République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire Belhadj Bouchaib d'Aïn-Témouchent

Institut des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique

# Mémoire

Pour l'obtention du Diplôme de Master en Mathématique
Option : Equations différentielles et modélisation Présenté par :

Melle. Hadjera Hamaida

# L'existence de solutions d'un problème aux limites avec impulsion

Encadrant :
Mme. Saiah-Belattar Zokha
Maitre Assistant "A" à C.U.B.B.A.T.

Soutenu en 2018

Devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| Présidente : | Mme. Bendimred Lamia (M.A.A) | C.U.B.B.A.T. |
| Examinateur : | Mme. Mekhalfi Kheira (M.C.B) | C.U.B.B.A.T. |
| Encadrant : | Mme.Saiah-Belattar Zokha (M.C.B) | C.U.B.B.A.T. |

# Remerciement

En premier lieu, je remercie Allah, le tout puissant, qui m'a donné durant toutes ces années la santé, le courage et la volonté pour réaliser ce travail.

J'exprime ma profonde gratitude à Madame SAIAH-BELATTAR ZOKHA, qui m'a encadré, tout le long de ce mémoire.

Je lui apporte aussi toute ma reconnaissance pour son aide consistante, ses conseils précieux et ses remarques objectives. C'est grâce à vous que ce travail a pris cette forme

Je remercie tous les professeurs de Math à l'université Belhaj -Bouchaib pour son aide durant toutes ces années.

Que soient ,enfin, je tiens à rendre hommage à mes parents et à ma famille qui m'ont soutenus et encouragés, je tiens aussi à remercier tous ceux et celles qui de près ou de loin ont comtribué à l'accomplissement de ce travail.

# Dédicace

Je rends grâce a notre dieu le tout misècorde de m'avoir donné la force et la savoir pour pouvoire venir a bout de ce travail je profite de cette occasion pour dédier ce modeste travail avec tous les sentiments d'humit et de gratitude à :

Mes parents, les êtres les plus chers a mon cœur, qui m'a entouré avec leur amour et ma donné la capacité d'attendre ce niveau de savoir.

Mes très chères soeurs, ma frére et toute ma famille.

Mes amies et tous les étudiants de Math , et tous les enseignants que j'ai eu pendant mes années.

Tous les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Tous ceux qui m'on aide a la réalisation de ce modeste travail et tous ceux qui m'aiment.

# Table des matières

# Introduction générale

Une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues à été soumise.
Les problèmes les plus connus dans l'étude des équations différentielles sont les problèmes de Cauchy ou les problèmes aux limites [10].

En 1960, la théorie des équations différentielles ordinaires impulsives a été initiée par V. Milman et A. Myshkis et elle a été développée durant la période de 1960-1975 par certains chercheurs ukraniens et russes. Ensuite, de 1975 à 1990, le mérite du développement de cette théorie et de sa popularisation revient au mathématicien américain V. Lakshmikantham [12].

A partir de 1991, autres mathématiciens comme L. Byszewski, D. Bainov contribuaient à l' enrichissement de la théorie des équations différentielles impulsives où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dés lors ([4], [12],[15]).

Les équations différentielles impulsives apparaissent comme une description naturelle de nombreux phénomènes d'évolution dans le monde réel. Certains phénomènes physiques subissant des changements brusques au cours de leur évolution comme les systèmes mécaniques avec impact, la dynamique des cellules [7], les systèmes biologiques([7]) (battements du coeur, flux du sang,...). Ces changements sont souvent de très courtes durées et sont donc produits instantanément sous forme d'impulsions.
La modélisation de tels phénomènes nécessite l'utilisation des formes qui font intervenir explicitement et simultanément l'évolution continue du phénomène ainsi que les changements instantanés. De tels modèles sont dits "impulsifs" .

Récement, la théorie des équations différentielles impulsives s'est distinguée comme un domaine d'investigation important parmi plusieurs théories d'équations différentielles. Un nombre considérable de travaux traitant les équations différentielles impulsives et beaucoup entre eux sont consacrés à l'étude de l'existence de solution aux problème aux limites pour les équations différentielles impulsives du second ordre ,en utilisant différentes méthodes comme sur et sous solutions, la théorie du degré topologique ,méthodes variationnelles ([1],[5], [4]) .

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à l'existence des solutions d'un problème aux limites pour une équation différentielle d'ordre deux contenant un paramètre, de plus les effets impulsifs contiennent le même paramètre. Notre objectif est d'étudier l'existence des solutions par l'intermédiaire du théoréme des fonctions implicites.

Ce travail est composé de trois chapitres et une bibliographie. Il est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre nous avons introduit les définitions et les résultats préliminaires qui seront utilisées dans ce mémoire.
Le deuxième chapitre est consacré à certains résultats sur les équations différentielles impulsives du premier ordre et du second ordre.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de l'existance de solution d'un problème aux limites pour une équation differentielle impulsive d'ordre deux

$$\begin{cases} x^{''}(t) = f(t, x, x^{'}, \lambda) & t \neq t_k,\ k = 1, 2, ..., r;\ \ t \in I = [0, 1], \\ \Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda), & \\ \Delta x^{'}(t_k) = \theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda), & \\ x(0) = x(1) = 0. & \end{cases}$$

# Chapitre 1

# Préliminaire

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et résultats utiles. Nous nous intéressons Notamment au théorème des fonctions implicites. Ainsi nous allons donner quelques résultats préliminaires sur les équations différentielles ordinaires.

## 1.1 Opérateur compact

Dans cette partie, nous allons faire appel aux opérateurs compact. Soient X et Y deux espace de Banach et $\Omega \subset X$ un ouvert .

**Définition 1** *[17] Une application continue $f : \Omega \to Y$ est dite compacte si $f(\overline{\Omega})$ est compact. Elle est dite complément continue si l'image de tout borné est relativement compact .*

**Remarque 1** *(a) Toute application compacte est complètement continue ; la réciproque est vraie si $\Omega$ est borné.*
*(b) Une application compact n'est pas nécessairement continue .*
*(c) Toute application linéaire compacte est continue, la réciproque est vraie si $f$ est de rang fini.*
*(d) Si $X$ est de dimension finie, tout endomorphisme linéaire sur $X$ est continu et compact.*

**Proposition 1** *[17] Les assertions suivantes sont équivalentes :*
*(i) $f$ est compact .*
*(ii) L'image de la boule unité est relativement compacte .*
*(iii) De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ borné dans X. On peut extraire une sous suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $f(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.*

**Lemme 1** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach, $\Omega \subset X$ et $f : X \to Y$ une application compacte différentiable au voisinage d'un point $x_0 \in \Omega$. Alors, l'application $Df(x_0) : X \to Y$ est un opérateur linéaire compact.*

**Définition 2** *[17] On dit que $f : \Omega \to Y$ est différentiable au point $a \in U$ si les conditions suivante sont vérifier :*

*(i)* $f$ *est continue au point* $a$ *;*

*(ii)* *il existe une application* $g : X \to Y$ *linéaire tel que :*

$$||f(x) - f(a) - g(x - a)|| = o(||x - a||).$$

*Si* $f$ *est differentiable au point* $a$*, alors* $g = f^{'}(a) \in \mathcal{L}(X, Y)$.

q

**Définition 3** *[17]* $f$ *est différentiable dans* $\Omega$ *si* $f$ *est différentiable en tout point de* $\Omega$.

**Définition 4** *[17] On dit que* $f : \Omega \to Y$ *est continument différentiable ou de classe* $C^1$ *si :*

*1)* $f$ *est différentiable dans* $\Omega$*, c'est -à-dire différentiable en tout point de* $\Omega$ *;*

*2) l'application dérivée* $f^{'} : \Omega \to \mathcal{L}(X, Y)$ *est continue.*

**Théorème 1** ***(Arzéla-Ascoli)****[13]* *Soit* $J$ *une partie compacte d'un espace métrique* $(X, d)$ *avec* $(X, \|.\|_X)$ *espace de Banach,* $M$ *un sous ensemble de* $\mathcal{C}(J, X)$ *des fonctions continue muni de la norme de* $\sup$ *.*
$M$ *est* ***relativement compact*** *dans* $\mathcal{C}(J, X)$ *si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

*(1)* $M$ *est* ***uniformément borné*** *i.e. : il existe une constante* $\delta > 0$ *tel que :* $\forall\ t \in J, \forall\ f \in M$ *on a :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in J} |f(t)| \leq \delta.$$

*(2)* $M$ *est* ***équicontinu*** *i.e : pour tout* $\varepsilon$ *positive, il existe* $\delta(\varepsilon)$ *positive tel que :*

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_E < \varepsilon \quad \forall\ t_1, t_2 \in J\ ,\ \ d(t_1, t_2) < \delta(\varepsilon)\ \forall\ f \in M.$$

**Proposition 2 (opérateur inversible)** *[11] Soit* $T \in B(X, Y)$ *est inversible s'il existe un opérateur* $S \in B(Y, X)$ *qui vérifié* $T.S = I_Y$ *et* $S.T = I_X$
*où* $I_X$ *désigne l'identité sur* $X$ *et* $I_Y$ *désigne l'identité sur* $Y$
$S$ *sera dit l'inverse de* $T$ *et on note* $S = T^{-1}$.

## 1.2 Théoréme des fonctions implicites

L'un des plus importants outils d'analyse pour résoudre le probléme non linéaire .

$$F(x, y) = 0 \tag{1.1}$$

Où $F$ est une application de $U \times V$ à valeur dans $Z$. Les ensembles $U$ et $V$ désignent des ouvert de $X$ et $Y$ respectivement, où $X, Y, Z$ sont des espaces de Banach réels, est le théoréme des fonctions implicites.

**Théorème 2 (théoréme des fonctions implicites )** *[14] Supposons que* $F \in C^k(\mathbb{U}, Z)$ *est k fois différentiable satisfait*

$$F(x_0, y_0) = 0 \tag{1.2}$$

*et que* $D_y F(x_0, y_0)$ *la dérivée de* $F$ *par rapport à* $x$ *au point* $(x_0, y_0)$ *est bijective alors :*

*(1) Il exist un voisinage* $V \subset X$ *de* $x_0$ *et un voisinage* $W \subset Y$ *de* $y_0$ *tel que* $y \in W$*, le probléme* (1.2) *admet une unique solution* $x = \Phi(y) \in V$*.*

*(2) L'application* $\Phi : W \to V$ *est k fois différentiable .*
*Si* $F$ *est analytique, alors* $\Phi$ *est aussi analytique.*

*(3) Si* $D_y F(x_0, y_0) = 0$*, alors*

$$\Phi^{'}(y_0) = 0, \quad i.e \quad \Phi(y) = o(||y - y_0||) \tag{1.3}$$

**Remarque 2** *si*

$$F_y^{(n)}(x_0, y_0) = 0 \qquad \forall 1 \leq n \leq m$$

*alors*

$$\frac{d^j \Phi(y_0)}{dy^j} = 0 \qquad j = 1, ..., m$$

*donc*

$$\Phi(y) = o(||y - y_0||^m)$$

## 1.3 Equations différentielles ordinaires

Une équation differentielle sur l'espace de Banach E est une équation de la forme : $F(t, x, x^{'}, \ldots, x^{(k)}) = 0$ ou $k$ est un entier non null appelé l'ordre de l'équation $F$ est une fonction donnée sur $I \times U \times U_1 \ldots \times U_n$, $x$ est la fonction inconnue du I dans l'espace de Banach E et$x^{'}, \ldots, x^{(k)}$ sont ses dérivées successives .

### 1.3.1 Equations différentielles du premier ordre

Soit $U \subset \mathbb{R} \times E$ un sous-ensemble donné, une équation différentielle du premier ordre s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{1.4}$$

Où $f : U \to E$ une fonction continue .

**Définition 5** *[6] La solution de l'équation différentielle* (1.4) *est la fonction*

$$\varphi : I \to E$$

*où* $I \subset \mathbb{R}$ *désigne un intervalle, qui satisfait les deux conditions suivantes :*

*i)* $(t, \varphi(t)) \in U$ *pour tout* $t \in I$ *;*

*ii)* $\varphi^{'}(t) = f(t, \varphi(t))$ *pour tout* $t \in I$ *;*

**Proposition 3** *[6] Soient* $E = E_1 \times .... \times E_n$ *un produit fini d'espace de Banach,* $U \subset \mathbb{R} \times E_1 \times .... \times E_n$ *un ouvert.*
*Soit* $f$ *une fonction définie par*

$$\begin{array}{rcl} f : U & \to & E_1 \times .... \times E_n \\ (t, x_1, ..., x_n) & \mapsto & f(t, x_1, ...., x_n) = (f_1, ..., f_n) \end{array}$$

*où* $f_i : U \to E_i$ *des fonctions données.*
*alors, la solution de l'équation* (1.4) *est la fonction* $\varphi$ *définie par* $n$ *fonctions de* $C^1$*.*

$$\varphi_i : I \to E_i$$

*telle que :*

*i)* $(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)) \in U$*pour tout* $t \in I$ *;*

*ii)* $\varphi_i^{'}(t) = f_i(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$*pour tout* $t \in I$*.*
*avec* $1 \leq i \leq n$ *.*

*Le systéme est équivalent à :*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, ..., x_n) \quad 1 \leq i \leq n. \tag{1.5}$$

**Remarque 3** *pour* $E = \mathbb{R}^n$*. On a alors un systéme de* $n$ *équations différentielles scalaires, les fonctions données* $f_i$ *et les fonctions inconnues* $x_i = \varphi_i(t)$ *sont à valeurs scalaires.*

### 1.3.2 Equations différentielles d'ordre $n$

Une équation différentielle d'ordre $n$ s'écrit est de la forme :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right). \tag{1.6}$$

Où $f : U \to E$ est une fonction continue donnée, E désigne un espace de Banach ,U un ouvert de $\mathbb{R} \times \underbrace{E \times ... \times E}_{nfois}$;

**Définition 6** *[6] une solution de* (1.6) *est une fonction* $\varphi : I \to E$ *de classe* $C^n$ *qui satisfait aux deux conditions suivantes :*

*i)* $(t, \varphi(t), \varphi^{'}(t), ..., \varphi^{n-1}(t)) \in U$ *pour tout* $t \in I$*.*

*ii)* $\varphi^n(t) = f(t, \varphi(t), \varphi^{'}(t), ..., \varphi^{n-1}(t))$ *pour tout* $t \in I$*.*

**Proposition 4** *[6] L'etude de l'équation différentielle (1.6) est équivaut à un systéme du premier ordre de n équations :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x_1(t) \\ \\ \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{dx_{n-2}(t)}{dt} = x_{n-1}(t) \\ \\ \dfrac{dx_{n-1}(t)}{dt} = f(t, x(t), x_1(t), ..., x_{n-1}(t)) \end{cases}$$

**Proposition 5** *[6] La solution de l'équation différentielle* (1.6) *est un systéme de n fonctions inconnues $\varphi, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1} : I \to E$ de classe $C^1$, telles que*

$$\begin{cases} \varphi'(t) = \varphi_1(t), \varphi_1'(t) = \varphi_2(t), ..., \varphi_{n-2}'(t) = \varphi_{n-1}(t). \\ \varphi_{n-1}'(t) = f(t, \varphi(t), \varphi_1(t), ..., \varphi_{n-1}(t)). \end{cases}$$

*où $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}$ sont les dérivées successives de $\varphi$.*

## 1.4 Problème de Cauchy -Lipschitz

**Définition 7** *[6] Soient $U \subset E$ un ouvert connexe et $f : I \times U \to E$ une fonction continue. Le problème de Cauchy est donné par le systéme d'équations*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

*Résoudre le problème de Cauchy revient à trouver un intervalle $J \subset I$ contenant $t_0 \in I$ et des solutions $\varphi$ de classe $C^1$ sur $J$ satisfaisant* (1.7).

**Proposition 6** *[6] Une fonction $\varphi : I \to U$ est une solution du problème de Cauchy si et seulement si*

*(i) La fonction $\varphi$ est continue et $\forall t \in I, (t, \varphi(t)) \in I \times U$.*

*(ii)*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s)) ds.$$

**Définition 8** *On dit que $f$ est k-Lipschitzienne en $x$ s'il existe $k > 0$ telle que*

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq k||x_1 - x_2||.$$

*pour $(t, x_1) \in I \times E$ et $(t, x_2) \in I \times E$.*

**Définition 9** *On dit que $f$ est localement Lipschitzienne si pour tout point $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe un voisinage $V$ de $(t_0, x_0)$ dans $I \times U$ et $k > 0$ tels que l'on ait*

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq k||x_1 - x_2||.$$

*pour $(t, x_1), (t, x_2) \in V$.*

**Théorème 3 (théorème d'existence)** *[6] Soit $f$ une fonction continue sur $U$ à valeurs dans $E$ et localement Lipschitzienne par rapport à $x$. Alors :*
*$\forall (t_0, x_0) \in U, \exists \epsilon > 0$ telle que :*

$$\varphi \in C^1([t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon], E) \textit{est une solution de} (1.7).$$

**Théorème 4 (théorème d'unicité)** *[6]*

*Soit $U \subset \mathbb{R} \times E$ et soit $f : U \to E$ une fonction continue et k-lipschitzienne en $x$. Si on a deux solutions $\varphi_1$ et $\varphi_2 : I \to E$ de l'équation différentielle*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

*et si $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ ( avec $t_0 \in I$).*
*Alors les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont identiques dans l'intervalle $I$.*

**Remarque 4** *Si de plus $f$ est de classe $C^r (r \geq 1)$, alors $\varphi$ est de classe $C^{r+1}$.*

**Théorème 5** *[6] Si $f$ est continue et localement Lipschitzienne et si $(t_0, x_0) \in U$, il y a un plus grand intervalle $J_1 \ni t_0$ dans lequel existe une solution $\psi : J_1 \to E$ du probléme (1.7).*
*Cette solution $\psi$ est unique. Elle s'appelle la solution maximale du probléme (1.7).*

**Théorème 6** *[6] On suppose $f : I \times E \to E$ est continue et Lipschitzienne par rapport à $x$. Alors $\forall (t_0, x_0) \in I \times E$, il existe une unique $\varphi \in C^1(I, E)$ solution du problème (1.7).*

## 1.5 Equations différentielles dépendant d'un paramétre

Supposons que la fonction $f(t, x(t))$ dépend d'un paramètre $\lambda$ qui varie dans un espace topologique $L$. Nous considérons une équation différentielle

$$x^{'}(t) = f(t, x(t), \lambda). \tag{1.8}$$

où $f : I \times B(x_0, r) \times L \to E$ une fonction continue. $I$ désigne un intervalle compact et $B(x_0, r)$ désigne la boule fermé avec $||x - x_0|| \leq r$ dans E .
On suppose que

1. $||f(t,x,\lambda|| \leq M$ sur $I \times B(x_0,r) \times L$,
2. $||f(t,x_1,\lambda) - f(t,x_2,\lambda)|| \leq k||x_1 - x_2||$ pour $t \in I$

Autrement dit, $f$ est k-lipschitzienne en $x$, avec une constante k indépendante de t et de $\lambda$.

**Théorème 7** *[6]*
*Sous les conditions* 1 *et* 2. *Si on fixe* $\lambda \in L$, *alors l'équation* (1.8) *a une solution et une seule* $x = \varphi(t)$, *définie dans* $J = I \cap [t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}]$ *telle que* $\varphi(t_0) = x_0$.

**Remarque 5** *Cette solution dépend du choix du paramètre* $\lambda$ *notée* $\varphi(t,\lambda)$.

**Proposition 7** $\varphi(t,\lambda)$ *est une fonction continue du couple* $(t,\lambda) \in J \times L$.

## 1.6 Equations différentielles du second ordre avec des conditions aux limites

Dans cette section, nous allons nous intéresser à un problème aux limites qui est constitué d'une équation différentielle ordinaire du second ordre dont on recherche une solution avec des conditions aux limites du domaine de résolution [9].
Nous considérons l'équation différentielle du second ordre

$$x^{''}(t) = f(t,x(t),x^{'}(t)), \quad pour\ \ t \in I = ]0,1[ \tag{1.9}$$

Où $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue .
La solution de cette équation est une fonction $x : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont la dérivée vérifie (1.9).
On peut considérer des conditions aux limites à l'équation différentielle (1.9) pour étudier le probléme aux limites posé sur l'intervalle I=]0,1[, par exemple le cas des conditions de Dirichlet, on obtient

$$(I)\begin{cases} x^{''}(t) = f(t,x(t),x^{'}(t)) \quad \forall t \in \mathbb{I}, \\ x(0) = 0, \\ x(1) = 0. \end{cases}$$

**Définition 10** *[9]*
*Une fonction x(t) est une solution du probléme*

$$\begin{cases} x^{"}(t) = f(t,x(t),x^{'}(t)), \\ x(t_1) = x_1, \\ x(t_2) = x_2. \end{cases}$$

*avec* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$
*Si elle est de classe* $C^2$ *et satisfait* (1.9) *sur* $(t_1,t_2)$, *continue sur* $[t_1,t_2]$ *et qui satisfait les valeurs aux bord de* $t_1$ *et* $t_2$.

**Lemme 2** *[9]*

*La fonction $x \in \mathbb{R}$ est une solution du probléme (I) si et seulement si $x$ est continue et satisfait l'équation suivante*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), x^{'}(s)) ds$$

*où $G$ est la fonction de Green donnée par*

$$G(t,s) = \begin{cases} s(t-1) & si \quad 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(s-1) & si \quad 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$= ts - min(t,s), \quad (t,s) \in [0,1]^2$$

# Chapitre 2

# Equations différentielles impulsives

Les systèmes impulsifs sont devenus incontournables dans certains processus réels et phénomènes naturels. Une équation différentielle impulsive représente une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle ordinaire et des sauts instantanés de l'état appelés impulsions ([2], [8]et [12]).

## 2.1 Equations différentielles impulsives du premier ordre

Une équation différentielle impulsive est un système de la forme

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t, x(t)) \quad t \neq t_k \qquad\qquad t \in \mathbb{R}, \\ \qquad \Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k^-)) \quad k = 1, ..., r. \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction donnée. Les $\eta_k \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ sont des fonctions impulsives et $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k^-)$ .
Nous considérons l'équation différentielle impulsive

$$\begin{gathered} x^{'}(t) = f(t, x(t)), \quad t \neq t_k, t \in I = [0, 1], \\ \Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k^-)) \quad k = 1, ..., r. \end{gathered} \tag{2.1}$$

avec la condition initiale

$$x(0) = x_0. \tag{2.2}$$

**Définition 11** *Soient* $J_0 = [0, t_1], J_k = ]t_k, t_{k+1}],\ k = 1, ..., r$ *avec* $t_{r+1} = 1$ *et soit* $x_k$ *la réstriction d'une fonction* $x$ *à* $J_k$.
*Les solutions de l'équation* (2.1) *sont définies sur l'espace des fonctions continues par morceaux.*
$PC^0(I) := PC(I) = \{x : I \to \mathbb{R}^n, x \in C(J_k, \mathbb{R}^n), k = 0, ..., r,$ *tel que* $x(t_k^-)$ *et* $x(t_k^+)$ *existent et satisfont* $x(t_k) = x(t_k^-)$, *pour* $k = 1, ..., r\}$

**Lemme 3** $(PC(I), ||.||_{PC})$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$||x||_{pc} = max\{||x_k||_\infty, k = 1 \cdots, r\}$$

*où* $||x_k||_\infty = sup_{t \in ]t_k, t_{k+1}]}|x(t)|$.

## Preuve

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq PC(I,\mathbb{R}^n)$ une suite de Cauchy alors

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, p \geq n_0(\epsilon) \Rightarrow ||(x_k)_n - (x_k)_p||_{pc} < \epsilon$$

$$||x_n - x_p||_{pc} = max(||(x_k)_n - (x_k)_p||_\infty, k = 1, \cdots, r)$$

$$\Rightarrow ||(x_k)_n - (x_k)_p||_\infty \leq \epsilon, k = 1, \cdots, r$$

Pour $k = 1$

$$||x_n - x_p||_\infty = sup_{t\in[0,t_1]}|x_n(t) - x_p(t)|$$

$$\leq \epsilon$$

Puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $C([0,t_1],\mathbb{R}^n)$ alors $\exists x_1 \in C([0,t_1],\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_1(t), \forall t \in [0,t_1].$$

Pour $k = 2$ , on considére la suite des fonctions

$$\tilde{x_n}(t) = \begin{cases} x_n(t), t \in ]t_1, t_2] \\ x_n(t_1), t = t_1 \end{cases}$$

$$||\tilde{x_n} - \tilde{x_p}|| = sup_{t\in]t_1,t_2]}|\tilde{x_n} - \tilde{x_p}|$$

$$= sup_{t\in]t_1,t_2]}|x_n(t) - x_p(t)|$$

$$\leq \epsilon$$

Puisque $(\tilde{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de cauchy dans $C(]t_1,t_2],\mathbb{R}^n)$
alors il existe $x_2 \in C(]t_1,t_2],\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x_n}(t) = x_2(t), \forall t \in ]t_1, t_2].$$

De la même façon on trouve que

$$||(x_k)_n - (x_k)_p||_\infty = sup_{t\in]t_k,t_{k+1}]}|x_n(t) - x_p(t)|, k = 3, \cdots, r$$

$$\leq \epsilon$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{x_n}(t) = x_k(t), \forall t \in ]t_k, t_{k+1}], k = 3, \cdots, r$$

Posons

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [0, t_1] \\ x_2(t), & t \in ]t_1, t_2] \\ & \cdots \\ x_{n+1}(t), & t \in ]t_m, 1] \end{cases}$$

$||x_n - x||_{pc} = max_{t\in I}||(x_k)_n(t) - x_k(t)||_\infty, k = 1, \cdots, r$
de plus on peut facilement montre que $x \in PC(I, \mathbb{R}^n)$.
D'où $PC(I, \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.

**Définition 12** *La fonction $x : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution de l'équation* $(2.1)$ *si :*

*(1)* $(t, x(t)) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n$,

*(2) La fonction $x(t)$ est différentiable et $x' = f(t, x(t))$,*

*(3) La fonction $x(t)$ est continue sur $J_k$ et si $t = t_k$ , alors $x(t_k^+) = x(t_k^-)+\eta(x(t_k^-))$.*

**Définition 13** *Chaque solution $x$ de* $(2.1)$ *vérifiant* $\lim_{t\to 0^+} x(t) = x_0$ *est une solution du probléme* $(2.1) - (2.2)$. *De plus , $x \in C^1(J_k, \mathbb{R}^n)$.*

**Lemme 4** *Une fonction $x \in PC(I)$ est une solution du probléme* $(2.1) - (2.2)$ *si et seulement si*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)), t \in I.$$

## Preuve

Supposons que $x$ est une solution du probléme (2.1)-(2.2),alors

Pour $t \in [0, t_1]$, on a

$$\begin{aligned} x^{'}(t) = f(t, x(t)) \quad &\Rightarrow \quad \int_0^t x^{'}(s)ds = \int_0^t f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Pour $t \in ]t_1, t_2]$, on a

$$\begin{aligned} x^{'}(t) = f(t, x(t)) \quad &\Rightarrow \quad \int_{t_1}^t x^{'}(s)ds = \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow \quad x(t) - x(t_1^+) = + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow \quad x(t) = x(t_1^-) + \eta_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds \end{aligned}$$

Comme $x(t_1^-) = x(t_1)$,alors

$$x(t_1^-) = x_0 + \int_0^{t_1} f(s, x(s))ds$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \eta_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^t f(s, x(s))ds + \int_0^{t_1} f(s, x(s))ds \\ &= x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds + \eta_1(x(t_1^-)). \end{aligned}$$

Pour $t \in ]t_2, t_3]$, on a

$$\begin{aligned} x^{'}(t) = f(t, x(t)) \quad &\Rightarrow \quad \int_{t_2}^t x^{'}(s)ds = \int_{t_2}^t f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow \quad x(t) - x(t_2^+) = \int_{t_2}^t f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow \quad x(t) = x(t_2^-) + \eta_2(x(t_2^-)) + \int_{t_2}^t f(s, x(s))ds \\ &\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_0^{t_2} f(s, x(s))ds + \eta_1(x(t_1^-) + \eta_2(x(t_2^-)) + \int_{t_2}^t f(s, x(s))ds \end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{2} \eta_k(x(t_k^-)) + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Ainssi,
Pour $t \in ]t_k, t_{k+1}]$, on a

$$x(t) = x_0 + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)) + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

Par conséquent,

$$x(t) = x_0 + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)) + \int_0^t f(s, x(s))ds \quad \forall t \in I.$$

## 2.2 Existence de solution

**Théorème 8** *Soit $f : I \times \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur $J_k \times \mathbb{R}^n$ pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$,on suppose que*

$$\lim_{(t,y)\to(t_k,x)} f(t, y) < \infty, \qquad\qquad t > t_k.$$

*Alors ,il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ une solution de problème* (2.1) − (2.2).

## 2.3 Equations différentielles impulsives du second ordre

Nous considérons l'équation différentielle impulsive

$$\begin{aligned} x^{''}(t) = f(t, x(t), x^{'}(t)) \qquad & t \in I = [0, 1] \qquad t \neq t_k, \\ \Delta x(t_k) = \eta_k(x(t_k^-)) \qquad & k = 1, ..., r, \\ \Delta x^{'}(t_k) = \theta_k(x(t_k^-)) \qquad & k = 1, ..., r, \end{aligned} \tag{2.3}$$

avec la condition initiale

$$\begin{aligned} x(0) = a, \\ x^{'}(0) = b. \end{aligned} \tag{2.4}$$

**Définition 14** *Soient $J_0 = [0, t_1], J_k = ]t_k, t_{k+1}],\ k = 1, ..., r$ avec $t_{r+1} = 1$ et soit $x_k$ la réstriction d'une fonction $x$ à $J_k$.*
*Les solutions de l'équation* (2.3) *sont définies sur l'espace des fonctions continues par morceaux.*

$$\begin{aligned} PC^1(I) = \{x : I \to \mathbb{R}^n, x \in C^1(J_k, \mathbb{R}^n), k = 0, ..., r,\ \textit{tel que}\, x(t_k^-), x(t_k^+), x^{'}(t_k^-)\ \textit{et}\ x^{'}(t_k^+) \\ \textit{existent et satisfont}\ x(t_k) = x(t_k^-), x^{'}(t_k) = x(t_k^-)\ \textit{pour}\, k = 1, ..., r\} \end{aligned}$$

**Lemme 5** $PC^1\Big(I, ||.||_{PC^1}\Big)$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$||x||_{pc^1} = max\{||x||_\infty, ||x^{'}||_\infty, k = 1 \cdots, r\}.$$

*où* $||x||_\infty = sup_{t\in]t_k,t_{k+1}]}|x(t)|$.

**Définition 15** *La fonction $x : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution de l'équation* (2.3) *si :*

*(1)* $(t, x(t)) \in I \times \mathbb{R}^n$,

*(2) La fonction* $x(t)$ *est différentiable et* $x^{''} = f(t, x(t))$,

*(3) La fonction* $x(t)$ *est continue sur* $J_k$ *et si* $t = t_k$ *, alors* $x(t_k^+) = x(t_k^-) + \eta(x(t_k^-)), et\ x^{'}(t_k^+) = x^{'}(t_k^-) + \theta(x(t_k^-))$.

**Définition 16** *Chaque solution* $x$ *de* (2.3) *est une solution vérifiant* (2.4) *du probléme* $(2.3) - (2.4)$. *De plus ,* $x \in C^2(J_k, \mathbb{R}^n)$.

**Lemme 6** *Une fonction* $x \in PC^1(I)$ *est une solution du probléme* $(2.3) - (2.4)$ *si et seulement si*

$$x(t) = a + tb + \int_0^t (t-s) f(s, x(s), x^{'}(s)) ds + \sum_{0<t_k<t} [\eta_k(x(t_k^-) + \theta_k(x(t_k^-))(t - t_k)], \quad \forall t \in I.$$

## Preuve

Supposons que $x$ est une solution de $(2.3) - (2.4)$,alors
Pour $t \in ]0, t_1]$, on a

$$\begin{aligned}
x^{''}(t) &= f(t, x(t), x^{'}(t)) \\
\int_0^t x^{''}(t) &= \int_0^t f(s, x(s), x^{'}(s)) ds \\
x^{'}(t) &= b + \int_0^t f(s, x(s), x^{'}(s)) ds \\
\int_0^t x^{'}(s) ds &= \int_0^t b + \int_0^t \int_0^s f(\tau, x(\tau), x^{'}(\tau)) d\tau ds \\
\Rightarrow x(t) &= a + bt + \int_0^t (t-s) f(s, x(s), x^{'}(s)) ds.
\end{aligned}$$

Pour $t \in ]t_1, t_2]$ on a,

$$\begin{aligned}
x^{''}(t) = f(t, x(t), x^{''}(t)) \quad &\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t} x^{''}(s)ds = \int_{t_1}^{t} f(s, x(s), x^{'}(s))ds \\
&\Rightarrow \quad x^{'}(t) - x^{'}(t_1^+) = \int_{t_1}^{t} f(s, x(s), x^{'}(s))ds \\
&\Rightarrow \quad x^{'}(t) = x^{'}(t_1^-) + \theta_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^{t} f(s, x(s), x^{'}(s))ds \\
&\Rightarrow \quad x^{'}(t) = b + \int_{0}^{t_1} f(s, x(s), x^{'}(s))ds + \theta_1(x(t_1^-)) \\
&\qquad\qquad + \int_{t_1}^{t} f(s, x(s), x^{'})ds \\
&\Rightarrow \quad x^{'}(t) = b + \theta_1(x(t_1^-)) + \int_{0}^{t} f(s, x(s), x^{'}(s))ds \\
&\Rightarrow \quad \int_{t_1}^{t} x^{'}(s)ds = \int_{t_1}^{t} b + \int_{t_1}^{t} \theta_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^{t} \int_{0}^{s} f(\tau, x(\tau), x^{'}(\tau))d\tau ds \\
&\Rightarrow \quad x(t) - x(t_1^+) = (t - t_1)b + (t - t_1)\theta_1(x(t_1^-)) \\
&\qquad\qquad + \int_{t_1}^{t} \int_{0}^{s} f(\tau, x(\tau), x^{'}(\tau))d\tau ds \\
&\Rightarrow \quad x(t) = x(t_1^-) + \eta(x(t_1^-)) + (t - t_1)b + (t - t_1)\theta_1(x(t_1^-)) \\
&\qquad\qquad + \int_{t_1}^{t} \int_{0}^{s} f(\tau, x(\tau), x^{'}(\tau))d\tau ds \\
&\Rightarrow \quad x(t) = a + bt_1 + \int_{0}^{t_1} (t - s)f(s, x(s), x^{'}(s))ds + \eta_1(x(t_1^-)) + (t - t_1)b \\
&\qquad + (t - t_1)\theta_1(x(t_1^-)) + \int_{t_1}^{t} (t - s)f(s, x(s), x^{'}(s))ds \\
&\Rightarrow \quad x(t) = a + bt + \eta_1(x(t_1^-) + (t - t_1)\theta_1(x(t_1^-)) \\
&\qquad\qquad + \int_{0}^{t} (t - s)f(s, x(s), x^{'}(s))ds.
\end{aligned}$$

Pour$t$ $\in ]t_2,t_3]$, on a

$$
\begin{aligned}
x^{''}(t)=f(t,x(t),x^{'}(t)) \quad &\Rightarrow \quad \int_{t_2}^{t} x^{''}(s)ds=\int_{t_2}^{t} f(s,x(s),x^{'}(s))ds\\
&\Rightarrow \quad x^{'}(t)-x^{'}(t_2^{+})=\int_{t_2}^{t} f(s,x(s),x^{'}(s))ds\\
&\Rightarrow \quad x^{'}(t)=x^{'}(t_2^{-})+\theta_2(x(t_2^{-}))+\int_{t_2}^{t} f(s,x(s),x^{'}(s))ds\\
&\qquad\qquad =b+\theta_1(x(t_1^{-}))+\int_{0}^{t_2} f(s,x(s),x^{'}(s))ds+\theta_2(x(t_2^{-}))\\
&\qquad\qquad\quad +\int_{t_2}^{t} f(s,x(s),x^{'}(s))ds\\
&\Rightarrow \quad x^{'}(t)=b+\sum_{k=1}^{2}\theta_k(x(t_k^{-}))+\int_{0}^{t} f(s,x(s),x^{'}(s))ds\\
&\Rightarrow \quad \int_{t_2}^{t} x^{'}(s)ds=\int_{t_2}^{t}(b+\sum_{k=1}^{2}\theta_k(x(t_k^{-})))ds+\int_{t_2}^{t}\int_{0}^{s} f(\tau,x(\tau),x^{'}(\tau))d\tau ds\\
&\Rightarrow \quad x(t)-x(t_2^{+})=b(t-t_2)+(t-t_2)\sum_{k=1}^{2}\theta_k(x(t_k^{-}))\\
&\qquad\qquad\quad +\int_{t_2}^{t}(t-s)f(s,x(s),x^{'}(s))ds\\
&\Rightarrow \quad x(t)=x(t_2^{-})+\eta_2(x(t_2^{-})+b(t-t_2)+(t-t_2)\sum_{k=1}^{2}\theta_k(x(t_k^{-}))\\
&\qquad\qquad\quad +\int_{t_2}^{t}(t-s)f(s,x(s),x^{'}(s))ds\\
&\Rightarrow \quad x(t)=a+bt_2+\eta_1(x(t_1^{-})+(t_2-t_1)\theta_1(x(t_1^{-})\\
&\qquad\qquad\quad +\int_{0}^{t_2}(t-s)f(s,x(s),x^{'}(s))ds\\
&\qquad +\eta_2(x(t_2^{-})+b(t-t_2)+(t-t_2)\sum_{k=1}^{2}\theta_k(x(t_k^{-}))\\
&\qquad\qquad\quad +\int_{t_2}^{t}(t-s)f(s,x(s),x^{'}(s))ds\\
&\Rightarrow \quad x(t)=a+bt+\sum_{k=1}^{2}\eta_k(x(t_k^{-})+(t-t_1)\theta_1(x(t_1^{-}))+(t-t_2)\theta_2(x(t_2^{-}))\\
&\qquad\qquad\quad +\int_{0}^{t}(t-s)f(s,x(s),x^{'}(s))ds\\
&\Rightarrow \quad x(t)=a+bt+\sum_{k=1}^{2}I_k(x(t_k^{-}))+\sum_{k=1}^{2}(t-t_k)\eta_k(y(t_k^{-}))\\
&\qquad\qquad\quad +\int_{0}^{t}(t-s)f(s,x(s),x^{'}(s))ds.
\end{aligned}
$$

Pour $t \in ]t_k, t_{k+1}]$, on a

$$x(t) = a + bt + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)) + \sum_{0<t_k<t} (t - t_k)\theta_k(x(t_k^-)) +$$

$$\int_0^t (t - s) f(s, x(s), x^{'}(s)) ds.$$

donc pour $t \in I$

$$x(t) = a + bt + \int_0^t (t - s) f(s, x(s), x^{'}(s)) ds + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k^-)) + \sum_{0<t_k<t} (t - t_k)\theta_k(x(t_k^-)).$$

# Chapitre 3

# Probléme aux limites d'une équation différentielle impulsive du second ordre

Les équations différentielles impulsives jouent un rôle primordial dans les sciences appliquées.[16]
Il y a beaucoup de traveaux qui ont étudié l'existence des solutions pour les problèmes aux limites et spécifiquement les équations différentielles impulsives du second ordre ([9]).
Dans ce chapitre, nous allons nous intéressé à l'étude de l'existence de solution d'équation différentielle du second ordre avec des effets impulsifs [1].
Nous considérons le problème aux limites d'équations différentielles impulsives du second ordre

$$\begin{aligned}
x^{''}(t) &= f(t,x,x^{'},\lambda) \qquad t \neq t_k, k=1,2,...,r; t \in I=[0,1], && (3.1)\\
\Delta x(t_k) &= \eta_k(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda), && (3.2)\\
\Delta x^{'}(t_k) &= \theta_k(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda), && (3.3)\\
x(0) = x(1) &= 0. && (3.4)
\end{aligned}$$

On suppose $f : I^{'} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction assez réguliére , $\eta_k \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}), \theta_k \in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}^*$ , où $I^{'} = I - \{t_k\}_{k=1}^{r}$ , vérifiant les hypothéses suivantes :

$$\begin{aligned}
&(H1) && f(t,0,0)=0, \qquad \forall t \in I,\\
&(H2) && \eta_k(0,0,\lambda^*)=0, \qquad \text{pour certain } \lambda^* \in \mathbb{R},\\
&(H3) && \theta_k(0,0,\lambda^*)=0, \qquad \text{pour certain } \lambda^* \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

## 3.1 Préliminaire

**Définition 17** *L'espace des fonctions impulsives $PC^i(I)$ est :*

*pour tout $i \geq 0$*
$PC^i(I) := \{x \in C^i(I, \mathbb{R}).\ x^{(j)}$ *est continue à gauche de* $t_k$ *et* $x^{(j)}(t_k^+)$ *existe pour tout k,j;* $0 \leq k \leq r, 0 \leq j \leq i\}$.

**Lemme 7** *[1]*

*a)* $(PC^i(I), ||.||_i)$ *est un espace de Banach muni de la norme*

$$||w||_i = max(||w||_\infty, ||w^{'}||_\infty, ..., ||w^{(i)}||_\infty),$$

*Où*

$$||w||_\infty = sup\{|w(t)|, t \in I\},$$

*pour $w \in PC(I)$.*

*b)* $\mathfrak{L}(PC^i(I))$ *est un espace de Banach pour les opérateurs linéaires bornés sur* $PC^i(I)$ *muni de la norme*

$$||L||_{\mathfrak{L}(PC^i(I))} = sup_{||x|| \leq 1} ||Lx||_i,$$

*Où $x \in PC^i(I)$ et $L \in \mathfrak{L}(PC^i(I))$.*

**Définition 18** *Une fonction $x \in PC^2(I)$ est dite solution de* $(3.1) - (3.4)$ *si elle satisfait toutes les équations* $(3.1), (3.2), (3.3)$ *et* $(3.4)$.

**Lemme 8** *La fonction $(x, \lambda) \in PC^2(I)$ est une fonction de $(3.1) - (3.4)$ si et seulement si $(x, \lambda) \in PC^1(I)$ et elle satisfait l'équation suivante.*

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), x^{'}(s), \lambda) ds + \sum_{0<t_k<t} \Big[\eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda) + \theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)(t - t_k)\Big]$$

$$-t \sum_{0<t_k<1} \Big[\eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda) + \theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)(1 - t_k)\Big],$$

*Où $G$ est la fonction de green associée au probléme sans impulsions.*

$$G(t,s) = \begin{cases} s(t-1) & si \quad 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(s-1) & si \quad 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

### Preuve

On pose $x = y + z$ tel que

$$y^{''}(t) = f(t, x(t), x^{'}(t), \lambda),\ t \in I,$$

$$y(0) = y(1) = 0,$$

et

$$z^{''}(t) = 0$$
$$z(0) = z(1) = 0$$

avec

$$\Delta z(t_k) = \eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)\ k = 1, ..., r$$
$$\Delta z^{'}(t_k) = \theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)$$

D'un côté ,on a

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s), x^{'}(s), \lambda) ds.$$

De l'autre côté ,on a

$$z(t) = z^{'}(0)t + \sum_{0<t_k<t} \Big[x(t_k^+) - x(t_k)\Big] + \sum_{0<t_k<t} \Big[x^{'}(t_k^+) - x^{'}(t_k)\Big](t - t_k),\ t \in I$$

En effet ,pour $t \in [0, t_1]$,on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t z^{''}(s)ds = \int_0^t 0ds \ &\Rightarrow\ z^{'}(t) - z^{'}(0) = 0 \\
&\Rightarrow\ z^{'}(t) = z^{'}(0) \\
\int_0^t z^{'}(s)ds = \int_0^t z^{'}(0)ds \ &\Rightarrow\ z(t) - z(0) = z^{'}(0)t \\
&\Rightarrow\ z(t) = z^{'}(0)t + z(0) \\
&\Rightarrow\ z(t) = z^{'}(0)t.
\end{aligned}$$

Pour $t \in ]t_1, t_2]$ , on a

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^t z^{''}(s)ds = \int_{t_1}^t 0ds \ &\Rightarrow\ z^{'}(t) - z^{'}(t_1^+) = 0 \\
&\Rightarrow\ z^{'}(t) = z^{'}(t_1^+) \\
\int_{t_1}^t z^{'}(s)ds = \int_{t_1}^t z^{'}(t_1^+)ds \ &\Rightarrow\ z(t) = z(t_1^+) + z^{'}(t_1^+)(t - t_1).
\end{aligned}$$

Or $z(t_1^+) - z(t_1) = \eta_1(x(t_1), x^{'}(t_1), \lambda), z^{'}(t_1^+) - z^{'}(t_1) = \theta_1(x(t_1), x^{'}(t_1), \lambda)$ et $z(t_1) = z^{'}(0)t_1, z^{'}(t_1) = z^{'}(0)$.
Donc

$$z(t) = z^{'}(0)t + \eta_1(x(t_1), x^{'}(t_1), \lambda) + \theta_1(x(t_1), x^{'}(t_1), \lambda)(t - t_1).$$

Raisonnons par récurrence .On suppose que pour $t \in ]t_{k-1}, t_k]$ ,on a

$$\begin{aligned} z(t) &= z^{'}(0)t + \sum_{j=1}^{j=k-1} \left[x(t_j^+) - x(t_j)\right] + \sum_{j=1}^{j=k-1} \left[x^{'}(t_j^+) - x^{'}(t_j)\right](t - t_j) \\ &= z^{'}(0)t + \sum_{j=1}^{j=k-1} \eta_j(x(t_j), x^{'}(t_j), \lambda) + \sum_{j=1}^{j=k-1} \theta_j(x(t_j), x^{'}(t_j), \lambda)(t - t_j) \end{aligned}$$

pour $t \in ]t_k, t_{k+1}]$,on a

$$\int_{t_k}^{t} z^{''}(s)ds = \int_{t_k}^{t} 0ds \quad \Rightarrow \quad z^{'}(t) = z^{'}(t_k^+)$$
$$\int_{t_k}^{t} z^{'}(s)ds = \int_{t_k}^{t} z^{'}(t_k^+)ds \quad \Rightarrow \quad z(t) = z(t_k^+) + z^{'}(t_k^+)(t - t_k).$$

Or $z(t_k^+) = z(t_k) + \eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda), z^{'}(t_k^+) = z^{'}(t_k) + \theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)$
et

$$\begin{aligned} z(t_k) &= z^{'}(0)t_k + \sum_{j=1}^{j=k-1} \eta_j(x(t_j), x^{'}(t_j), \lambda) + \sum_{j=1}^{j=k-1} \theta_j(x(t_j), x^{'}(t_j), \lambda)(t - t_j) \\ z^{'}(t_k) &= z^{'}(0) + \sum_{j=1}^{j=k-1} \theta_j(x(t_j), x^{'}(t_j), \lambda) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} z(t) &= z(t_k) + \eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda) + z^{'}(t_k) + \theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)(t - t_k) \\ &= z^{'}(0)t_k + \sum_{j=1}^{j=k} \eta_j(x(t_j), x^{'}(t_j), \lambda) + \sum_{j=1}^{j=k-1} \theta_j(x(t_j), x^{'}(t_j), \lambda)(t_k - t_j) \\ &\qquad + \left(z^{'}(0) + \sum_{j=1}^{j=k} \theta_j(x(t_j), x^{'}(t_j), \lambda)\right)(t - t_k) \\ &= z^{'}(0)t + \sum_{j=1}^{j=k} \eta_j(x(t_j), x^{'}(t_j), \lambda) + \sum_{j=1}^{j=k} \theta_j(x(t_j), x^{'}(t_j), \lambda)(t - t_j). \end{aligned}$$

Ainsi

$$z(t) = z^{'}(0)t + \sum_{0<t_k<t} \eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda) + \sum_{0<t_k<t} \theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)(t - t_k), \qquad t \in I$$

Pour $t = 1$ , on a

$$z(1) = z^{'}(0) + \sum_{0<t_k<1} \eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda) + \sum_{0<t_k<1} \theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)(1 - t_k) = 0$$

Donc

$$z^{'}(0) = -\sum_{0<t_k<1}\eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda) - \sum_{0<t_k<1}\theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)(1-t_k)$$

Ainsi

$$z(t) = \sum_{0<t_k<t}\eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda) + \sum_{0<t_k<t}\theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)(t-t_k)$$

$$-t\sum_{0<t_k<1}\eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda) - t\sum_{0<t_k<1}\theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)(1-t_k) \qquad t \in I$$

## 3.2 Existence de solution du probléme aux limites impulsif

On définit l'opérateur linéaire L sur $PC^2(I)$ par

$$(Lx)(t) = x^{''}(t) \qquad x \in D(L),$$

Où

$$D(L) = \{x \in PC^2(I), x(0) = x(1) = 0\},$$

**Proposition 8** *[3] L'opérateur L est inversible et $L^{-1} : PC(I) \to PC^2(I)$ est défini par*

$$(L^{-1}x)(t) = \int_0^1 G(t,s)x(s)ds.$$

Soit F l'opérateur Nemitskii défini par :

$$F : PC^1(I) \to PC(I)$$

$$(F(x,\lambda))(t) := f(t, x(t), x^{'}(t), \lambda), \qquad x \in I.$$

On définit la fonction $\Phi : PC^2(I) \to PC^2(I)$ par

$$\Phi(x,\lambda)(t) = \sum_{0<t_k<t}\Big\{\eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda) + \theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)(t-t_k)\Big\}$$

$$-t\sum_{0<t_k<1}\Big\{\eta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda) + \theta_k(x(t_k), x^{'}(t_k), \lambda)(1-t_k)\Big\} \qquad t \in I.$$

Considérons l'application $H : PC^2(I) \to PC^2(I)$ défini par

$$H(x,\lambda) = L^{-1}FJ(x,\lambda) + \Phi(x,\lambda).$$

Où J est l'injection compacte de $PC^2(I)$ dans $PC^1(I)$ avec $J(x,\lambda) = (x,\lambda)$.
Alors on a

$$L^{-1}[F(J(x,\lambda))](t) = \int_0^1 G(t,s)f(s, x(s), x^{'}(s), \lambda)ds.$$

**Lemme 9** *Les opérateurs $\Phi$ et $H$ sont compacts.*

**Lemme 10** *pour $(x,\lambda) \in PC^2(I) \times \mathbb{R}$ est une solution de (3.1)-(3.4)si et seulement si*
$H(x,\lambda) = x$.

**Remarque 6** $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}$ *désignent les premiers dérivées partielles de $f$ par rapport aux premier et deuxiéme variables.*

*De même* $\left(\dfrac{\partial \eta_k}{\partial u}, \dfrac{\partial \eta_k}{\partial v}\right)$ *et* $\left(\dfrac{\partial \theta_k}{\partial u}, \dfrac{\partial \theta_k}{\partial v}\right)$ *désignent les premiers dérivées partielles de $\eta_k$ et $\theta_k$.*

**Proposition 9** *pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons* $\dfrac{\partial H}{\partial x}(.,\lambda) : PC^2(I) \to \mathfrak{L}(PC^2(I))$ *et*

$$\begin{aligned}
\Big|\Big|\frac{\partial H}{\partial x}(x,\lambda)\Big|\Big|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} \quad \leq & \quad \int_0^1 \Big|\Big|G(t,s)\Big|\Big|_{L_\infty}\left[\Big|\frac{\partial f}{\partial u}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda)\Big| + \Big|\frac{\partial f}{\partial v}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda)\Big|\right] ds \\
& +2\sum_{0<t_k<1}\Big\{\Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big| + \Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big| \\
& +\Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big| + \Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big|\Big\}.
\end{aligned}$$

# Preuve

Comme

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,\lambda).\varphi = \frac{\partial (L^{-1} \circ FJ)}{\partial x}(x,\lambda).\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\lambda).\varphi$$

Où $\varphi \in PC^2(I)$,avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (L^{-1} \circ FJ)}{\partial x}(x,\lambda).\varphi \quad &= \quad \int_0^1 G(t,s)\frac{\partial f}{\partial x}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda).\varphi ds \\
&= \quad \int_0^1 G(t,s)\left[\frac{\partial f}{\partial u}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda).\varphi(s) + \frac{\partial f}{\partial v}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda).\varphi^{'}(s)\right] ds.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\lambda)\cdot\varphi = & \sum_{0<t_k<t}\Big\{\Big[\frac{\partial \eta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\cdot\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\cdot\varphi^{'}(t_k)\Big] \\
& +\Big[\frac{\partial \theta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\cdot\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\cdot\varphi^{'}(t_k)\Big](t-t_k)\Big\} \\
& -t\sum_{0<t_k<t}\Big\{\Big[\frac{\partial \eta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\cdot\varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\cdot\varphi^{'}(t_k)\Big] \\
& +\Big[\frac{\partial \theta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\cdot\varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\cdot\varphi^{'}(t_k)\Big](1-t_k)\Big\}.
\end{aligned}$$

alors, nous avons

$$\begin{aligned}\Big|\Big|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\lambda)\Big|\Big|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} &= sup_{||\varphi||\leq 1}\Big|\Big|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\lambda)\cdot\varphi\Big|\Big|_2 \\ &\leq 2\sum_{0<t_k<1}\Big\{\Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big|+\Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big| \\ &\quad+\Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big|+\Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big|\Big\}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Big|\Big|\frac{\partial (L^{-1}\circ FJ)}{\partial x}(x,\lambda)\Big|\Big|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} &= sup_{||\varphi||_2\leq 1}\Big|\Big|\frac{\partial (L^{-1}\circ FJ)}{\partial x}(x,\lambda)\cdot\varphi\Big|\Big| \\ &\leq \int_0^1\Big|\Big|G(t,s)\Big|\Big|_{L\infty}\Big[\Big|\frac{\partial f}{\partial u}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda)\Big| \\ &\quad+\Big|\frac{\partial f}{\partial v}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda)\Big|\Big]\,ds.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\Big|\Big|\frac{\partial H}{\partial x}(x,\lambda)\Big|\Big|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} &\leq \Big|\Big|\frac{\partial (L^{-1}\circ FJ)}{\partial x}(x,\lambda)\Big|\Big|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))}+\Big|\Big|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,\lambda)\Big|\Big|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} \\ &\leq \int_0^1\Big|\Big|G(t,s)\Big|\Big|_{L\infty}\Big[\Big|\frac{\partial f}{\partial u}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda)\Big|+\Big|\frac{\partial f}{\partial v}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda)\Big|\Big]\,ds \\ &\quad+2\sum_{0<t_k<1}\Big\{\Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big|+\Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big| \\ &\quad+\Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big|+\Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\Big|\Big\}.\end{aligned}$$

Soit l'opérateur

$$M(x,\lambda)=x-H(x,\lambda). \tag{3.5}$$

**Théorème 9** *Si $I-\dfrac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda^*)$ est inversible pour quelque valeur $\lambda^*\in\mathbb{R}$, alors il existe $\delta>0$ tel que pour $|\lambda-\lambda^*|<\delta$, le probléme (3.1)-(3.4) admet une unique solution $(x,\lambda)$.*

# Preuve

Puisque $H(0,\lambda^\star)=0$, alors $M(0,\lambda^\star)=0$ et on a $\dfrac{\partial M}{\partial x}(0,\lambda^*)=I-\dfrac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda^*)$ est un operateur inversible, alors d'après le théorème des fonctions implicites il existe $\delta>0$ tel que $\Big|\lambda-\lambda^*\Big|<\delta$. Donc le probléme (3.1)-(3.4) admet une unique solution $(x,\lambda)$.

**Lemme 11** *Si* $\left|\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda^*)\right|\right|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$, *alors* $I - \dfrac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda^*)$ *est inversible.*

**Corollaire 1** *Si* $\left|\left|\dfrac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda^*)\right|\right|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} < 1$, *alors il existe* $\delta > 0$ *pour* $\left|\lambda - \lambda^*\right| < \delta$, *alors le probleme (3.1)-(3.4) admet une unique solution* $(x_\lambda, \lambda)$.

**Corollaire 2** *Si*

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|\left|G(t,s)\right|\right|_{L_\infty}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial u}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial v}(s,x(s),x^{'}(s),\lambda)\right|\right]ds \\
&+2\sum_{0<t_k<1}\Big\{\left|\frac{\partial \eta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\right| + \left|\frac{\partial \eta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\right| \\
&+\left|\frac{\partial \theta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\right| + \left|\frac{\partial \theta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k),\lambda)\right|\Big\} < 1,
\end{aligned}$$

*alors il existe* $\delta > 0$ *pour* $\left|\lambda - \lambda^*\right| < \delta$, *alors le probleme (3.1)-(3.4) admet une unique solution* $(x_\lambda, \lambda)$.

## 3.3 Applications

**Exemple 1** *Nous considérons le probléme Homogéne de* $(3.1) - (3.4)$

$$\begin{aligned}
x^{''}(t) &= \lambda f(t,x,x^{'}) \qquad t \neq t_k, k = 1,2,...,r; t \in I = [0,1] \\
\Delta x(t_k) &= \lambda \eta_k(x(t_k),x^{'}(t_k)), \\
\Delta x^{'}(t_k) &= \lambda \theta_k(x(t_k),x^{'}(t_k)), \\
x(0) = x(1) &= 0.
\end{aligned}$$

*avec*

$$f(t,0,0) = 0,$$

$$\eta_k(0,0) = 0,$$

$$\theta_k(0,0) = 0.$$

*nous avons ,*

$$\begin{aligned}
H(x,\lambda) = \lambda\Big\{\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s),x^{'}(s))ds + \sum_{0<t_k<t}\Big[\eta_k(x(t_k),x^{'}(t_k)) + \theta_k(x(t_k),x^{'}(t_k))(t-t_k)\Big] \\
-t\sum_{0<t_k<1}\Big[\eta_k(x(t_k),x^{'}(t_k)) + \theta_k(x(t_k),x^{'}(t_k))(1-t_k)\Big]\Big\}.
\end{aligned}$$

*pour* $\lambda \in \mathbb{R}$, *nous avons* $\dfrac{\partial H}{\partial x}(.,\lambda) : PC^2(I) \to \mathfrak{L}(PC^2(I))$ *et*

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,\lambda).\varphi = \lambda \int_0^1 G(t,s)\left[\frac{\partial f}{\partial u}(s,x(s),x^{'}(s)).\varphi(s) + \frac{\partial f}{\partial v}(s,x(s),x^{'}(s)).\varphi^{'}(s)\right] ds$$

$$+\lambda \sum_{0<t_k<t} \Big\{ \Big[\frac{\partial \eta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k)) \cdot \varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k)) \cdot \varphi^{'}(t_k)\Big]$$

$$+\Big[\frac{\partial \theta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k)) \cdot \varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k)) \cdot \varphi^{'}(t_k)\Big](t-t_k)\Big\}$$

$$-t\lambda \sum_{0<t_k<t} \Big\{ \Big[\frac{\partial \eta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k)) \cdot \varphi(t_k) + \frac{\partial \eta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k)) \cdot \varphi^{'}(t_k)\Big]$$

$$+\Big[\frac{\partial \theta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k)) \cdot \varphi(t_k) + \frac{\partial \theta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k)) \cdot \varphi^{'}(t_k)\Big](1-t_k)\Big\}.$$

*donc*

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{\partial H}{\partial x}(x,\lambda)\Big\|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} \leq\ & \Big|\lambda\Big|\Big[\int_0^1 \Big\|G(t,s)\Big\|_{L_\infty}\Big[\Big|\frac{\partial f}{\partial u}(s,x(s),x^{'}(s))\Big| + \Big|\frac{\partial f}{\partial v}(s,x(s),x^{'}(s))\Big|\Big] ds \\ & +2\sum_{0<t_k<1}\Big\{\Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k))\Big| + \Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k))\Big| \\ & +\Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k))\Big| + \Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k))\Big|\Big\}\Big].\end{aligned}$$

*Si*

$$\begin{aligned}& \Big|\lambda\Big|\Big[\int_0^1 \Big\|G(t,s)\Big\|_{L_\infty}\Big[\Big|\frac{\partial f}{\partial u}(s,x(s),x^{'}(s))\Big| + \Big|\frac{\partial f}{\partial v}(s,x(s),x^{'}(s))\Big|\Big] ds \\ & +2\sum_{0<t_k<1}\Big\{\Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k))\Big| + \Big|\frac{\partial \eta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k))\Big| \\ & +\Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial u}(x(t_k),x^{'}(t_k))\Big| + \Big|\frac{\partial \theta_k}{\partial v}(x(t_k),x^{'}(t_k))\Big|\Big\}\Big] < 1.\end{aligned}$$

*alors d'aprés le corollaire 1 il existe* $\delta > 0$ *pour*
$\Big|\lambda - \lambda^*\Big| < \delta$ *,donc le probleme admet une unique solution* $(x, \lambda)$.

**Exemple 2**

$$\begin{cases} x^{''}(t) = \lambda a x(t) + b x^{'}(t), t \in I, \\ \Delta x(t_1) = \lambda x(t_1), \\ \Delta x^{'}(t_1) = x^{'}(t_1), \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases}$$

*nous avons*

$$H(x,\lambda) = \int_0^1 G(t,s)(a\lambda x(s) + b x^{'}(s))ds + \Big[\lambda x(t_1) + x^{'}(t_1)(t-t_1)\Big] - t\Big[\lambda x(t_1) + x^{'}(t_1)(1-t_1)\Big].$$

*en remplace la fonction de Green G on obtient*

$$H(x,\lambda) = \int_0^t (t-s)(a\lambda x(s) + bx^{'}(s))ds + \int_t^1 s(t-1)(a\lambda x(s) + bx^{'}(s))ds$$
$$+\Big[\lambda x(t_1) + x^{'}(t_1)(t-t_1)\Big] - t\Big[\lambda x(t_1) + x^{'}(t_1)(1-t_1)\Big].$$

*comme*

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,\lambda).\varphi = \int_0^t (t-s)\Big[a\lambda.\varphi(s) + b.\varphi^{'}(s)\Big]ds + \int_t^1 s(t-1)\Big[a\lambda.\varphi(s) + b.\varphi^{'}(s)\Big]ds$$

$$+\Big[\lambda.\varphi(t_1) + \varphi^{'}(t_1)(t-t_1)\Big] - t\Big[\lambda.\varphi(t_1) + \varphi^{'}(t_1)(1-t_1)\Big].$$

*Donc*

$$\begin{aligned} \Big|\Big|\frac{\partial H}{\partial x}(x,\lambda).\varphi\Big|\Big|_{\mathfrak{L}(PC^2(I))} &\leq \int_0^1 \Big|(t-s)\Big|\Big[|a\lambda + b|\Big]ds. \\ &\leq \Big|a\lambda + b\Big|(t - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

*donc*
*si* $t < \dfrac{1}{|a\lambda + b|} + \dfrac{1}{2}$,*alors d'aprés le corollaire 1 il existe* $\delta > 0$ *pour* $\Big|\lambda - \lambda^*\Big| < \delta$ *,*
*donc le probleme admet une unique solution* $(x,\lambda)$.

# Bibliographie


[1] DD Bainov and PS Simeonov. Systems with impulsive effect, 1989.

[2] Drumi Bainov and Pavel Simeonov. *Impulsive differential equations : periodic solutions and applications*, volume 66. CRC Press, 1993.

[3] Zokha Belattar and Abdelkader Lakmeche. Impulsive boundary value problem with parameter. *Georgian Mathematical Journal*, 22(3) :331–339, 2015.

[4] Mouffak Benchohra and P Eloe. On nonresonance impulsive functional differential equations with periodic boundary conditions. *Appl. Math. E-Notes*, 1 :65–72, 2001.

[5] Mouffak Benchohra, Johnny Henderson, and Sotiris Ntouyas. *Impulsive differential equations and inclusions*, volume 2. Hindawi Publishing Corporation New York, 2006.

[6] Henri Cartan. Calcul différentiel, hermann, paris, 1967. *MR*, 36 :6243.

[7] Marc Choisy, Jean-François Guégan, and Pejman Rohani. Dynamics of infectious diseases and pulse vaccination : teasing apart the embedded resonance effects. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 223(1) :26–35, 2006.

[8] Xilin Fu, Baoqiang Yan, and Yansheng Liu. Introduction of impulsive differential systems, 2005.

[9] Ronald B Guenther. *Problèmes aux limites non linéaires pour certaines classes d'équations différentielles ordinaires*, volume 93. Presses de l'Université de Montréal, 1985.

[10] P Hartman. On local homeomorphisms of euclidean spaces, bol. soc. math. mexicana 5 (1960) 220–241 ; p. hartman, ordinary differential equations, j, 1964.

[11] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*, volume 132. Springer Science & Business Media, 2013.

[12] Vangipuram Lakshmikantham, Pavel S Simeonov, et al. *Theory of impulsive differential equations*, volume 6. World scientific, 1989.

[13] S. Lang. *Analyse réelle.* Cours. Mathématiques. InterEditions, 1977.

[14] Tian Ma and Shouhong Wang. *Bifurcation theory and applications*, volume 53. World Scientific, 2005.

[15] A Ouahab. *Some Contributions in Impulsive differential equations and inclusions with fixed and variable times.* PhD thesis, Ph. D. Dissertation, University of Sidi-Bel-Abbes (Algeria), 2006.

[16] Anatolii Mikhailovich Samoilenko and NA Perestyuk. *Impulsive differential equations.* world scientific, 1995.

[17] S.Djebali. *Le degré topologique :Théorie et application.* PhD thesis, Departement de mathematique ,ENS,(Algeria), 2006.

## Résumé

Dans ce mémoire ,nous étudions l'existence d'un problème aux limite pour une équation différentielle du second ordre contenant un paramètre , de plus les effets impulsif contenant le même paramètre, en utilisant le théorème des fonctions implicites .



## Abstract

In this memory, we present the existence of the boundary problem for a second-order differential equation containing a parameter, in addition the impulsive effects containing the same parameter. Our goal is to study the existence of solutions through the implicit functions theorem.



## الملخص

في هذه الأطروحة ، ندرس وجود مشكلة حدود لمعادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تحتوي على معاملات. بالإضافة إلى التأثيرات المندفعة التي تحتوي على نفس المعامل. عن طريق استخدام نظرية الوظائف الضمنية.