettes spatiales. Ces matériaux sont de plus en plus utilisés dans les industries aérospatiales comme composants de véhicules spatiaux (moteur de fusée, corps des avions spatiaux...) (Figure I.7)(B. ZAOUÏ, 2021).



**Figure I.7.** Les différentes applications des FGM dans l'aérospatiale.

### I.7.3 Domaine automobile

En raison de leur coût élevé, l'utilisation des FGM est très restrictive dans les applications automobiles et n'est généralement utilisée dans les voitures que dans les pièces critiques. De nombreux composants automobiles, tels que les pistons de moteur diesel et les chemises de cylindre (phase interne céramique et phase externe métallique), les chambres de combustion, les freins de voiture de course, les arbres de transmission et les volants d'inertie, doivent être classés en termes de température, de pression ou de contrainte.

Par conséquent, les FGM avec leurs propriétés conviennent très bien à ces composants, comme le montre la figure I.8. En plus de la possibilité d'utiliser les FGM avec des propriétés graduées dans les revêtements de carrosserie automobile (Saleh et al., 2020).

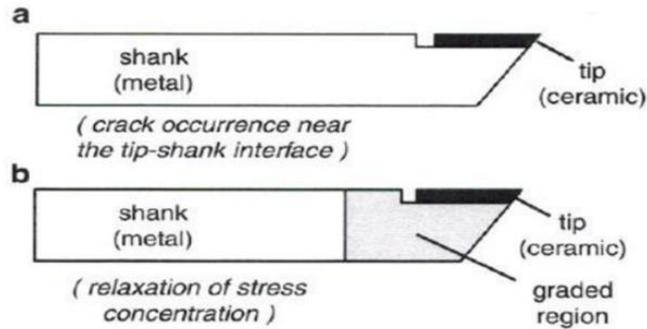


**Figure I.8.** Les applications des FGM dans le domaine automobile.

### I.7.4 Equipements et machines

Ces dernières années, les FGM sont largement utilisés dans la fabrication de nombreux composants d'ingénierie tels que les outils de coupe tels que des outils de tournage, des fraises de meulage et de fraisage ainsi que des forets hélicoïdaux pour améliorer la résistance à l'usure et à la dureté de surface afin d'augmenter la durée de vie de l'outil, la vitesse d'avance les vitesses d'usinage et diminuent le temps d'usinage, les moules de formage et les blocs moteurs de machines, car ils améliorent facilement la résistance, la résistance thermique, à l'usure et à la corrosion de ces composants. La figure I.9 montre un outil de

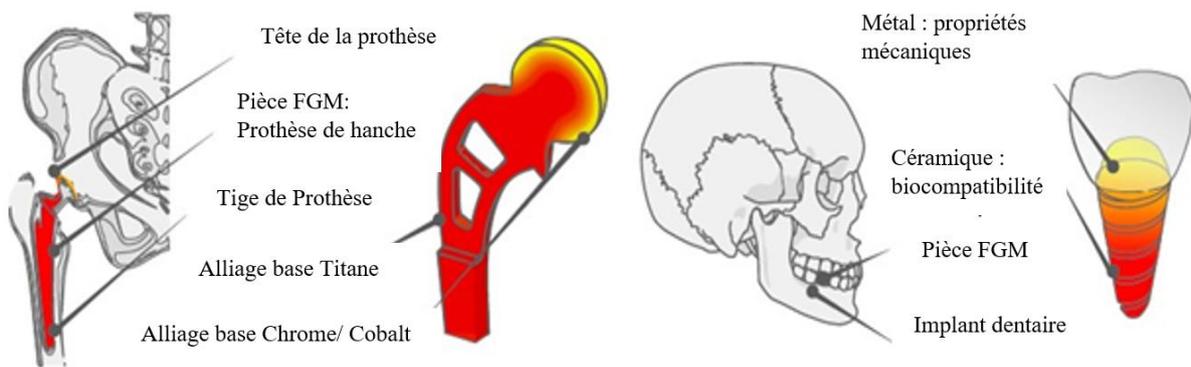
coupe composite (a) qui subit une transition abrupte des propriétés du métal vers la céramique, ce qui peut entraîner des contraintes résiduelles et une défaillance de l'outil et un outil de coupe FGM (b) avec une tige en métal et une pointe en céramique dans lequel le matériau FGM utilisé entre le métal et la céramique augmente la résistance thermique et la durée de vie prévue de l'outil.



**Figure I.9.**Outil de coupe de métaux conventionnel et FGM

### I.7.5 Domaine biomédical

La technologie des FGM est utilisée ainsi dans le secteur biomédical où elle a trouvé un champ vaste d'applications surtout dans le domaine orthopédique pour le comme les prothèses de hanche, les os artificiels et le domaine dentaire comme les implants dentaires (Figure 1.10) (F. Z. ZAOUI, n.d.)



**Figure I.10.**Application du FGM dans le domaine biomédical.

### I.7.6 Défense

La capacité des matériaux FGM à fournir des propriétés de résistance à la pénétration en empêchant la propagation des fissures est une caractéristique attrayante qui les rend très utile

dans l'industrie de la défense. Ils sont utilisés dans des applications telles que les gilets pare-balles, les plaques d'armure et récemment dans véhicules blindés.

### **I.7.7 Domaine maritime**

Les matériaux à gradient de propriétés se trouvent également dans l'industrie maritime. Ils ont été utilisés dans l'arbre porte-hélice, les dômes sonar, les cylindres de plongée.

### **I.7.8 Domaine sportif**

Une variété d'accessoires et de composants sportifs peuvent profiter de l'utilisation du FGM. Des pointes en carbure par exemple ont été fabriquées pour réduire l'usure dans les chaussures de Baseball, ainsi que dans des articles de sport de haute performance tels que les raquettes de tennis et les skis.

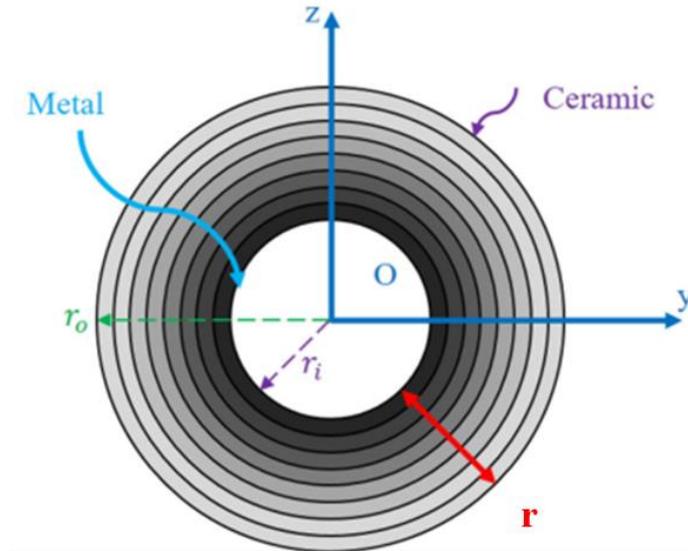
### **I.7.9 Autres applications**

On trouve également des applications dans le domaine de l'électronique tel que les fibres optiques, des cartes de circuits imprimés, les téléphones cellulaires, le génie civile (vitrage et chaussés) et dans la chimie. Ils sont également utilisés dans les batteries, les semi-conducteurs, les dispositifs optoélectroniques comme les disques audio-vidéo ; support de stockage magnétique, les dispositifs piézoélectriques et les circuits intégrés. Ainsi dans les bouteilles d'air pour la lutte anti-incendie, les portes ignifuges, les montures de lunettes et les casques. D'autres comprennent les tubes cryogéniques de l'IRM, les mallettes pour ordinateurs portables, les instruments de musique et les tables de radiographie.

## **I.8 Modèle mathématique d'homogénéisation des propriétés matérielles des FGM**

Les FGMs sont des matériaux hétérogènes constitués de deux matériaux associés aux propriétés structurelles et fonctionnelles différentes, alors qu'il est très utile d'employer des schémas d'homogénéisation pour simplifier leurs microstructures complexes non-homogènes afin de les analyser d'une manière efficace. Grâce à cette idéalisation, des solutions fermées de certains problèmes peut également être résolues, ce qui est également très utile pour l'évolution et le développement du modèle numérique de la structure FGM. Un FGM peut être définie par la variation des fractions volumiques des phases constitutives. Les propriétés de ces matériaux sont généralement supposées suivre un gradient continue à travers l'épaisseur. Plusieurs modèles mathématiques ont été développés au cours des années pour

déduire les propriétés effectives des matériaux FGM. Ces modèles peuvent être utilisés pour estimer les propriétés globales des composites sur la base de la connaissance de la composition des matériaux composants ainsi que leurs des propriétés (Elishakoff et al., 2016).



**Figure I.11.** Coupe transversale du modèle d'arbre FG avec protection extérieure en céramique (Assem et al., 2020)

Les axes  $y$  et  $z$  définissent les directions de l'épaisseur (Figure I.11). Les propriétés mécaniques du rotor à savoir son module de Young, sa densité et son coefficient de Poisson, ils varient de façon continue, dans le sens de l'épaisseur suivant l'axe  $z$  soit :  $E = E(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$ ,  $\nu = \nu(z)$ .

Les propriétés de l'arbre fonctionnellement gradué dépendent de la position radiale.

### I.8.1 Propriétés matérielles des structures P-FGM :

Cette loi est la plus fréquemment utilisée. La fraction volumique de cette classe est soumise à une fonction en loi de puissance Power Law, pour cela la variation continue du volume fraction entraîne des variations sur les propriétés des FGM, et le volume fraction du métal est défini par ((Otmani Malika, 2020):

$$V_f = \left( \frac{r-r_i}{r_o-r_i} \right)^k \quad (1.1)$$

Avec :  $r_o$  Rayon de la face extérieure.

$r_i$  Rayon de la face intérieure.

$k$  Indice de graduation Power Law du volume fraction.

La somme des fractions volumiques est toujours égale à 1 pour une position radiale comprise entre les deux surfaces extrêmes.

$$V_m + V_c = 1 \quad (1.2)$$

Les propriétés du matériau FGM sont données selon la loi de puissance (Power Law) (1.3) en fonction de la graduation fonctionnelle du volume fraction pour la masse volumique. La céramique et à l'extérieur et le métal à l'intérieur.

$$P_z = [P_c - P_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + P_m \quad (1.3)$$

$$\rho(z) = [\rho_c - \rho_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + \rho_m \quad (1.4)$$

$$E(z) = [E_c - E_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + E_m \quad (1.5)$$

$$v(z) = [v_c - v_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + v_m \quad (1.6)$$

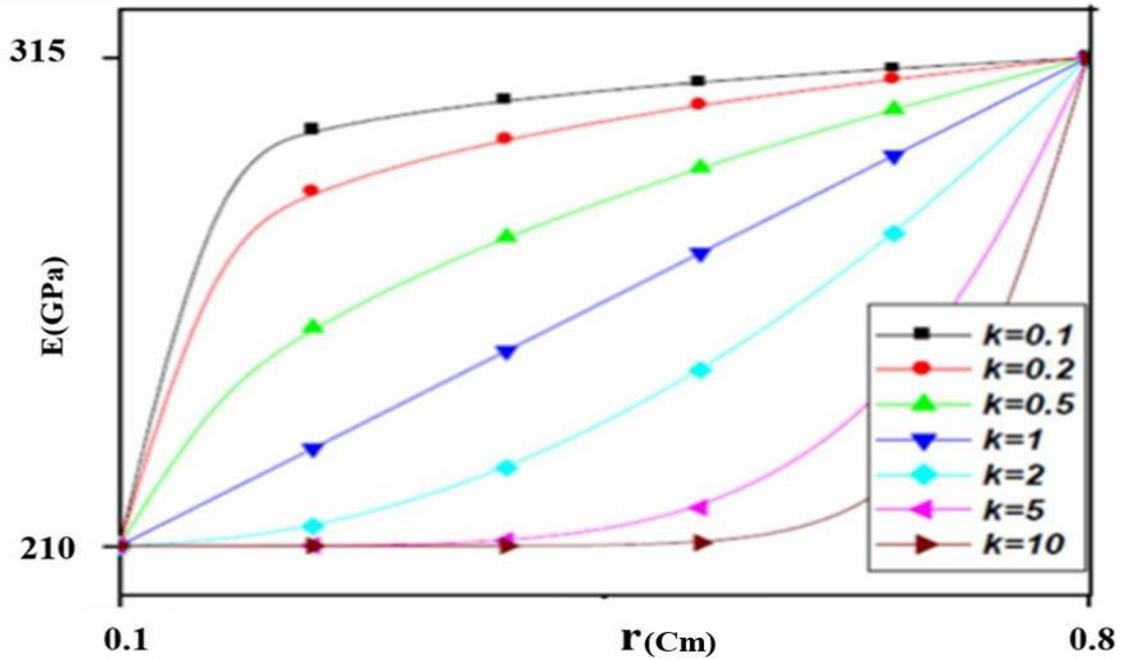
La somme des fractions de volume de tous les matériaux constitutifs fait l'unité :

$$\Sigma V_j = 1 \quad (1.7)$$

Ainsi, le module de Young de ces structures est exprimé par :

$$E(z) = V(z)E_1 + [1 - V(z)]E_2 \quad (1.8)$$

La variation des propriétés des matériaux FG peut être observée sur la courbe des figure (I.12) qui montre la variation du module de Young de l'arbre. Ces propriétés sont fonction de l'indice de graduation volumique fractionnaire qui peut varier selon le rayon de l'arbre selon la loi de puissance.

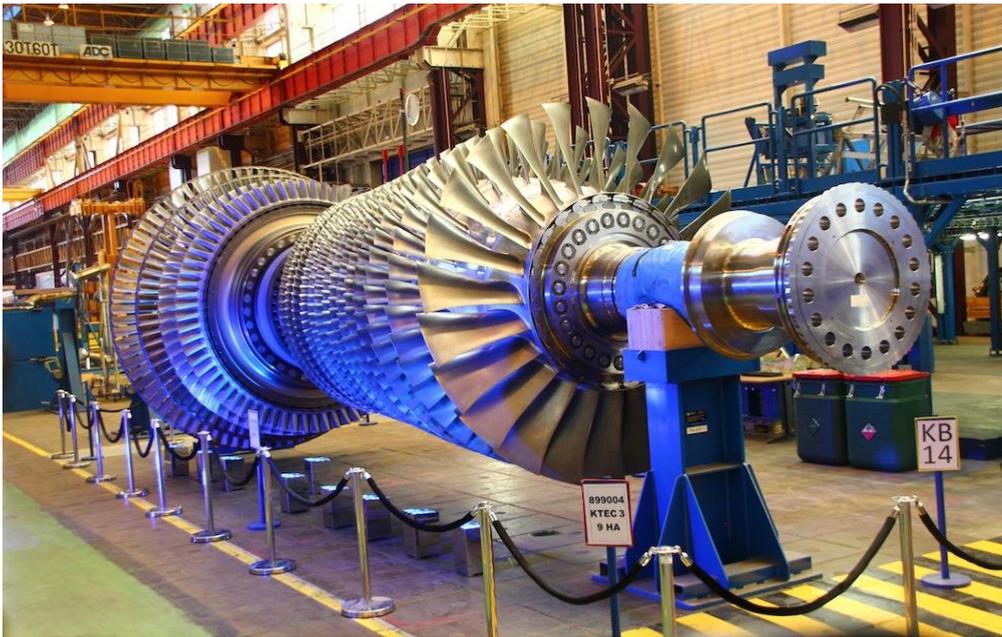


**Figure I.12.** Variation du module de Young à travers le rayon de la structure P-FGM (Otmani Malika,2020)

Nous remarquons d'après la Figure (I.12) que le module de Young décroît dans la direction inférieure de l'extrémité de l'arbre ( $k > 1$ ), et s'accroît en allant vers l'extrémité supérieure ( $k < 1$ ) et la variation de module de Young devient linéaire pour  $k = 1$ . On constate aussi que l'arbre devient plus résistant en raison de l'augmentation de la valeur de son module de résistance, si on augmente bien sûr, le pourcentage de la céramique dans l'arbre, et vice versa : l'arbre devient moins résistant si son module de Young est faible, et ceci est dû à la diminution de la quantité de la céramique et l'augmentation de celle du métal (Otmani Malika,2020).

### I.9 Définition du rotor :

Le terme rotor est utilisé dans plusieurs domaines. La plupart du temps, il spécifie la partie rotative d'une machine, électrique ou mécanique, interagissant avec la partie statique (fixe) appelée le stator. Le rôle principal des rotors est de transformer un mode d'énergie selon les applications auxquelles ils sont destinés, Le champ d'application des rotors est vaste ; (centrale électrique et hydraulique comme les turbines, l'aéronautique, l'industrie pétrolière, ...etc.) (Hadj Said, 2020)



**Figure I.13.** Rotor d'une turbine à gaz

### **I.10 Classification des rotors :**

Suivant les éléments de base des rotors On peut les classés selon deux paramètres.

#### **I.10.1 Les paramètres géométriques :**

- a. Rotor arbre long :** les dimensions de l'arbre sont plus grandes à celui de disque. Il est bien adapté pour modéliser les rotors des différentes machines tournantes industrielles (turbine, générateur... etc.)
- b. Rotor type disque arbre :** les dimensions du disque sont plus grandes à celles de l'arbre.
- c. Rotor à aubes :** ce type est bien adapté pour étudier le comportement vibratoire de quelques rotors ayant une structure aubage (hélicoptère, aérogénérateur, turboréacteur, soufflerie industrielle, ...etc.).
- d. Rotor libre :** ce type de rotor est caractérisé par l'absence des suspensions (paliers, support).

#### **I.10.2 Les paramètres mécaniques :** on distingue les modèles suivants

##### **a. Rotor rigide :**

Un rotor peut être considéré comme rigide lorsqu'il tourne à des vitesses sensiblement inférieures à la vitesse critiques associées à la flexion de l'arbre.

**b. Rotor flexible :**

Un rotor est généralement considéré comme étant souple ou flexible quand il fonctionne à proximité ou au-dessus de sa fréquence naturelle (vitesse critique) (MELIH, 2017)

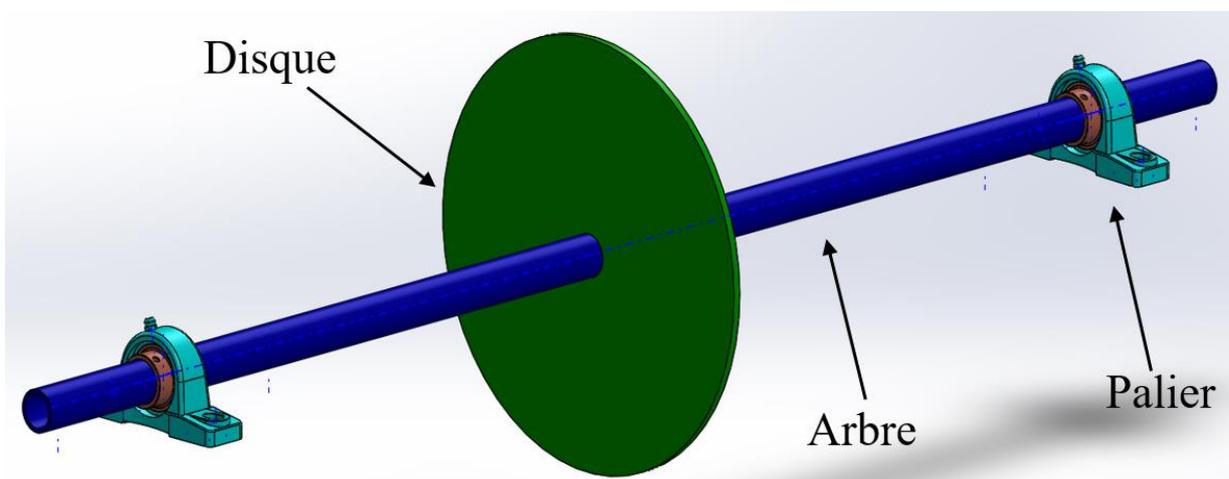
**I.11 Les composants de base d'un rotor :**

Un rotor se compose de plusieurs éléments de base sont les suivants (l'arbre, disque et paliers, le balourd qui ne peut pas être complètement évité doit aussi être pris en compte).

- a. **L'arbre :** c'est l'élément principal du rotor (arbre de transmission ou axe intermédiaire), il peut être rigide ou flexible et cela dépend de ses propriétés mécaniques du matériau de fabrication
- b. **Disque :** le disque peut être rigide ou déformable. il est représenté sous plusieurs formes géométriques.
- c. **Palier :** le palier est considéré comme support du rotor ou l'élément de guidage en rotation de l'arbre, il peut être rigide ou flexible (isotrope ou anisotrope).

L'arbre rotor loge dans un logement qui le sépare de la surface du palier. Pour ne pas avoir des frottements agressifs entre les deux surfaces, on procède à la lubrification par l'huile ou la graisse.

- d. **Balourd :** le balourd est une masse excentré d'un rotor, il se répartit le long du rotor dont la résultante de cette répartition peut être assimilée à une ou deux masses (Hadj Said, 2020).



**Figure I.14.**Présentation du rotor

### **I.12 Conclusion**

Afin d'analyser ou d'étudier un rotor à gradient de propriétés, il est nécessaire de comprendre le concept de base du matériau utilisé ; dans ce chapitre, nous avons vu une brève introduction, puis nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », ensuite le concept et l'histoire de leur développement, en effet leurs divers domaines d'application, ainsi que leurs avantages et inconvénients. Nous avons présenté encore le modèle d'homogénéisation P-FGM régissant la variation des propriétés matérielles du matériau "module de Young, coefficient de Poisson et masse volumique" à travers l'épaisseur de l'arbre fonctionnellement gradué, Enfin nous avons présenté les différents éléments du rotor.

**CHAPITRE II**  
**Formulation par la méthode des éléments**  
**Finis**

### II.1 Introduction

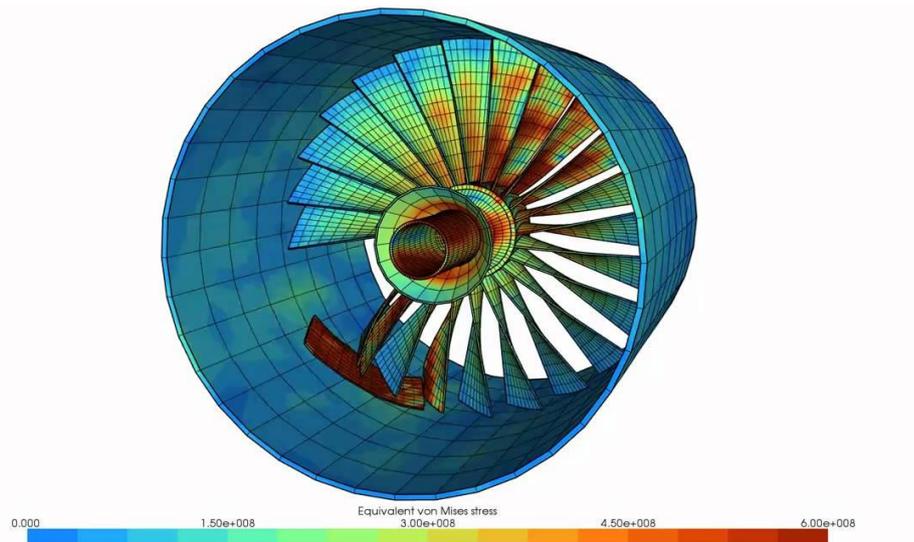
L'étude ou l'analyse des vibrations n'est pas une science récente et pourtant elle connaît depuis quelques années un regain d'intérêt pour des besoins de conception et de dimensionnement afin de répondre aux meilleures conditions de fonctionnement, de sécurité et d'économie. L'analyse dynamique du rotor, repose en premier lieu sur le dégagement d'un modèle mathématique adéquat. Les ingénieurs sont souvent amenés à développer un modèle mathématique qui décrit le problème de la manière la fiable possible. Le développement du modèle est généralement basé sur quelques postulats et plusieurs hypothèses simplificatrices pour conduire à des équations gouvernantes qui généralement des équations différentielles avec des conditions aux limites ajoutées. Un modèle éléments finis est le modèle le plus sûr vu la complexité du problème, c'est pour cette raison que nous avons l'adopté.

### II.2 Définition de la méthode des éléments finis

Connue depuis les années 1950, la méthode des éléments finis a vu son apparition pour le calcul de contraintes et n'a cessé de se développer. Aujourd'hui, son champ d'application dépasse le cadre du génie mécanique, vers le dimensionnement des éléments de génie civil par exemple. Désormais, elle est utilisée pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluides ou de transferts de chaleur...

Dans le domaine du calcul des structures, la M.E.F. est une technique à caractère pluridisciplinaire qui met en œuvre des connaissances relevant de plusieurs disciplines de base telles que la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée.

La M.E.F est basée sur une décomposition du domaine dans lequel on désire effectuer la simulation en sous-domaines de forme géométrique simple appelés 'éléments finis' pour lesquels on procède à des approximations nodales des champs de déplacements ou de contraintes qui prennent en général la forme de fonctions polynomiales. L'ensemble de ces éléments constitue ce que l'on appelle le maillage du domaine. Ces éléments sont liés par un nombre fini de conditions de continuité, exprimées en certains points communs à plusieurs éléments appelés 'nœuds' (La et al., 2014).



**Figure II.1.** Exemple d'un modèle éléments finis

### II.3 Domaines d'applications de la MEF :

Les principaux domaines d'application de la MEF sont au nombre de trois :

- Problèmes d'équilibre et statique : dans lequel le comportement du système ne varie pas avec le temps,
- Problèmes de dynamique et de stabilité (valeurs propres) : ce sont des extensions des problèmes d'équilibres pour lesquelles des valeurs spécifiques ou critiques de certains paramètres sont déterminés,
- Problème de propagation : ils concernent les problèmes ou les phénomènes dont le comportement est dépendant du facteur temps, (Ellouze, 2012)

### II.4 Modélisation par la méthode des éléments finis en générale :

Le calcul par éléments finis a incité beaucoup de scientifiques à développer leurs recherches sur cette méthode, elle est basée sur deux différents types de versions et leurs combinaisons qui sont :

**Versión h** : dans cette version le nombre de fonction de forme est fixé pour chaque élément et les fonctions de formes sont des polynômes linéaires.

**Versión p** : appelée aussi méthode des éléments finis hiérarchique-MEFH, les degrés des fonctions polynomiales peuvent être augmenté tout en gardant la taille de la maille constante, généralement le degré polynomial est noté par "P" cette version est plus simple et sa convergence est plus rapide.

**Version h-p** : elle est effectivement la combinaison des deux concepts précédents, sa convergence est maintenant recherchée en affinant simultanément le maillage et en augmentant le degré des éléments (Hadj Said, 2020).

## II.5 Calcul des énergies des différents composants du rotor :

L'arbre du rotor est déformable, il est caractérisé par une énergie cinétique et une énergie de déformation. Le disque est rigide, il est caractérisé seulement par son énergie cinétique (Hadj Said, 2020).

### II.5.1 Vitesse d'un point de la section droite de l'arbre :

Le repère mobile d'un arbre en rotation possède en général trois composantes de vitesse Et sa matrice vitesse de rotation est définie par  $[\dot{\phi}]$  :

$$[\dot{\phi}] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Avec :

$\Omega_1$  Vitesse de rotation autour de l'axe OX

$\Omega_2$  Vitesse de rotation autour de l'axe OY

$\Omega_3$  Vitesse de rotation autour de l'axe OZ

La rotation de l'arbre s'effectue autour de l'axe OY et la matrice vitesse de rotation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{On pose } \Omega = \Omega_2 \quad (\text{II.2})$$

$$[\dot{\phi}] = \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Le vecteur position  $\{B\}$  est donné par :

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

$u$  Le déplacement suivant la direction OX

$v$  Le déplacement suivant la direction OY

$w$  Le déplacement suivant la direction OZ

### II.5.2 Energie cinétique de l'arbre :

L'énergie cinétique est définie par l'expression suivante :

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \int_v \rho(r) \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \int_v \rho(r) \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (\text{II.5})$$

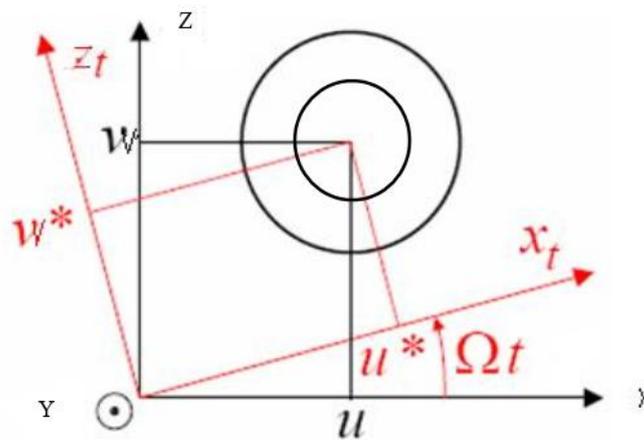
Avec  $\rho(r) = [\rho_c - \rho_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + \rho_m$

### II.5.3 Energie de déformation de l'arbre :

L'énergie de déformation ne dépend que des contraintes et donc de la déformée de l'arbre.

Dans ce calcul, le disque est supposé par hypothèse comme rigide, seules les déformations dues à la flexion de l'arbre sont prises en compte, l'arbre pour ce rotor est modélisé par une poutre d'Euler Bernoulli

Soient  $u^*(y, t)$  et  $w^*(y, t)$  les déplacements des points de la ligne moyenne de l'arbre dans le repère tournant voir Figure II.2



**Figure II.2.** Déformation de l'arbre et ses repères

Les projections d'un point de la section droite déformée sur le repère fixe :

$$u^* = u \cdot \cos.\Omega.t + w \cdot \sin.\Omega.t \quad (\text{II.6})$$

$$w^* = -u \cdot \sin.\Omega.t + w \cdot \cos.\Omega.t \quad (\text{II.7})$$

La déformation linéaire en flexion d'un point de l'arbre de coordonnées  $x$  et  $z$  dans le repère lié à l'arbre est donnée par (Bouzidi et al., 2020) :

$$\epsilon_y = x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (\text{II.8})$$

L'énergie de déformation est donnée par :

$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_v \epsilon_y \cdot \sigma_y \cdot dv \quad (\text{II.9})$$

$\sigma$  : contrainte de flexion

$dv$  : élément de volume de l'arbre.

La relation entre contrainte et déformation est :

$$\sigma_y = E(r) \cdot \epsilon_y \quad (\text{II.10})$$

$E$  : Module de Young donné par :  $E(r) = [E_c - E_m] \left( \frac{r-r_m}{r_c-r_m} \right)^k + E_m$

$\epsilon_y$  : Déformation linéaire

L'énergie de déformation  $E_{dA}$  prend la forme :

$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_v E(r) (\epsilon_y^2) dv \quad (\text{II.11})$$

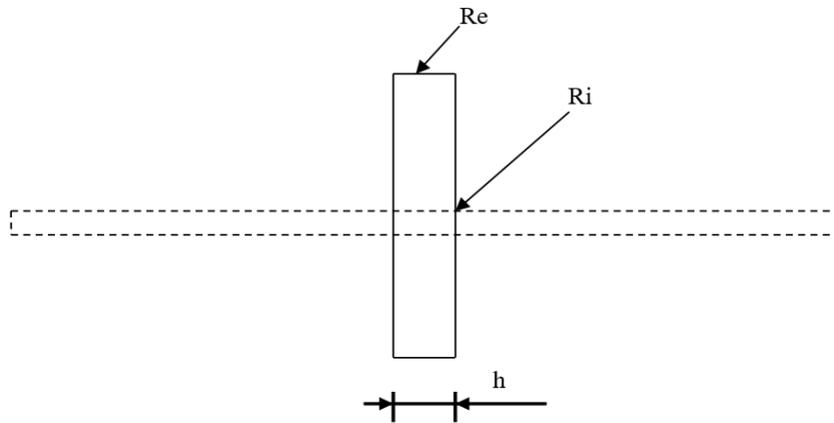
$$E_{dA} = \frac{1}{2} \int_0^L E(r) (\epsilon_y^2) ds dy \quad (\text{II.12})$$

Finalement :

$$E_{dA} = \pi \int_0^L E(r) r^3 \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dr dy \quad (\text{II.13})$$

### II.5.4 Energie cinétique du disque :

Le disque d'épaisseur « h » de diamètre extérieur « Re » et diamètre intérieur « Ri » supposé rigide est caractérisé seulement par son énergie cinétique Figure II.3



**Figure II.3.** Représentation du disque du rotor

L'expression de l'énergie cinétique du disque est donnée par analogie avec celle de l'arbre et qui peut s'écrire :

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv \quad (\text{II.14})$$

Avec  $\rho$  la masse volumique du matériau du disque.

### II.5.5 Paliers :

Tous les arbres tournants sont supportés par des paliers. Ces paliers sont des paliers hydrodynamiques de types rigides créent des forces sur l'arbre.

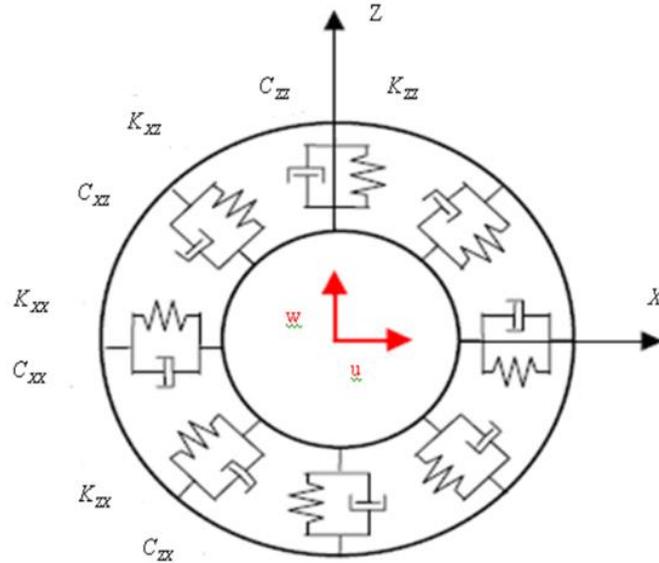
La modélisation des paliers est représentée sur la Figure (II.4)

Ou on note :

La raideur suivant l'axe OY  $K_{yy} = K_{p22}$  (II.15)

La raideur des termes croisés  $K_{xz} = K_{zx} = K_{p21} = K_{p12}$  (II.16)

l'axe OX  $K_{xx} = K_{p11}$  (II.17)



**Figure II.4.** Modèle d'un palier

Le travail virtuel des forces de raideurs et d'amortissements est défini par

$$dW = -K_{P11}u\delta u - K_{P12}w\delta u - K_{P21}w\delta w - K_{P22}u\delta w - C_{P11}\dot{u}\delta u - C_{P12}\dot{w}\delta u - C_{P21}\dot{w}\delta w - C_{P22}\dot{u}\delta w \quad (\text{II.18})$$

$$dW = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (\text{II.19})$$

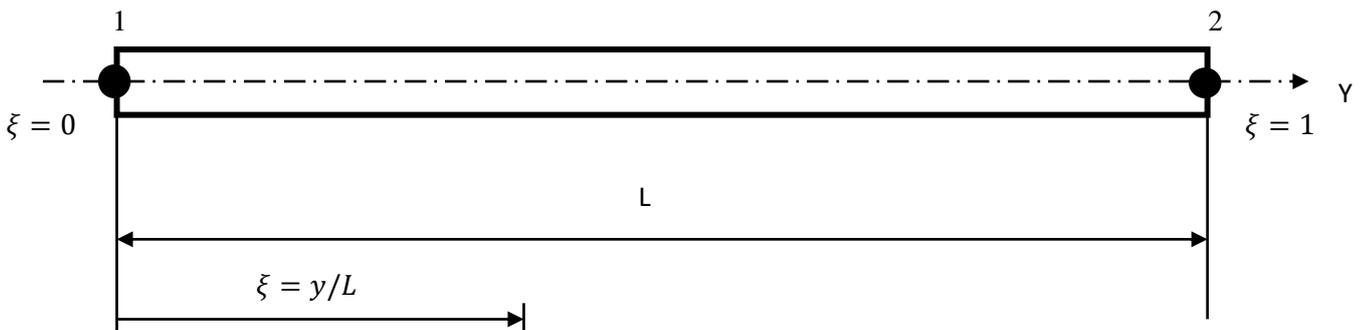
Avec :  $F_u$  et  $F_w$  sont les forces généralisées

Sous la forme matricielle nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{P11} & K_{P12} \\ K_{P21} & K_{P22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{P11} & C_{P12} \\ C_{P21} & C_{P22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{w}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

## II.6 Modélisation par éléments finis :

Pour cette étude, on utilise une modélisation type éléments finis hiérarchiques trigonométriques version-p, l'arbre est modélisé par 10 éléments finis prenons en considération un seul élément représenté sur la figure II.5 par deux nœuds (1 et 2).



**Figure II.5.** Représentation d'un élément de poutre de type (Hadj Said, 2020).

La coordonnée adimensionnelle  $\xi$  est reliée au système d'axes globales  $(0, x, y)$  par la relation :

$$\xi = \frac{y}{L} \quad (\text{II.21})$$

$$\text{Avec : } 0 \leq \xi \leq 1$$

Dans le but d'aborder cette étude, nous avons fixé les hypothèses suivantes, en supposant initialement que les sections planes et perpendiculaires à la fibre moyenne restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne pendant et après la déformation (cisaillement nul).

On se place dans le cadre de petites perturbations de déplacement de rotation et de déformation linéaire.

Les degrés de liberté de chaque nœud sont choisis de manière à représenter les hypothèses cinématiques d'Euler Bernoulli.

### II.6.1 Champs des déplacements

Le champ de déplacement d'un point M de la section droite de l'arbre est défini suivant les hypothèses posées ci-dessus.

$$\begin{cases} u(X, Y, Z) = u_0(Y) \\ v(X, Y, Z) = v_0(Y) + \Psi(Y) + \theta(Y) \\ w(X, Y, Z) = w_0(Y) \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

Avec :

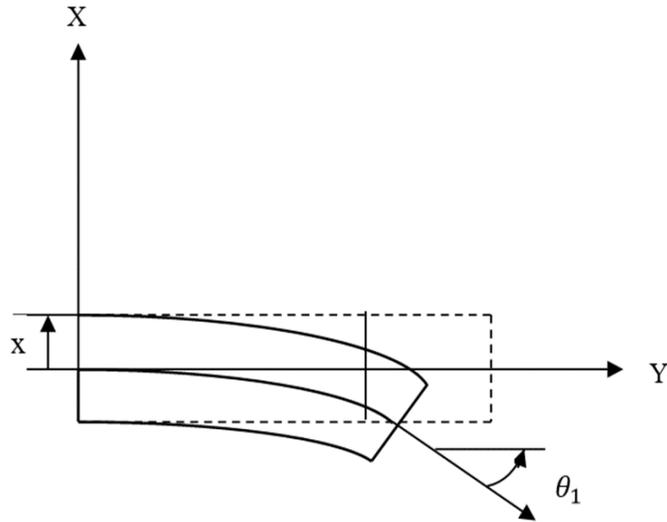
$u_0(Y)$  : Déplacement transversal dans le plan (XOY).

$v_0(Y)$  : Déplacement longitudinal OY.

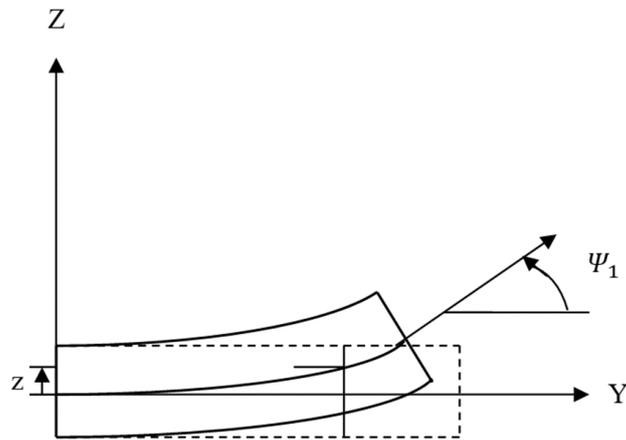
$w_0(Y)$  : Déplacement transversal dans le plan (ZOY).

$\Psi(Y)$  : Rotation de la section droite dans le plan (ZOY).

$\theta(Y)$  : Rotation de la section droite dans le plan (XOY).



**Figure II.6.** Déformation de l'arbre dans le plan XOY



**Figure II.7.** Déformation de l'arbre dans le plan ZOY

Dans le cas des hypothèses d'Euler Bernoulli, les rotations  $\theta$  et  $\Psi$  s'expriment en fonction de  $u_0$  et  $w_0$

$$\theta(Y) = -u_{0,Y} \quad (\text{II.23})$$

$$\Psi(Y) = w_{0,Y} \quad (\text{II.24})$$

Pour une flexion dominante ( $v_0 = 0$ ), le déplacement s'exprime par :

$$v(X, Y, Z) = Zw_{0,Y} - Xu_{0,Y} \quad (\text{II.25})$$

### II.6.2 Fonctions de forme

Les fonctions de forme utilisées sont des fonctions de forme hiérarchique trigonométrique définies p.

$$N \begin{cases} f_1(\xi) = 2\xi^3 - 2\xi^2 + 1 \\ f_2(\xi) = \xi^3 - 2\xi^2 + \xi \\ f_3(\xi) = -2\xi^3 + 3\xi^2 \\ f_4(\xi) = \xi^3 - \xi^2 \\ f_{r+4}(\xi) \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

$$f_{r+4}(\xi) = \delta r [-\xi + (2 + (-1)^r)\xi^2 - (1 + (-1)^r)\xi^3] + \sin \delta r \xi \quad (\text{II.27})$$

$$\delta r = r\pi$$

$$r = 1, 2, 3 \dots$$

Les fonctions de forme qui agissent aux deux nœuds sont :

$$f_1(\xi), f_2(\xi), f_3(\xi), f_4(\xi) \quad (\text{II.28})$$

Les fonctions de forme qui agissent à l'intérieur de l'élément arbre (entre les nœuds) sont :

$$f_{r+4}(\xi) \quad (\text{II.29})$$

Les déplacements  $u_0(\xi)$  et  $w_0(\xi)$  peuvent s'écrire:

$$u_0(\xi) = \sum_{i=1}^{PF} X_i f_i(\xi) = [N_u] \{q_u\} \quad (\text{II.30})$$

$$\{q_u\}^T = \{X_1, X_2, X_3 \dots X_{P_x}\}^T \quad (\text{II.31})$$

$$w_0(\xi) = \sum_{i=1}^{PF} Z_i f_i(\xi) = [N_w] \{q_w\} \quad (\text{II.32})$$

$$\{q_w\}^T = \{Z_1, Z_2, Z_3 \dots Z_{P_z}\}^T \quad (\text{II.33})$$

$N_u$  : Les fonctions de forme suivant la direction x.

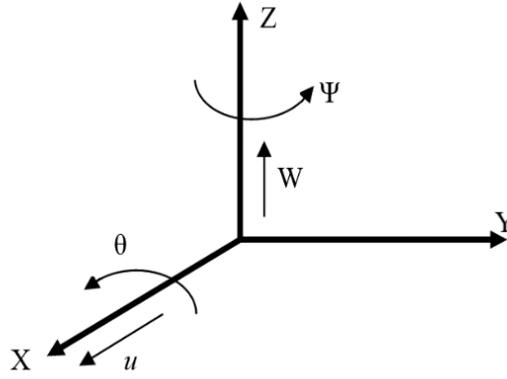
$N_w$  : Les fonctions de forme suivant la direction z.

$q_u$  et  $q_w$  Représentent les vecteurs de déplacements généralisés.

$$\{q\} = \{q_u, q_w\}^T \quad (\text{II.34})$$

## II.7 Modélisation par éléments finis du disque :

L'étude par la méthode des éléments finis hiérarchique trigonométriques présentée ici concerne le cas le plus répandu d'un disque symétrique et rigide, on modélise ce disque par un nœud possédant quatre degrés de libertés figure II.8



**Figure II.8.** Degrés de liberté d'un disque

Ces quatre degrés de libertés sont modélisés par deux déplacements  $u$ ,  $w$  et par deux rotations  $\theta$  et  $\Psi$

### II.7.1 Détermination des matrices

Les matrices masse, gyroscopique sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique du disque donnée par la relation (II.14) suivante :

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv$$

Après intégration, l'expression de l'énergie cinétique prend la forme suivante.

$$E_{CD} = \frac{1}{2} \rho S e \left( \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} \right) + \rho S e \Omega \left( \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} \right) \quad (\text{II.35})$$

Avec  $\{B\}$  le vecteur déplacement exprimé par les fonctions de forme, le disque est placé au nœud  $\xi = 1$

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u_0(y, t) \\ \theta_0(y, t) \\ w_0(y, t) \\ \psi_0(y, t) \end{Bmatrix} = N(\xi = 1) q(t) \quad (\text{II.36})$$

#### II.7.1.1 Matrice masse $[M_D]$ :

Le premier terme de la relation (II.14) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse.

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2} \rho \int_v \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv \quad (\text{II.37})$$

L'énergie cinétique du disque peut s'écrire sous la forme suivante :

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e \left( \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} \right) \quad (\text{II.38})$$

L'énergie cinétique du disque exprimée par les fonctions de forme :

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e(\{\dot{q}\}^T [N]^T [N] \{\dot{q}\}) \quad (\text{II.39})$$

En introduisant les deux plans on obtient :

$$E_C(M_D) = \frac{1}{2} \rho S_D e(\{\dot{q}_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{\dot{q}_u\}) + \frac{1}{2} \rho S_D e(\{\dot{q}_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{\dot{q}_w\}) \quad (\text{II.40})$$

$$[M_{Du}] = \rho S_D e([N_u]^T [N_u]) \quad (\text{II.41})$$

$$[M_{Dw}] = \rho S_D e([N_w]^T [N_w]) \quad (\text{II.42})$$

La matrice masse globale est donnée par :

$$[M_D] = \begin{bmatrix} [M_{Du}] & 0 \\ 0 & [M_{Dw}] \end{bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

Avec  $[M_{Du}]$  la matrice masse dans la direction ox et  $[M_{Dw}]$  la matrice masse dans la direction oz, ces deux composantes de matrice peuvent être exprimées par les fonctions de formes

$$[M_D] = \begin{bmatrix} \rho S_D e([N_u]^T [N_u]) & 0 \\ 0 & \rho S_D e([N_w]^T [N_w]) \end{bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

### II.7.1.2 Matrice gyroscopique $[C_{gD}]$ :

Le deuxième terme de la relation (II.14) de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique du disque

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (\text{II.45})$$

Substituons la matrice des vitesses et le vecteur déplacement par leurs valeurs dans l'expression de l'énergie cinétique on obtient :

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (\text{II.46})$$

$$E_C(C_{gD}) = \rho \int_v \{\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w}\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (\text{II.47})$$

$$E_c(C_{gD}) = \rho \int_v \{-\Omega \dot{w} \quad 0 \quad \Omega \dot{u}\} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} dv \quad (\text{II.48})$$

$$E_c(C_{gD}) = \rho \int_v \{-\Omega \dot{w}u + \Omega \dot{u}w\} dv \quad (\text{II.49})$$

$$E_c(C_{gD}) = \rho \Omega \int_v \{-\dot{w}u + \dot{u}w\} dv \quad (\text{II.50})$$

L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_c(C_{gD}) = \rho \Omega \int_v (-[N_u]\{q_u\}[N_w]^T \{\dot{q}_w\}^T + [N_w]\{q_w\}[N_u]^T \{\dot{q}_u\}^T) dv \quad (\text{II.51})$$

Appliquons les équations de Lagrange aux termes de l'énergie cinétique pour déterminer l'expression dessous matrices gyroscopiques dans les plans OXY et OXZ.

1°/Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_u\}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_u\}} = \rho \int_v \left( \frac{d}{dt} ([N_w]\{q_w\}[N_u]^T) + [N_u][N_w]^T \{\dot{q}_w\}^T \right) dv \quad (\text{II.52})$$

Transformation par les coordonnées adimensionnelles

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_u\}} = 2\rho S_D e \Omega \left( \frac{d}{dt} ([N_u]^T [N_w]) \{\dot{q}_w\} \right) \quad (\text{II.53})$$

2°/Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_w\}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_w\}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_w\}} = \rho \Omega \int_v \left( \frac{d}{dt} (-[N_u]\{q_u\}[N_w]^T) - [N_w]\{\dot{q}_u\}^T [N_u]^T \right) dv \quad (\text{II.54})$$

Transformation par les coordonnées adimensionnelles

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_w\}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_w\}} = -2\rho S_D e \Omega \left( \frac{d}{dt} (-[N_u][N_w]^T) \{\dot{q}_u\} \right) \quad (\text{II.55})$$

En posant :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_u\}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_u\}} = 2\rho S_D e \Omega \left( \frac{d}{dt} ([N_w][N_u]^T) \{\dot{q}_w\} \right) = C_{gD1} \quad (\text{II.56})$$

Et :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_w\}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_w\}} = -2\rho S_D e \Omega \left( \frac{d}{dt} (-[N_u][N_w]^T) \{\dot{q}_u\} \right) = C_{gD2} \quad (\text{II.57})$$

Et la matrice gyroscopique du disque peut s'écrire se mettre sous la forme.

$$[C_{gD}] = \begin{bmatrix} 0 & [C_{gD2}] \\ [C_{gD1}] & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.58})$$

### II.8 Modélisation par éléments finis de l'arbre :

La modélisation par élément finis hiérarchique trigonométrique concerne un arbre symétrique et déformable à deux nœuds figure (II.9) et pour chaque nœud quatre degrés de liberté

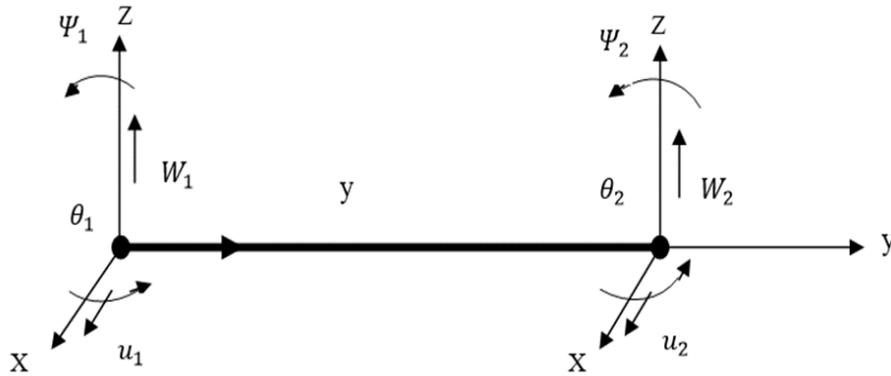


Figure II.9. Degrés de libertés d'un élément arbre

Soit  $q$  le vecteur des déplacements aux nœuds :

$$q = [u_1, w_1, \theta_1, \Psi_1, u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2]^T \quad (\text{II.59})$$

Pour deux déplacements  $u$  et  $w$  dans deux directions on a :

$$q_1 = [u_1, w_1, \theta_1, \Psi_1]^T \quad (\text{II.60})$$

$$q_2 = [u_2, w_2, \theta_2, \Psi_2]^T \quad (\text{II.61})$$

Soit  $B$  le vecteur déplacement exprimé par les fonctions de formes.

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} u_o(y, t) \\ \theta_o(y, t) \\ w_o(y, t) \\ \Psi_o(y, t) \end{Bmatrix} = N(\xi = 0; 1)q(t) \quad (\text{II.62})$$

$q(t)$ : Vecteur déplacement généralisé

Ou encore sous forme matricielle

$$\{B\} = [N]\{q\} = \begin{bmatrix} [N_u] & 0 \\ 0 & [N_w] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \end{Bmatrix} \quad (\text{II.63})$$

$$u_0 = N_u(\xi)q_u \quad (\text{II.64})$$

$$\theta_0 = \frac{\partial N_u}{\partial \xi} q_u \quad (\text{II.65})$$

$$w_0 = N_w(\xi)q_w \quad (\text{II.66})$$

$$\Psi_0 = \frac{\partial N_w}{\partial \xi} q_w \quad (\text{II.67})$$

$N_u$  et  $N_w$  sont les fonctions de forme des poutres en flexion suivant deux directions  $x$  et  $z$ .

$q_u$  et  $q_w$  sont les déplacements aux nœuds à l'intérieur de la poutre dans deux directions  $x$  et  $z$ .

### II.8.1 Détermination des matrices :

Les matrices masse et gyroscopique sont déduites de l'expression de l'énergie cinétique de l'arbre donnée par la relation (II.5)

$$E_{CA} = \frac{1}{2} \int_v \rho \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv + \int_v \rho \{\dot{B}\}^T [\phi] \{B\} dv$$

#### II.8.1.1 Matrice masse de l'arbre $[M_A]$ :

Le premier terme de la relation (II.5) de l'énergie cinétique contribue à la formation de la matrice masse.

$$E_c(M_A) = \frac{1}{2} \int_v \rho(r) \{\dot{B}\}^T \{\dot{B}\} dv \quad (\text{II.68})$$

En substituant le vecteur déplacement par les fonctions de forme :

$$E_c(M_A) = \pi L \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho(r) r dr \left( \int_0^1 \{\dot{q}_u\}^T [N_u]^T [N_u] \{\dot{q}_u\} d\xi + \int_0^1 \{\dot{q}_w\}^T [N_w]^T [N_w] \{\dot{q}_w\} d\xi \right) \quad (\text{II.69})$$

Les composantes de la matrice masse sont :

$$[M_{Au}] = \pi L \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho(r) r dr \int_0^1 [N_u]^T [N_u] d\xi \quad (\text{II.70})$$

$$[M_{Aw}] = \pi L \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho(r) r dr \int_0^1 [N_w]^T [N_w] d\xi \quad (\text{II.71})$$

Et la matrice masse peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[M_A] = \begin{bmatrix} [M_{Au}] & 0 \\ 0 & [M_{Aw}] \end{bmatrix} \quad (\text{II.72})$$

### II.8.1.2 Matrice gyroscopique de l'arbre $[C_{gA}]$ :

Le deuxième terme de la relation (II.5) de l'énergie cinétique est le terme qui contribue à la formation de la matrice gyroscopique de l'arbre.

$$E_c(C_{gA}) = \int_v \rho(r) \{\dot{B}\}^T [\dot{\phi}] \{B\} dv \quad (\text{II.73})$$

$$E_c(C_{gA}) = \int_v \rho(r) \{\dot{B}\}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \{B\} dv \quad (\text{II.74})$$

L'énergie cinétique exprimée par les fonctions de formes et la coordonnée adimensionnelle :

$$E_c(C_{gA}) = 2\pi L \Omega \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho(r) r dr \int_0^1 (-[N_u] \{q_u\} [N_w]^T \{\dot{q}_w\}^T + [N_w] \{q_w\} [N_u]^T \{\dot{q}_u\}^T) d\xi \quad (\text{II.75})$$

Appliquons les équations de Lagrange aux termes de l'énergie cinétique pour avoir une séparation des vecteurs de coordonnées généralisées dans la relation (II.75) :

1°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_u\}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_u\}^T} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_u\}^T} = 2\pi L \Omega \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho(r) r dr \int_0^1 \left( \frac{d}{dt} ([N_w] [N_u]^T) \{\dot{q}_w\} \right) d\xi \quad (\text{II.76})$$

2°/ Equation de Lagrange par rapport au vecteur  $\{q_w\}$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \{\dot{q}_w\}^T} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \{q_w\}^T} = -2\pi L \Omega \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \rho(r) r dr \int_0^1 \left( \frac{d}{dt} ([N_u] [N_w]^T) \{\dot{q}_u\} \right) d\xi \quad (\text{II.77})$$

En posant la relation (II.76) =  $C_{gA1}$  et la relation (II.77) =  $C_{gA2}$

La matrice gyroscopique de l'arbre peut s'écrire sous la forme suivante :

$$[C_{gA}] = \begin{bmatrix} 0 & [C_{gA2}] \\ [C_{gA1}] & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.78})$$

### II.8.1.3 Matrice de rigidité de l'arbre $[K_A]$ :

La matrice rigidité de l'arbre est déterminée à partir de son énergie de déformation (II.13) :

$$E_{dA} = \pi \int_0^L E(r) r^3 \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right) dr dy$$

Par substitution du champ de déplacement en terme des fonctions de formes et de la coordonnée adimensionnelle, on a :

$$E_{dA} = \pi L \int_{R_{int}}^{R_{ext}} E(r)r^3 dr \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] d\xi \quad (\text{II.79})$$

$$E_{dA} = \pi L \int_{R_{int}}^{R_{ext}} E(r)r^3 dr \int_0^1 \left( \{q_u\}^T [N_u]{}^T [N_u] \{q_u\} + \{q_w\}^T [N_w]{}^T [N_w] \{q_w\} \right) d\xi \quad (\text{II.80})$$

Avec les dérivées secondes :

$$N_u'' = \frac{\partial^2 N_u}{\partial \xi^2} \quad (\text{II.81})$$

$$N_w'' = \frac{\partial^2 N_w}{\partial \xi^2} \quad (\text{II.82})$$

On pose :

$$[K_{dAu}] = \pi L \int_{R_{int}}^{R_{ext}} E(r)r^3 dr \int_0^1 \{q_u\}^T [N_u]{}^T [N_u] \{q_u\} d\xi \quad (\text{II.83})$$

Et

$$[K_{dAw}] = \pi L \int_{R_{int}}^{R_{ext}} E(r)r^3 dr \int_0^1 \{q_w\}^T [N_w]{}^T [N_w] \{q_w\} d\xi \quad (\text{II.84})$$

Par raison de symétrie des deux plans OXY et OZY l'écriture matricielle de la rigidité de l'arbre est comme suite :

$$[K_{dA}] = \begin{bmatrix} [K_{dAu}] & 0 \\ 0 & [K_{dAw}] \end{bmatrix} \quad (\text{II.85})$$

## II.9 Détermination des matrices des paliers :

### II.9.1 La matrice d'amortissement $[C_p]$ :

Les composantes verticales et horizontales et les termes croisés de l'amortissement  $[C_p]$  dus aux paliers sont par hypothèse égaux.

$$C_{Pu1u1} = C_{Pw1w1} = C_{Pu1w1} = C_{Pw1u1} = C_{Pu2u2} = C_{Pw2w2} = C_{Pu2w2} = C_{Pw2u2} \quad (\text{II.86})$$

La matrice amortissement globale est constituée par les blocs de matrice suivants :

$$[C_P] = \begin{bmatrix} [C_{P11}] & [C_{P12}] \\ [C_{P21}] & [C_{P22}] \end{bmatrix} \quad (\text{II.87})$$

### II.9.2 La matrice de rigidité $[K_P]$ :

Les composantes verticales et horizontales et les termes croisés de la rigidité  $[K_P]$  dus aux paliers sont par hypothèse égaux.

$$K_{Pu1u1} = K_{Pw1w1} = K_{Pu1w1} = K_{Pw1u1} = K_{Pu2u2} = K_{Pw2w2} = K_{Pu2w2} = K_{Pw2u2} \quad (\text{II.88})$$

La matrice de rigidité globale due aux paliers est donnée par :

$$[K_P] = \begin{bmatrix} [K_{P11}] & [K_{P12}] \\ [K_{P21}] & [K_{P22}] \end{bmatrix} \quad (\text{II.89})$$

La matrice raideur et la matrice d'amortissement sont en général symétriques et peuvent varier d'une manière significative avec la vitesse de rotation

### II.10 Equation du mouvement :

Les équations de Lagrange utilisent l'expression des énergies calculées à partir d'une formulation de type éléments finis, le vecteur des déplacements aux nœuds de l'arbre est noté  $\{q\}$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{cR}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_{cR}}{\partial q_i} + \frac{\partial E_{dR}}{\partial q_i} = 0 \quad (\text{II.90})$$

Avec l'énergie cinétique du rotor :

$$E_{cR} = E_{cD} + E_{cA} \quad (\text{II.91})$$

$$E_{dR} = E_{dA} \quad (\text{II.92})$$

$E_{cR}$ : Energie cinétique du rotor.

$E_{cD}$ : Energie cinétique du disque.

$E_{cA}$ : Energie cinétique de l'arbre.

$E_{dR}$ : Energie de déformation du rotor.

$E_{dA}$ : Energie de déformation de l'arbre.

On obtient l'équation finale du mouvement du rotor :

$$[M_A + M_D]\{\ddot{q}\} + ([C_{gA} + C_{gD}] + [C_p])\{\dot{q}\} + ([K_A] + [K_p])\{q\} = 0 \quad (\text{II.93})$$

$[M_A]$  : Matrice masse d'arbre.

$[M_D]$  : Matrice masse du disque.

$[C_{gA}]$  : Matrice gyroscopique d'arbre proportionnelle à la vitesse de rotation  $\Omega$

$[C_{gD}]$  : Matrice gyroscopique du disque proportionnelle à la vitesse de rotation  $\Omega$

$[C_p]$  : Matrice d'amortissement visqueux due aux paliers.

$[K_A]$  : Matrice de rigidité de l'arbre.

$[K_p]$  : Matrice de rigidité des paliers.

On pose :

$$K = K_A + K_p \quad (\text{II.94})$$

$$M = M_A + M_D \quad (\text{II.95})$$

$$C = C_g = C_{gA} + C_{gD} + C_p \quad (\text{II.96})$$

L'équation différentielle prend la forme :

$$[M_g]\{\ddot{q}\} + [C_g]\{\dot{q}\} + [K_g]\{q\} = 0 \quad (\text{II.97})$$

$[M_g], [C_g], [K_g]$  Sont respectivement la masse globale, la raideur et les matrices d'amortissement du système rotor.

Les solutions de cette équation différentielle En tenant compte de l'amortissement structural donnent les fréquences recherchées à variables complexes. (Gmür, 1997)

### II.11 Conclusion

Ce chapitre présente une modélisation mathématique d'un rotor en utilisant la méthode des éléments finis basée sur la théorie d'Euler Bernoulli. Nous avons présenté les éléments qui constituent le rotor qui sont : l'arbre, le disque et les paliers.

L'arbre et les disques sont caractérisés par leur énergie cinétique. La flexibilité de l'arbre se traduit par son énergie de déformation, ainsi la rigidité de l'arbre résulte de cette dernière. Les matrices de masses, rigidités et de l'effet gyroscopique sont obtenus à partir des équations de mouvements en appliquant l'équation de Lagrange aux travaux dus aux paliers et aux différentes énergies.

**CHAPITRE III**  
**Résultats et interprétations**

### **III.1 Introduction**

L'étude ou l'analyse vibratoire des rotors n'est pas une science récente, ainsi que le comportement vibratoire de ces structures en matériaux FGM mérite bien d'être étudié et l'analyse du comportement et la conception de ces structures sont des activités importantes sur les plans techniques et économiques. Il est nécessaire ainsi de choisir la bonne théorie qui décrit correctement le comportement statique et dynamique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. On suppose que les propriétés matérielles ; le module de Young et le coefficient poisson et la masse volumique de l'arbre FGM varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur selon la distribution de loi de puissance (Power Law) en fonction de la fraction volumique des constituants du mélange graduel. Ce système dynamique est étudié par une formulation par la méthode des éléments finis hiérarchique trigonométrique (version p) à l'aide d'un logiciel « APPROTOR » réalisé par « Matlab » utilisé pour la détermination des tracés définissant le comportement vibratoire du système tournant.

### III.2 Présentation de l'application :

APPROTOR un logiciel d'éléments finis (h, p, et hp) destiné à prévoir le comportement dynamique de rotors.

Développé par l'équipe Interaction fluide structure et dynamique des machines (IFS-DM) du laboratoire Ingénierie des système mécanique et matériaux (IS2M) à Tlemcen.

Ce logiciel ainsi permet de faire la lecture de toutes les données physiques et géométriques de la structure, des fonctions de formes choisies pour sa discrétisation et aux calculs des fréquences propres avec diverses conditions aux limites.

#### III.2.1 Caractéristiques principales

Tableau III.1. Caractéristiques de l'application

Possibilités	Sorties graphiques
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déformée statique (forces, moments, gravité)</li> <li>• Fréquences et forme des modes, amortissements modaux, instabilités</li> <li>• Réponse sous balourd</li> <li>• Réponse asynchrone</li> <li>• Réponse harmonique fixée dans l'espace</li> <li>• Efforts maximum, chargement maximum des paliers</li> <li>• Energies sur les éléments</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Géométrie</li> <li>• Modèle éléments finis</li> <li>• Modes de la base modale</li> <li>• Diagramme de Campbell</li> <li>• Modes en rotation</li> <li>• Déformée sous balourd, force asynchrone, force harmonique</li> <li>• Réponse sous balourd, asynchrone, harmonique</li> </ul>

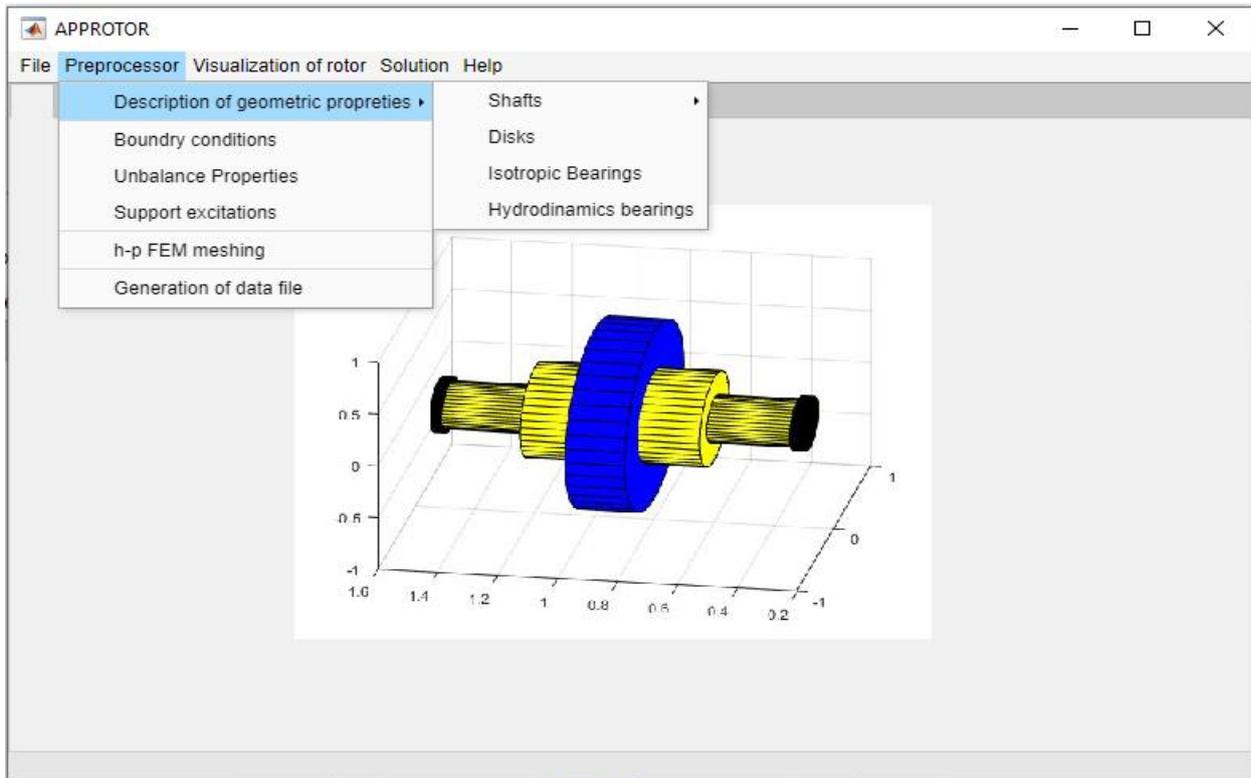


Figure III.1. Capture d'écran géométrie

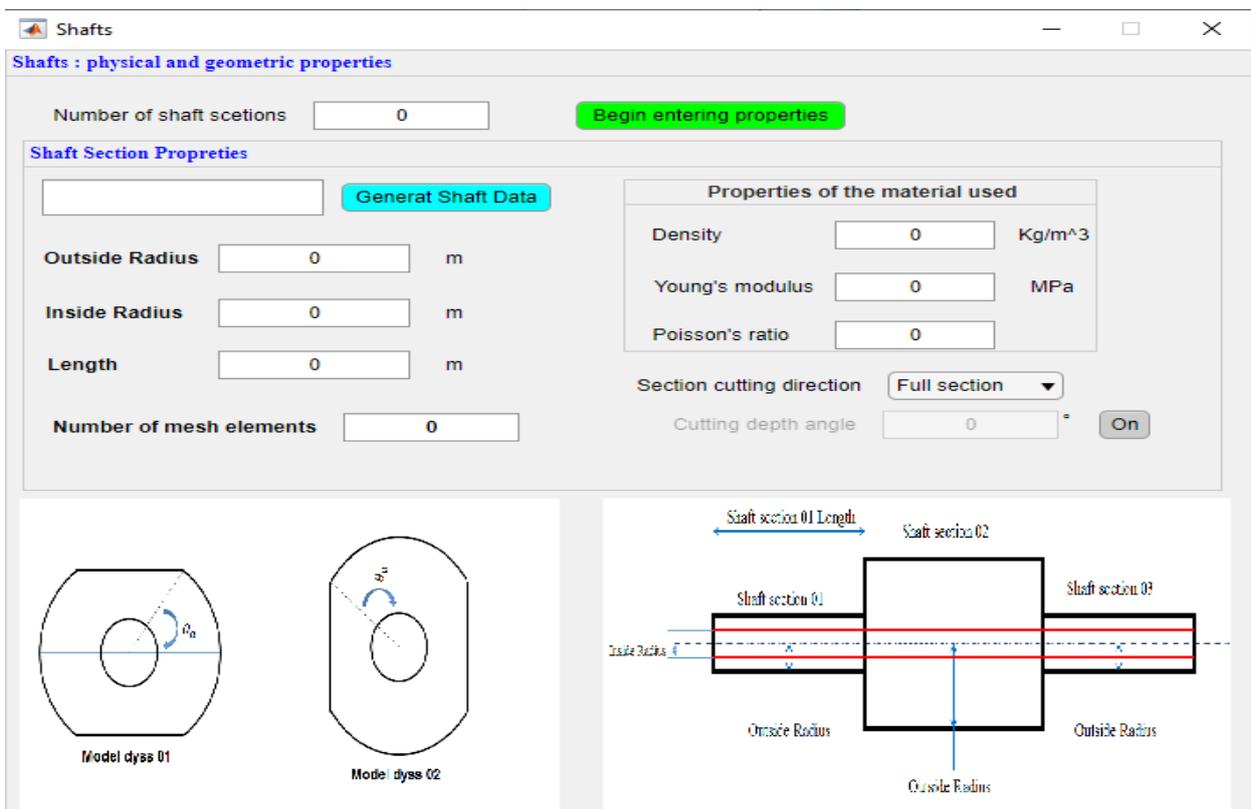


Figure III.2. Capture d'écran des propriétés

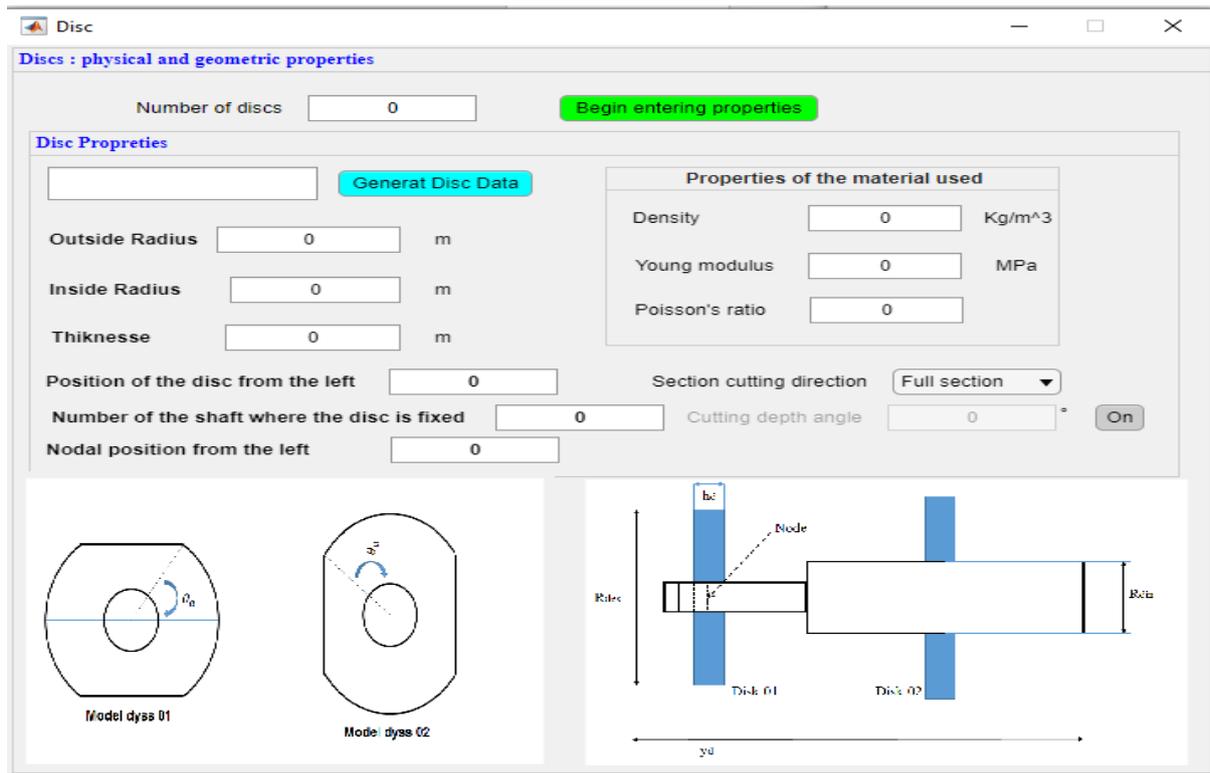


Figure III.3. Capture d'écran géométrie du disque

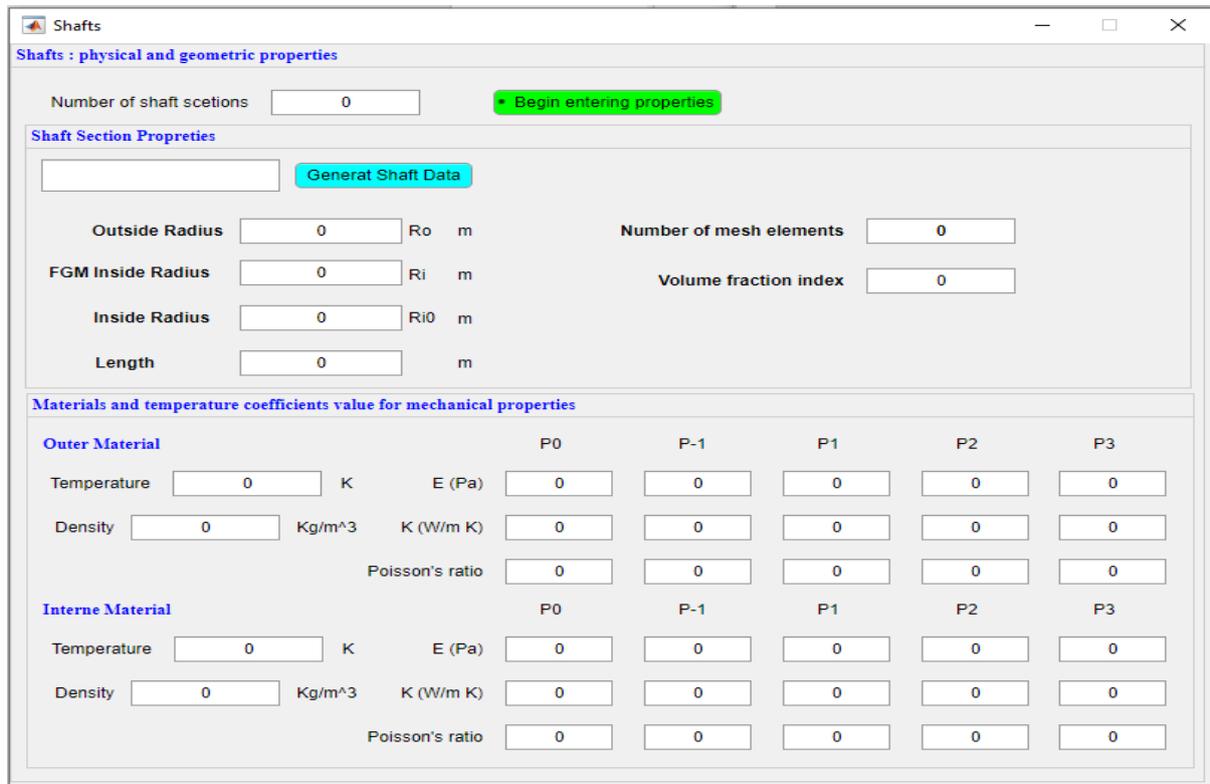


Figure III.4. Capture d'écran des propriétés

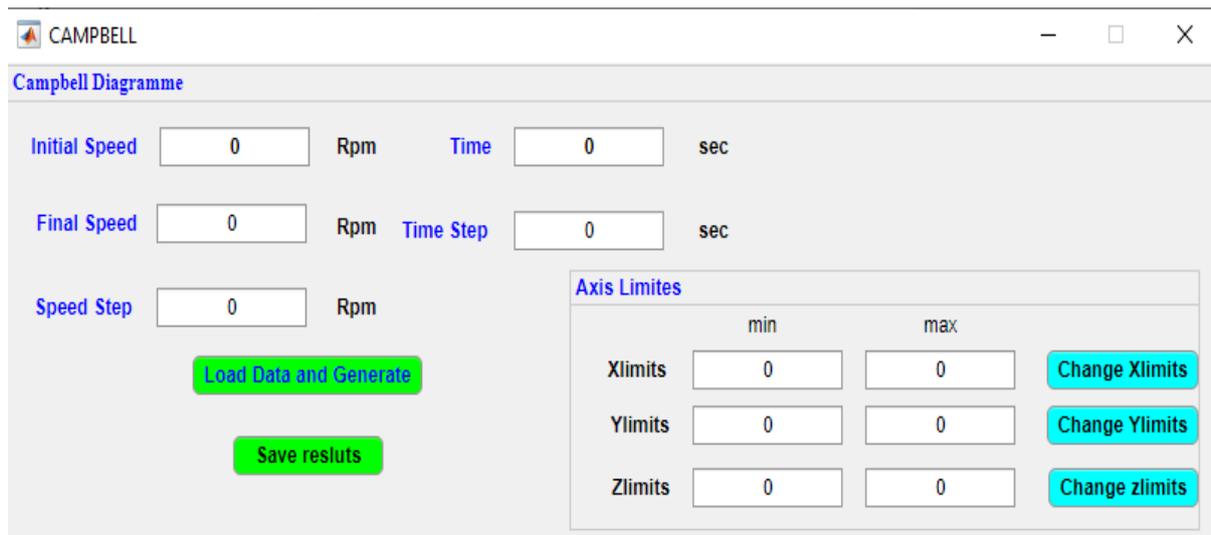


Figure III.5. Capture d'écran des conditions aux limites

### III.3 Présentation du modèle :

#### III.3.1 Géométrie d'arbre :

Considérons un arbre en FGM de rayon intérieur métal  $R_{am}=8\text{mm}$ , et rayon extérieur céramique  $R_{ec}=10\text{mm}$ , ainsi d'une longueur  $L=400\text{mm}$ .

#### III.3.2 Géométrie du disque :

Soit un disque de rayon intérieur  $R_i=10\text{mm}$ , et de rayon extérieur  $R_e=200\text{mm}$ , et d'une épaisseur  $h=50\text{mm}$ .

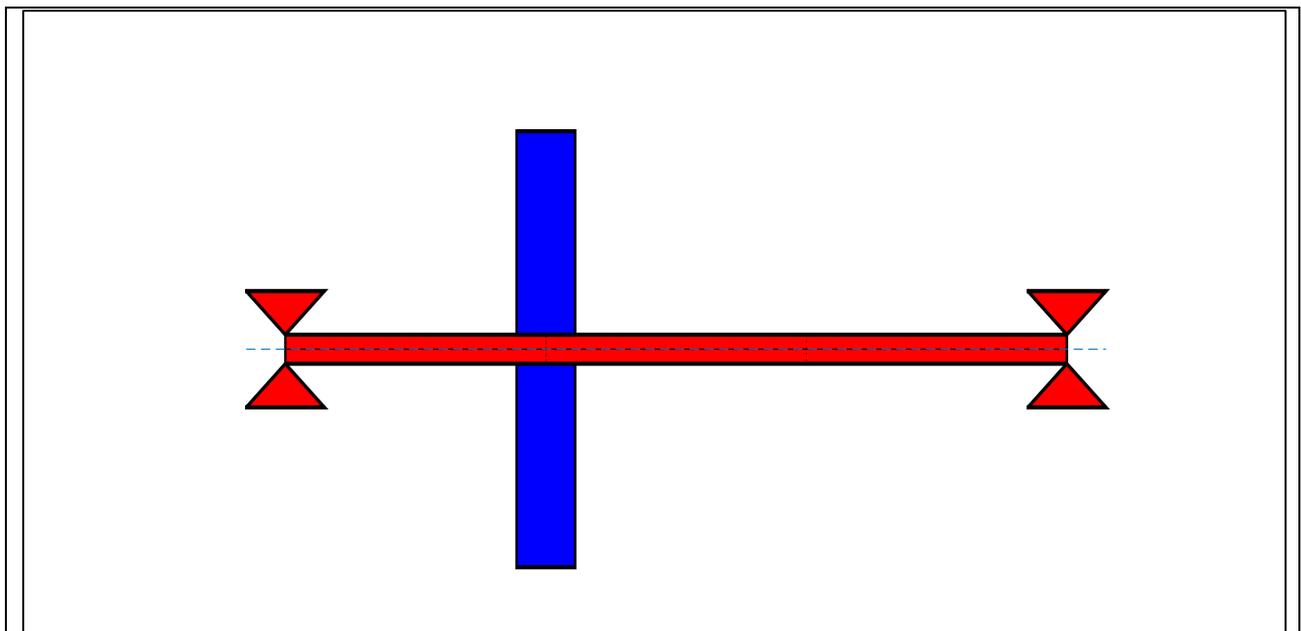
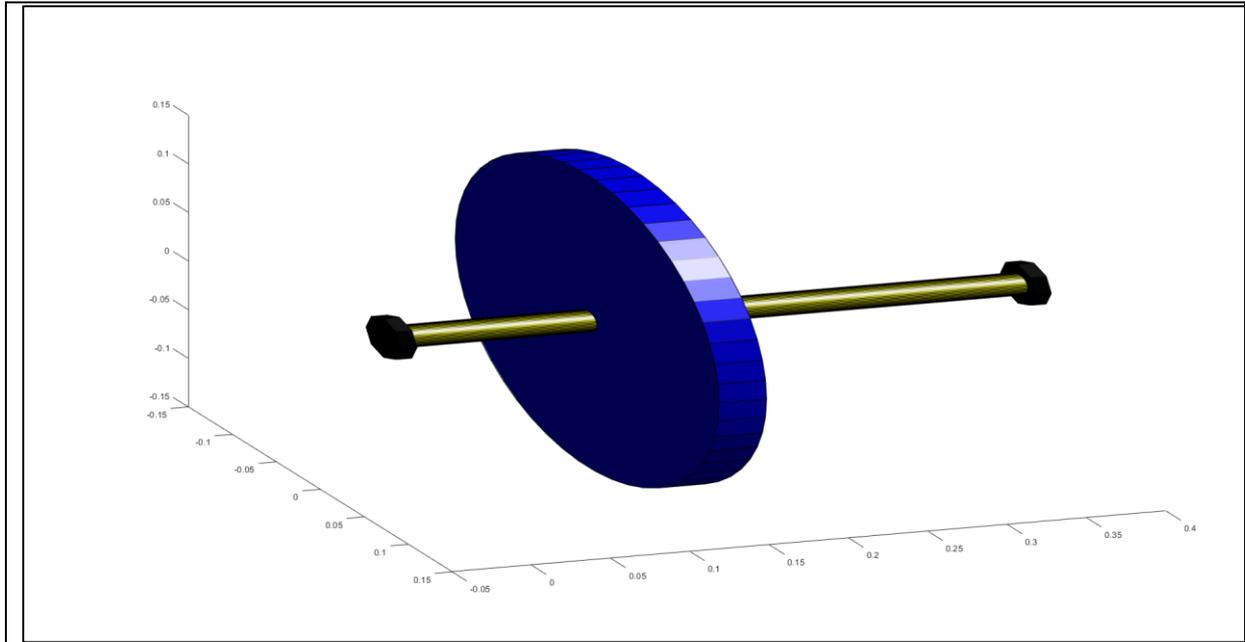


Figure III.6. Model du rotor avec disque 2D



**Figure III.7.** Model du rotor avec disque 3D

Deux types de couche FGM, (SUS304 / Silicon Nitride) et (SUS304 / Zircone) d'épaisseur  $E=2\text{mm}$  sont utilisés pour analyser l'arbre FGM en vibration, et le disque est considéré en matériaux isotrope. Les propriétés de ces matériaux sont dans le tableau III.2.

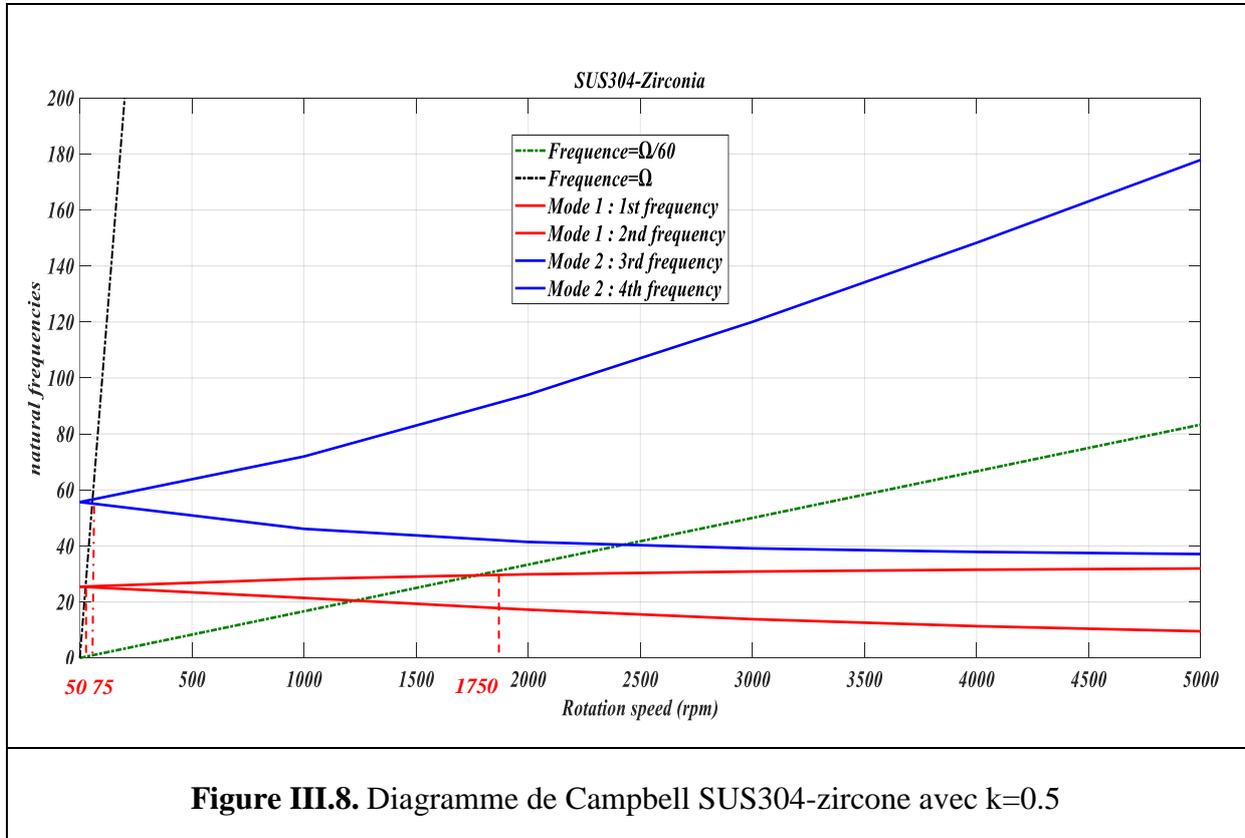
SUS304: acier inoxydable

**Tableau III.2.** Propriétés des matériaux utilisés

Pièce	Matériaux		Module de Young E(GPa)	Coefficient de Poisson	Masse volumique (Kg/m <sup>3</sup> )
Arbre	Métal	SUS304	210	0.3	8166
	Céramique	Zircone	200	0.32	5680
		Silicon Nitride	315	0.26	3170

### III.4 Graphes et interprétations

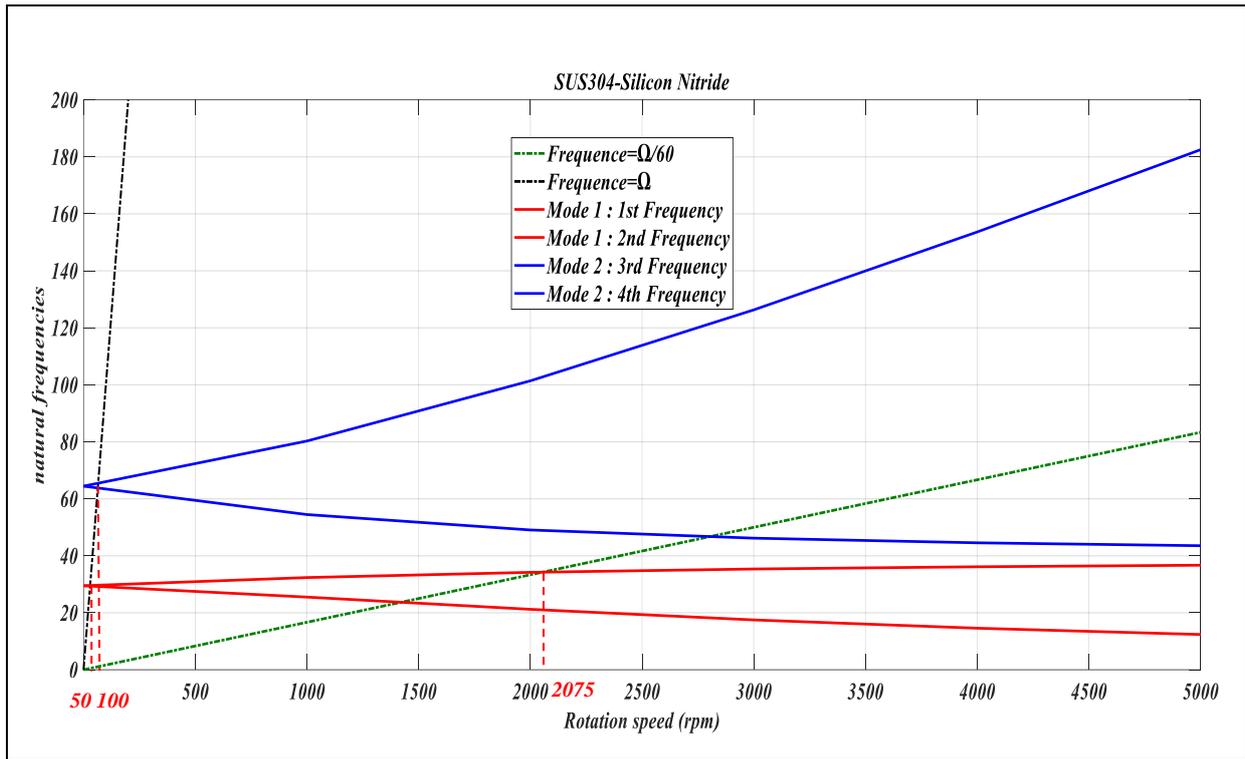
#### III.4.1 Diagramme de Campbell



La figure III.8 représente le diagramme de Campbell du 1er et 2ème premiers modes de vibrations d'un rotor FGM constitué du mélange graduel métal-céramique SUS304-Zircone pour un indice de volume fraction  $k=0.5$ , on constate sur cette figure que les modes vibratoires cités possèdent deux branches, la première branche dont la fréquence augmente avec l'augmentation de la vitesse de rotation est appelée précession directe, représente les variations des fréquences vibratoires propres du système tournant du rotor en fonction de la vitesse de rotation et la deuxième branche dont la fréquence diminue avec l'augmentation de la vitesse de rotation appelée précession rétrogradée (indirecte), représente les variations des fréquences vibratoires correspondantes aux phénomènes vibratoire appelé nutation.

On constate aussi de cette figure que chaque mode vibratoire possède :

- Deux vitesses critiques propres du système tournant au point  $VC_1=50$  tr/min et au point  $VC_2=75$  tr/min.
- Une vitesse due au balourd au point  $VC_3=1750$  tr/min pour le 2ème mode seulement.



**Figure III.9.** Diagramme de Campbell sus304-Silicon Nitride avec  $k=0.5$

La figure III.9 représente le diagramme de Campbell des deux premiers modes de vibrations d'un rotor FGM constitué par le mélange graduel métal-céramique SUS304-Silicon Nitride pour un indice de volume fraction  $k=0.5$ , on constate sur cette figure deux branches ; précession directe et précession rétrogradée. Dans ce cas le système possède trois vitesses critiques :

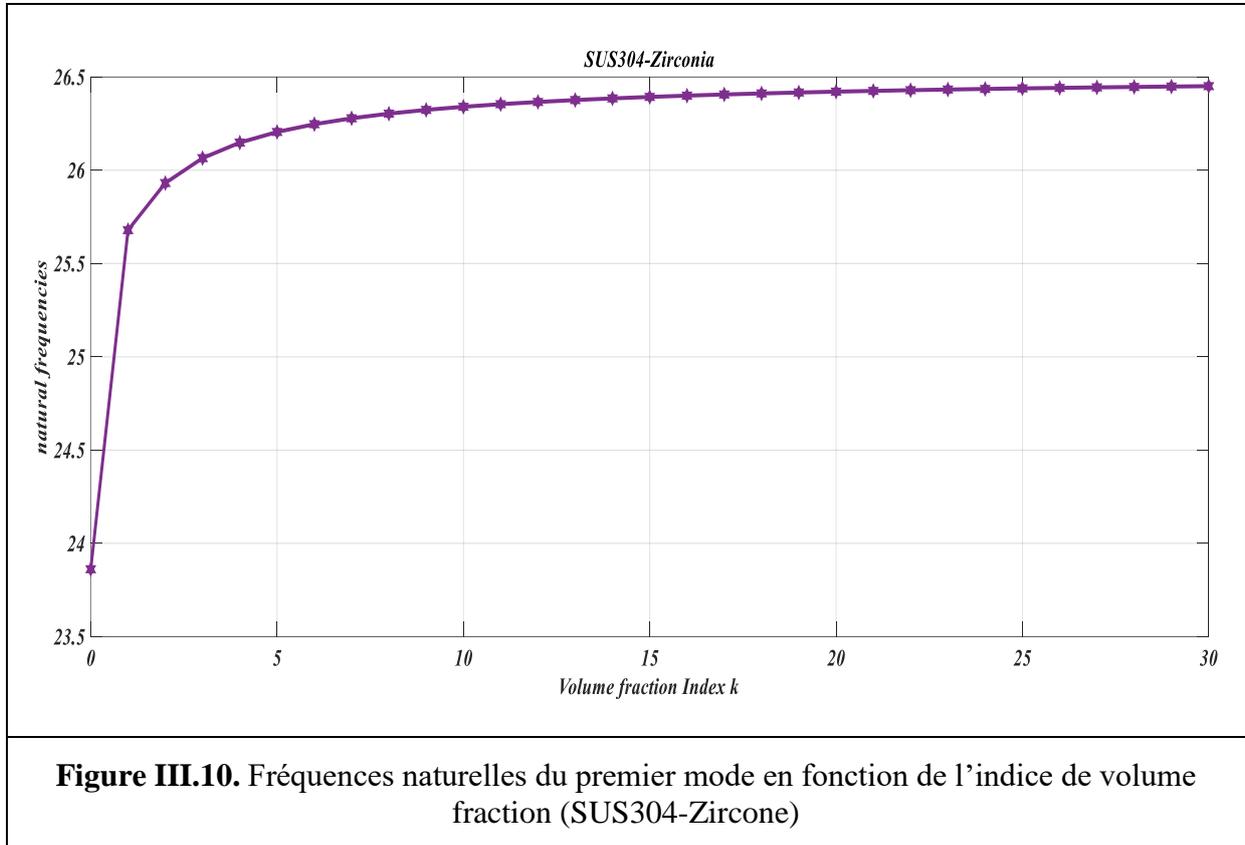
- Deux vitesses critiques propres du système tournant au point  $VC_1=50$  tr/min et au point  $VC_2=100$  tr/min.
- Une vitesse due au balourd au point  $VC_3=2075$  tr/min pour le 2ème mode seulement.

❖ **Pour les deux graphes :**

On peut conclure que notre système tournant fonctionne en passant par plusieurs vitesses critiques qui sont presque négligeables au démarrage, ainsi que pour chaque mode de vibrations les deux branches divergent lentement pour le premier mode vibratoire due au faible effet gyroscopique, ainsi qu'elles divergent rapidement pour le deuxième mode due au grand effet gyroscopique.

### III.4.2 Influence de l'indice de fraction volumique

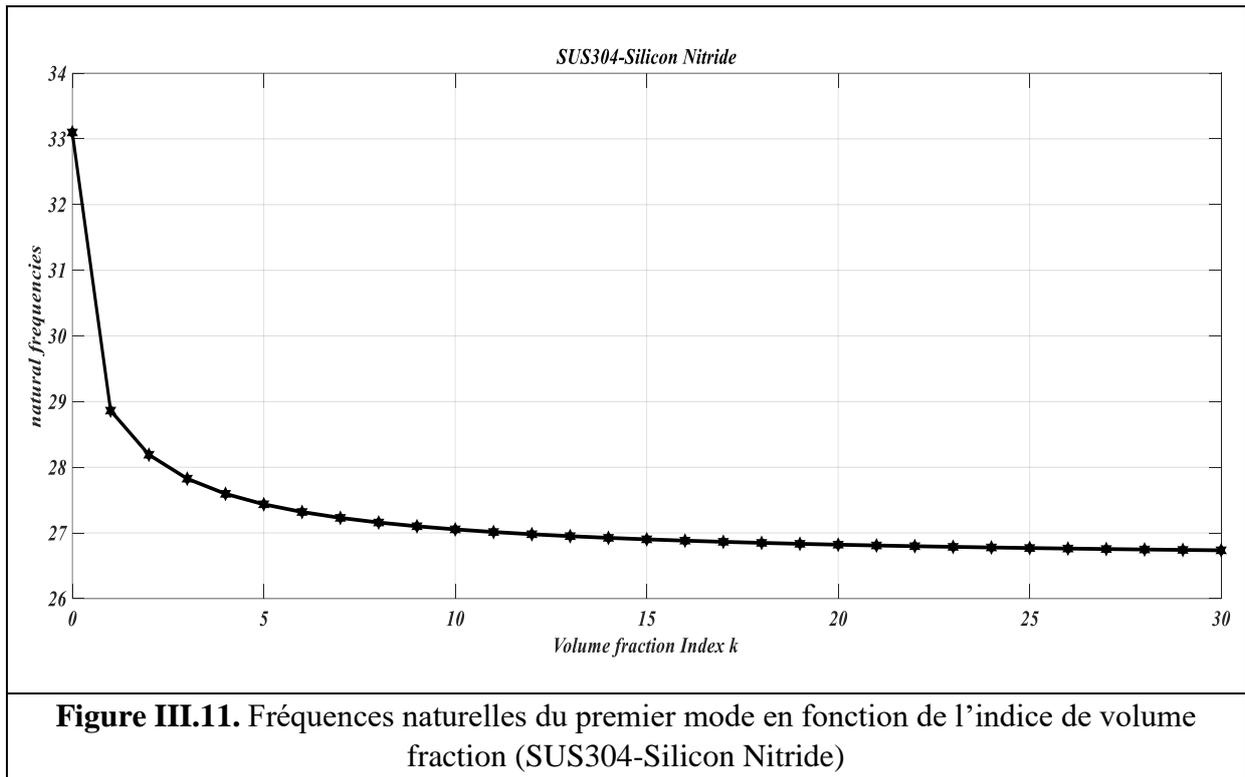
#### III.4.2.1 SUS304-Zircone



La figure III.10 représente la variation des fréquences d'un système tournant constitué par le mélange graduel métal-céramique (SUS304-Zircone) en fonction de l'augmentation de l'indice volume fraction k.

Pour  $k=0$  correspond à une couche extérieure en céramique pure (Zircone) les fréquences sont minimales autour de  $f=23.8\text{Hz}$  et augmentent rapidement lorsque  $k=2$  en s'approchant d'une couche constituée majoritairement par le métal (SUS304) car le module de Young du SUS304 est plus grand que celui de la Zircone, au-delà ces fréquences augmentent lentement lorsque l'indice de fraction k varie (de 2 à 30), jusqu'à ce qu'elles se stabilisent à  $f=26.4\text{Hz}$ .

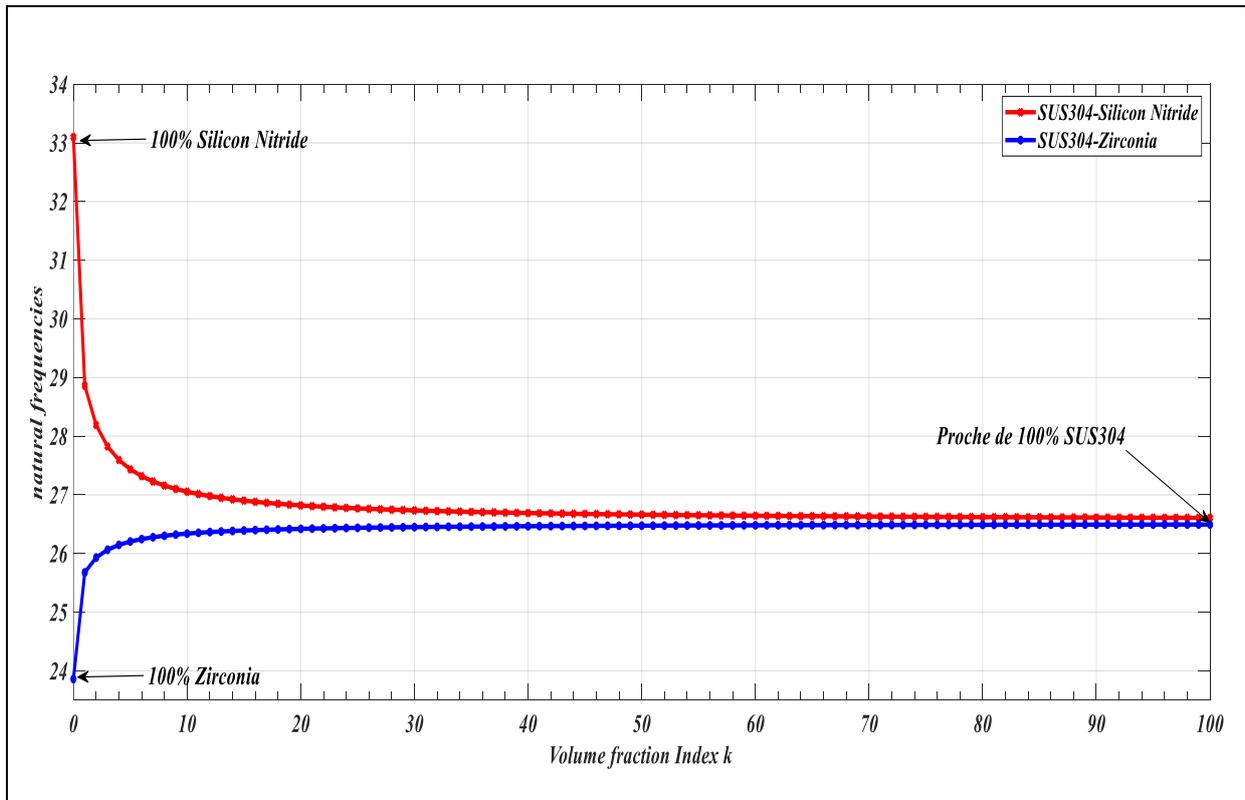
## III.4.2.2 SUS304-Silicon Nitride



La figure III.11 représente la variation des fréquences d'un système tournant constitué par le mélange graduel métal-céramique (SUS304-Silicon Nitride) en fonction de l'augmentation de l'indice volume fraction  $k$ .

Contrairement au graphe précédent (Figure III.10), pour  $k=0$  correspond à une couche pure céramique (Silicon Nitride) les fréquences sont maximales autour de  $f=33.2\text{Hz}$  et diminue rapidement lorsque  $k=2$  en s'approchant d'une couche constituée majoritairement par le métal (SUS304) car le module de Young du Silicon Nitride est plus grand que celui du SUS304, au-delà les fréquences diminuent lentement lorsque l'indice de fraction varie (de 2 à 30) jusqu'à ce qu'elles se stabilisent à  $f=26.8\text{Hz}$ .

## III.4.2.3 Comparaison des mélanges:

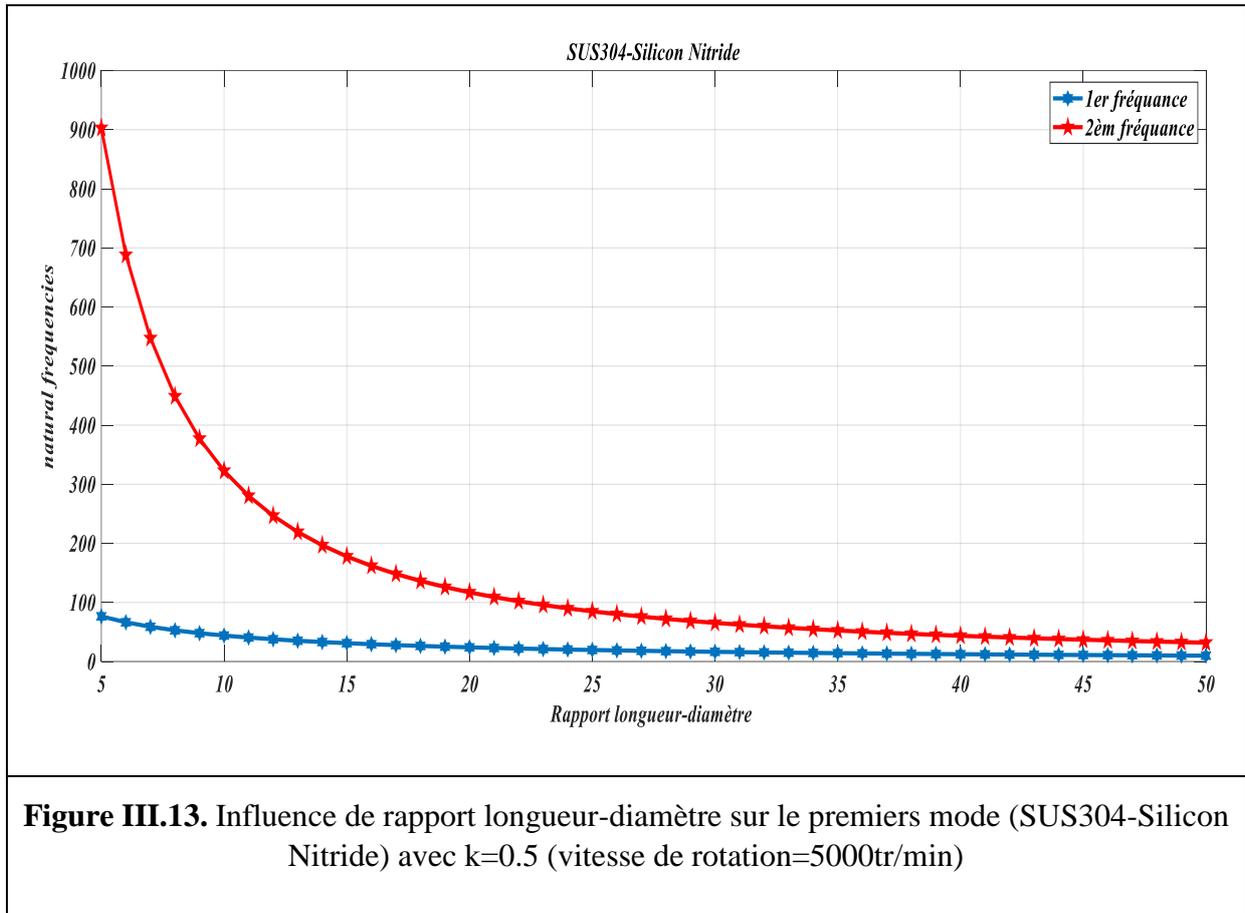


**Figure III.12.** Influence de rapport longueur-diamètre sur le premiers mode (SUS304-Silicon Nitride) avec  $k=0.5$  (vitesse de rotation=5000tr/min)

La figure III.12 représente une comparaison des fréquences vibratoires du système tournant constitué de deux mélanges métal-céramique SUS304-Zircone et SUS304-Silicon Nitride fonction de la variation de l'indice de volume fraction.

Pour les deux mélanges, les fréquences vibratoires de notre système varient selon chaque matériau d'une face 100% céramique à une face 100% métal. Pour  $k=50$  les fréquences commencent à se stabiliser en augmentant l'indice de volume fraction  $k$  jusqu'à prendre une valeur finale.

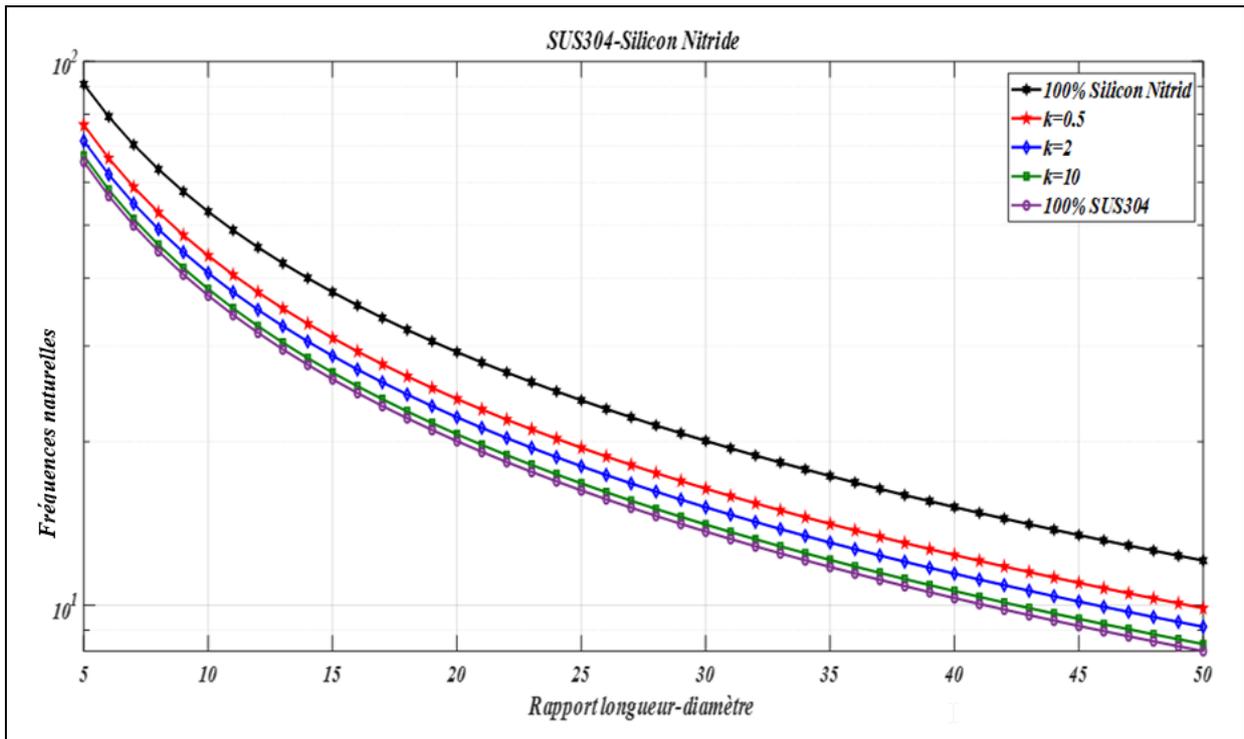
Ces variations des fréquences sont dues à l'effet de l'indice du volume fraction sur le mélange, ainsi aux caractéristiques de chaque matériau comme le module de Young.

III.4.3 Influence du rapport longueur-diamètre pour  $k=0.5$ 

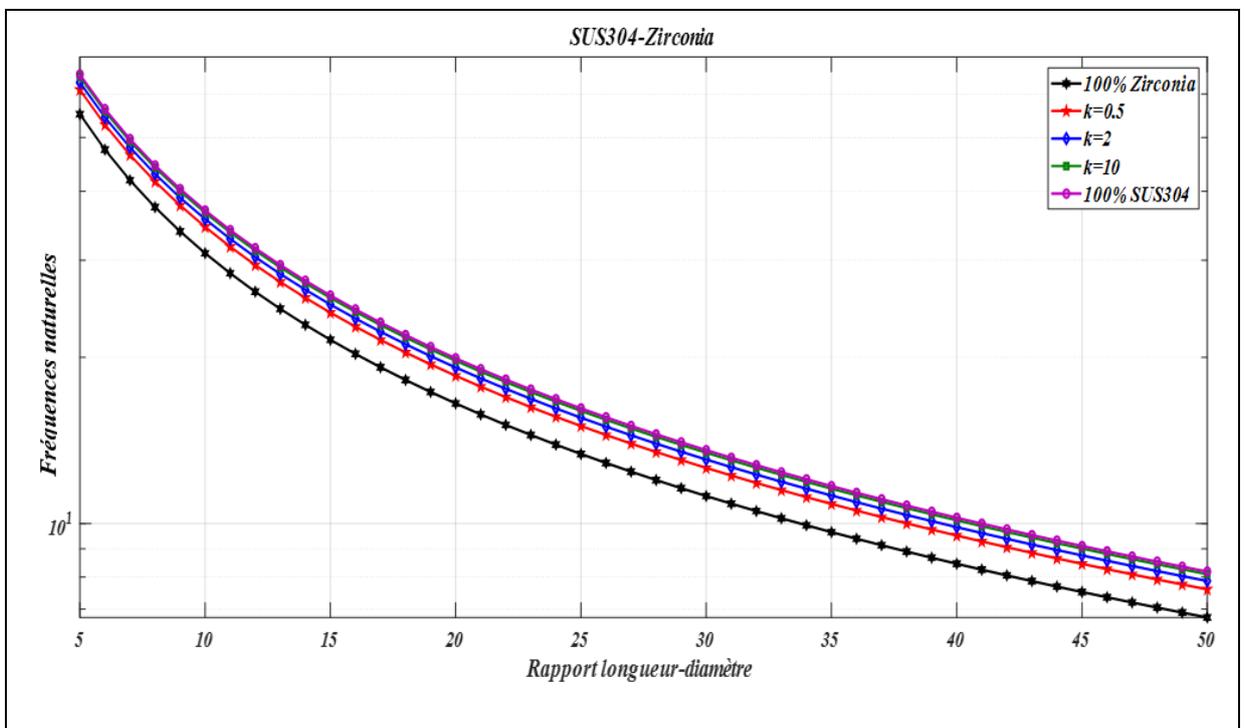
La figure III.13 représente la variation des fréquences vibratoires du système tournant constitué du mélange graduel métal-céramique SUS304-Silicon Nitride pour un indice de volume fraction  $k=0.5$  en fonction du rapport longueur-diamètre.

Lorsque le rapport  $L/D=5$ , on peut voir que la 1<sup>re</sup> fréquence est autour de 80Hz et la 2<sup>ème</sup> fréquence est autour de 900Hz, on peut voir ainsi que ces deux fréquences diminuent et convergent avec l'augmentation du rapport longueur-diamètre jusqu'à ce qu'elles deviennent constantes.

III.4.4 Influence du rapport longueur-diamètre pour différents k



**Figure III.14.** Influence de rapport longueur-diamètre sur le premiers mode (SUS304-Silicon Nitride) avec différent indice de volume fraction (vitesse de rotation=5000tr/min)



**Figure III.15.** Influence de rapport longueur-diamètre sur le premiers mode (SUS304-Zirconia) avec différent indice de volume fraction (vitesse de rotation=5000tr/min)

### III.4.4.1 Comparaison des mélanges :

Les figures 14 et 15 représentent les fréquences vibratoires du système tournant constitué de deux mélanges métal-céramique (SUS304-Silicon Nitride) et (SUS304-Zircone) en fonction du rapport longueur-diamètre en changeant l'indice de volume fraction  $k$ .

#### a. Pour la figure III.14

On constate, lorsque le rapport longueur-diamètre=5, les fréquences vibratoires sont maximales  $f=100\text{Hz}$  pour 100% Silicon Nitride et elles s'affaiblissent pour chaque indice de volume fraction ( $k=0.5$ ,  $k=2$ ,  $k=10$ ) car la gradation du mélange sera composée avec plus de métal que la céramique, puis elles deviennent minimales  $f=88\text{Hz}$  pour 100% SUS304. On constate que ces fréquences diminuent ainsi avec l'augmentation du rapport longueur-diamètre jusqu'à ce qu'elles deviennent constantes.

#### b. Pour la figure III.15

Contrairement au mélange précédent, on peut voir que lorsque le rapport longueur-diamètre=5, les fréquences de vibrations à 100% SUS304 sont maximales  $f<100\text{Hz}$ , et pour chaque indice de volume fraction ( $k = 0,5$ ,  $k = 2$ ,  $k = 10$ ) elles s'affaiblissent car il y aura plus de céramique dans le mélange que de métal, donc pour du 100% zircone  $f<80\text{Hz}$ . On peut voir ainsi que ces fréquences diminuent donc avec l'augmentation du rapport longueur-diamètre jusqu'à ce qu'elles deviennent constantes.

#### c. Pour les trois figures précédentes

On constate alors que le rapport longueur-diamètre influe sur les fréquences vibratoires, car plus la longueur de l'arbre tournant augmente plus sa rigidité diminue et plus les fréquences diminuent.

### **III.5 Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons analysé les vibrations libres d'un rotor avec un arbre FGM, ensuite que nous avons étudié par les structures présentées l'influence de l'indice de volume fraction  $k$ , ainsi du rapport longueur/diamètre sur les fréquences propres du système.

Les analyses des résultats obtenus ont été présentées sous formes de comparaisons. Les résultats obtenus montrent que :

- L'indice de volume fraction influe sur les fréquences vibratoires, selon les propriétés du matériau comme le module de Young.
- Le rapport longueur/diamètre montre une relation avec rigidité/ductilité de l'arbre FGM ainsi que son augmentation réduit les fréquences propres.

## **Conclusion générale**

## Conclusion générale

La dynamique des rotors joue un rôle important dans l'industrie moderne surtout avec l'arrivée des matériaux à gradient de propriétés qui ont montré leur place parmi les matériaux modernes avancés, où ils sont devenus de sérieux concurrents pour nombreuses applications dans plusieurs domaines tel que l'énergie, la mécanique, l'aérospatiale etc. Ainsi leur utilisation dans les rotors rend nécessaire le développement d'outils performants adaptés aux propriétés géométriques et matérielles spécifiques de ces matériaux, cela permet de mieux comprendre le comportement vibratoire des rotors FGM.

Ce mémoire présente une analyse numérique de la dynamique d'un rotor avec arbre en FGM, composé d'une face extérieure en céramique comme protection corrosive et une face intérieur en métal ductile où les propriétés changent graduellement en fonction du rayon selon le modèle P-FGM dont nous avons étudié deux structures avec différentes couches FGM constitué de deux mélanges métal-céramique SUS304-Zircone et SUS304-Silicone Nitride. Cette étude est basée sur une formulation par éléments finis issue de la littérature des différents éléments du rotor dont l'arbre FGM été modélisé par une poutre Euler Bernoulli.

L'objectif est d'étudier l'influence de l'indice du volume fraction ainsi que le rapport géométrique longueur- diamètre sur les fréquences vibratoires du système tournant. Les conclusions tirées de cette étude sont comme suit :

- L'augmentation des fréquences propres est proportionnelle à la rigidité du système tournant.
- Le rapport longueur/diamètre influe sur le comportement vibratoire de sorte que son augmentation réduit les fréquences propres et l'inverse.
- Les fréquences vibratoires dépendent de l'indice de volume fraction du mélange graduel et des propriétés mécaniques surtout le module de Young de chaque matériau constituant le mélange.

Les résultats obtenus dans cette étude, peuvent ouvrir des perspectives pour l'étude des rotors FGM avec d'autres mélanges graduels.

## **Références Bibliographiques**

---

## Références bibliographiques

(Gehman, 2003). Columbia Accident Investigation Board (2003), Report Volume 1, National Aeronautics and Space Administration and the Government Printing Office, Washington D.C.

Popoola, P., Farotade, G., Fatoba, O., & Popoola, O. (2016). Laser engineering net shaping method in the area of development of functionally graded materials (FGMs) for aero engine applications—A Review. *Fiber Laser*, 383–399. <https://doi.org/10.5772/61711>

Mahmoud, D., & Elbestawi, M. (2017). Lattice structures and functionally graded materials applications in additive manufacturing of orthopedic implants: A review. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 1(2), 13. <https://doi.org/10.3390/jmmp1020013>

Loh, G. H., Pei, E., Harrison, D., & Monzón, M. D. (2018). An overview of functionally graded additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 23, 34-44. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.06.023>

Elishakoff, I., Pentaras, D., & Gentilini, C. (2016). *Mechanics of functionally graded material structures*. World Scientific Publishing Company.

Mahamood, R. M., & Akinlabi, E. T. (2017). *Functionally Graded Materials*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53756-6>

Barati, M. R., Shahverdi, H., & Zenkour, A. M. (2017). Electro-mechanical vibration of smart piezoelectric FG plates with porosities according to a refined four-variable theory. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 24(12), 987-998. <https://doi.org/10.1080/15376494.2016.1196799>

Koizumi, M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9)

Nguyen, T. K., Sab, K., & Bonnet, G. (2007). Shear correction factors for functionally graded plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(8), 567-575. <https://doi.org/10.1080/15376490701672575>

Abdizadeh, H. (1997). *Elaboration et caractérisation de composites duplex «composites laminaires tri-couches à base d'alumine [Thèse de Doctorat, Institut national des sciences appliquées de Lyon]*. <http://theses.insa-lyon.fr/publication/1997ISAL0076/these.pdf>

Houari, M. S. A. (2011). *Analyse des contraintes thermo-élastiques : Lois des puissances [Thèse de Doctorat]*. Université Djillali Liabes.

Gmür, T. (1997). *Dynamique des structures: analyse modale numérique*. PPUR presses polytechniques.

Koizumi, A. (1994). Recent progress of functionally gradient materials in Japan. In J. B. Wachtman (Éd.), *Ceramic Engineering and Science Proceedings* (Vol. 13, p. 332-347). John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9780470313954.ch33>

Okamura, H. (1991). State of the art of material design projects for severe service applications. *Materials Science and Engineering: A*, 143(1-2), 3-9. [https://doi.org/10.1016/0921-5093\(91\)90720-8](https://doi.org/10.1016/0921-5093(91)90720-8)

Attia, A. (2015). Contribution à l'étude de la vibration libre des plaques FGM dans un champ thermique [Thèse de Doctorat]. Université Djillali Liabes.

[NAR 11] Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi. (2011). "Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions»; John Wiley & Sons, 110

Khathun, S. (2018). Functionally graded materials—An overview. <https://www.slideshare.net/sabihakhathun/overview-of-functionally-graded-materials-97027240/24>.

Yadroitsev, I., Bertrand, Ph., Laget, B., & Smurov, I. (2007). Application of laser assisted technologies for fabrication of functionally graded coatings and objects for the International Thermonuclear Experimental Reactor components. *Journal of Nuclear Materials*, 362(2-3), 189-196. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2007.01.078>

SALEH, Bassiouny, JIANG, Jinghua, FATHI, Reham, *et al.* 30 Years of functionally graded materials: An overview of manufacturing methods, Applications and Future Challenges. *Composites Part B: Engineering*, 2020, vol. 201, p. 108376.

Domack, M. S., & Baughman, J. M. (2005). Development of nickel-titanium graded composition components. *Rapid Prototyping Journal*, 11(1), 41-51. <https://doi.org/10.1108/13552540510573383>

ZAOUI, Bouchra, et al. Analyse du comportement thermomécanique des matériaux composés : type FGM, Bimatériaux, matériaux composites. 2021. Thèse de doctorat.

ZAOUI, FATIMA ZOHRA. contribution à l'étude de la vibration libre des structures fonctionnellement graduées par l'intermédiaire des théories de déformation de cisaillement avancées. Thèse de doctorat. Université de Mostaganem-Abdelhamid Ibn Badis.

ASSEM, Hassan, HADJOU, Abdelhamid, et SAIMI, Ahmed. Numerical analysis on the dynamics behavior of FGM rotor in thermal environment using hp finite element method. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2020, p. 1-24.

Bouzidi, I., A. Hadjoui, and A. Fellah. 2020. Dynamic analysis of functionally graded rotor-blade system using the classical version of the finite element method. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. <https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1706558>.

Otmani Malika, 2020. Analyse par Elément Finis du comportement des Matériaux FGM AL2O3-SUS3O4 et NI- SUS3O4 sous l ' influence de la température.

Hadj said, 2020. Analyse numérique par la méthode des éléments finis du comportement vibratoire d'un rotor.

MELIH, 2017. Analyse De Stabilité D'un Rotor. Mémoire de fin d'études. Université de Abou Bakr Belkaid Tlemcen.

La et al., 2014. ANALYSE DES PHENOMENES VIBRATOIRES EN DYNAMIQUE DES ROTORS MODELISATION ET EXPERIMENTATION. Mémoire de Magister. Université de BATNA.

Ellouze, 2012. Etude de la stabilité et de la stabilisation des systèmes à retard et des systèmes impulsifs. Thèse de doctorat