جامعة بلحاج بوشعيب – عين تموشنت –
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية والتسيير
قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة السنة الثالثة ليسانس

تخصص: اقتصاد كمي وتحليل اقتصادي

محاضرات في مقياس الاقتصاد القياسي

إعداد الدكتورة: سي محمد فايزة

السنة الجامعية:2021 -2022

فهرس المحتويات

المحاضرة	الصفحة
مقدمة	03
تمهيد عن المقياس	04
المحاضرة الأولى: نظرية الارتباط	07
المحاضرة الثانية: تقدير الانحدار الخطي البسيط	12
المحاضرة الثالثة: المميزات العددية والخصائص الإحصائية للمعلمات المقدرة	18
المحاضرة الرابعة: اختبار الفرضيات	23
المحاضرة الخامسة: مجال الثقة للمعلمات والتنبؤ	31
المحاضرة السادسة: تقدير الانحدار الخطي المتعدد	34
المحاضرة السابعة: المميزات العددية والخصائص الإحصائية للمعلمات المقدرة	45
المحاضرة الثامنة: اختبار الفرضيات وجودة النموذج	50
المحاضرة التاسعة: مجال الثقة للمعلمات والتنبؤ	58
تمارين مع الحلول	60
قائمة المراجع	79

مـــقدمـــــة

يهدف اختبار النظريات الاقتصادية المختلفة، المساعدة في اتخاذ القرارات ووضع السياسات وكذا التطبيق العملي لهذه النظريات الاقتصادية وذلك من خلال توظيف العلاقات الرياضية على الظواهر الاقتصادية في أرض الواقع تم الاعتماد على الاقتصاد القياسي باعتباره أحد فروع علم الاقتصاد الذي يختص بالتقدير الكمي للعلاقات بين المتغيرات مستخدما تلك النظريات الاقتصادية والأساليب الإحصائية

يعدّ علم الاقتصاد القياسي علماً حديثاً نسبياً إذا ما قورن بالعلوم الاقتصادية الأخرى حيث استعمل مصطلح الاقتصاد القياسي أول مرة عام 1926 من قبل الاقتصادي النروجي فريش.Frisch على الرغم من المحاولات التي ظهرت في القرن التاسع عشر والتي كانت ذات طابع اقتصادي قياسي، كعمل الإحصائي الألماني أرنست إنغل(1821-1896)- E.Engel - الذي وضع قوانينه الخاصة بالدخل والاستهلاك في ضوء بيانات ميزانية الأسرة،

في عام 1919 نشر الاقتصادي الأمريكي بيرسون W.M.Pearson طريقته الخاصة بتحليل الدورات الاقتصادية التي طبقت في تحليل هذه الدورات في عدد من البلدان الرأسمالية، كما طبقت في الاتحاد السوفييتي سابقاً أيضاً في إنجاز عدد من الأبحاث التي وضعت في خدمة سياسة الدولة السوفييتية في مرحلة الانتقال من الرأسمالية إلى الاشتراكية.

وتعد محاولات تقدير دوال منحنيات العرض والطلب للمنتجات الزراعية في الولايات المتحدة الأمريكية في مطلع الثلاثينات من القرن العشرين محاولات أولى أيضاً في مجال تطبيق مبادئ الاقتصاد القياسي.

نقترح في هذه المطبوعة دروسا في الاقتصاد القياسي من الانحدار الخطي البسيط، المتعدد كذا معنوية المقدرات ،مدى جودة النموذج المقدر وقدرته على التنبؤ مع إعطاء أمثلة محلولة بطريقة عملية و بيداغوجية لتمكين الطالب من التحكم الجيد في القوانين المعطاة في المحاضرة من جهة ومن جهة أخر تشجيع الطالب على استخدام برمجيات الاقتصاد القياسي التي تعتبر كضرورة ملحة في وقتنا الحاضر.

تمهيد حول المقياس

1. مفهوم الاقتصاد القياسي

يعتبر الاقتصاد القياسي أسلوب من أساليب التحليل الاقتصادي الكمي، يهتم بصياغة وتقدير واختيار وتحليل النماذج الاقتصادية مستخدماً النظرية الاقتصادية والإحصاء والرياضيات، بهدف اختيار النظريات الاقتصادية المختلفة من ناحية والمساعدة في عملية اتخاذ القرارات ووضع السياسات الاقتصادية من ناحية أخرى.

2. أهداف الاقتصاد القياسي:

يهدف الاقتصاد القياسي إلى تحقيق ثلاثة أهداف هي:

- اختيار النظريات الاقتصادية والتحقق من مدى انطباق هذه النظرية مع الواقع الفعلي
- المساعدة في عملية اتخاذ القرارات الاقتصادية من خلال التقديرات الكمية للعلاقات الاقتصادية بين المتغيرات
- المساعدة في وضع وتقييم السياسات الاقتصادية من خلال التنبؤات عن المتغيرات الاقتصادية في المستقبل.

3. المكتسبات القبلية:

من متطلبات المادة أن يكون الطالب على إطلاع على:

- النظرية الاقتصادية.
- النظرية الرياضية.
- النظرية الإحصائية.

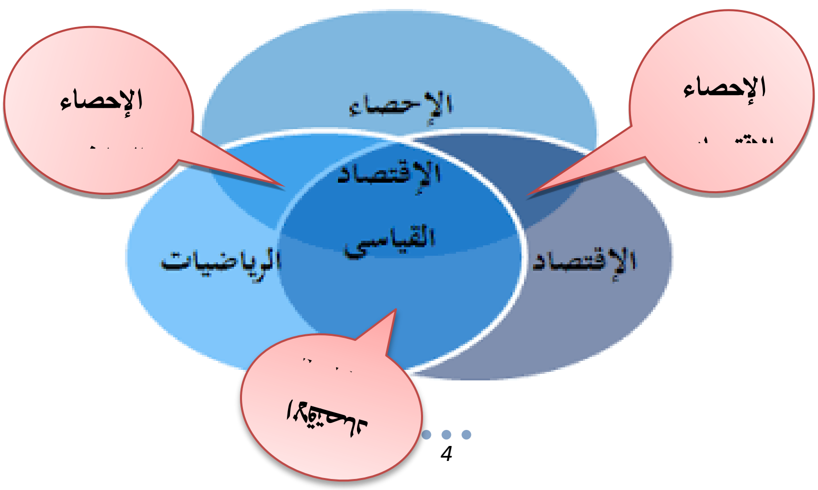
4. شروط تطبيق الاقتصاد القياسي:

- ضرورة وجود نظرية اقتصادية للظاهرة المدروسة
- إمكانية ترجمة النظرية الاقتصادية إلى رياضية
- إمكانية تطبيق أساليب الاستدلال الإحصائي على فرضيات هذه النظرية

5. علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى:

هو عبارة عن التزاوج بين ثلاثة علوم: الإحصاء، الرياضيات، الاقتصاد.

الشكل رقم 01: علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى



- **أول تزاوج هو بين النظرية الاقتصادية والنظرية الإحصائية** ليتشكل لنا **الإحصاء الاقتصادي** يعتبر المادة الخام التي يعتمد عليها الاقتصاد القياسي وخاصة في جمع البيانات الإحصائية للسلاسل الزمنية
- **التزاوج الثاني بين النظرية الاقتصادية والنظرية الرياضية** ليتشكل لنا **الاقتصاد الرياضي** يهتم بتحويل النظرية الاقتصادية من شكلها المبسط إلى شكلها الرياضي
- **التزاوج الثالث بين النظرية الإحصائية والنظرية الرياضية** ليتشكل لنا **الإحصاء الرياضي** يهتم بالتقدير، اختبار الفرضيات، تقييم النموذج، الخروج بتطابق أو عكسه بين النظرية الاقتصادية والنموذج المقدر

6. منهجية البحث في الاقتصاد القياسي:

✦ <u>تعريف النموذج القياسي:</u>

النماذج الاقتصادية الأساسية هي نماذج إحصائية مستخدمة في الاقتصاد القياسي. يحدد نموذج الاقتصاد القياسي العلاقة الإحصائية التي يُعتقد أنها تصف العلاقية بين المتغيرات والعوامل الاقتصادية المختلفة المتعلقة بظاهرة اقتصادية معينة.

النموذج الاقتصادي القياسي يمكن أن يستمد من حتمية النموذج الاقتصادي من خلال السماح لعدم اليقين، أو من النموذج الاقتصادي الذي يحمل بحد ذاته شيء من العشوائية. ومع ذلك، من الممكن أيضًا استخدام نماذج الاقتصاد القياسي غير المرتبطة بأي نظرية اقتصادية محددة

✦ <u>مراحل بناء النموذج القياسي:</u>

يمر بناء النموذج القياسي من خلال عدد مراحل يمكن إيجازها فيما يلي:

<u>الشكل رقم 02:</u> مراحل بناء النموذج القياسي

المرحلة الأولى: الصياغة النظرية و إنشاء الفرضيات

كمثال وحسب النظرية الاقتصادية وجود تأثير للدخل على الاستهلاك، ومنه يمكن صياغة النظريات التالية:

- **الفرضية العدمية:** عدم وجود تأثير للدخل على الاستهلاك
- **الفرضية البديلة:** وجود تأثير للدخل على الاستهلاك

المرحلة الثانية: الصياغة الرياضية للعلاقات الاقتصادية

يقصد بتوصيف أو تعيين النموذج صياغة العلاقات الاقتصادية محل البحث في صورة رياضية حتى يمكن قياس معاملتها باستخدام ما يسمى بالطرق القياسية، وتنطوي هذه المرحلة على الخطوات التالية:

- تحديد متغيرات النموذج
- تحديد الشكل الرياضي للنموذج: مثلا: $Y_t=A+BX_t+U_t$
- المتغير التابع Y_t: المتغير المستقل X_t: المتغير العشوائي: U_t
- تحديد القيم والإشارات المسبقة للمعالم

المرحلة الثالثة: تجميع البيانات الخاصة بالمتغيرات

في هذه المرحلة يتم جمع البيانات مثلا الإنفاق الاستهلاكي X والدخل المتاح للإنفاق Y

المرحلة الرابعة: تقدير النموذج القياسي

ويعتبر هذا التقدير عمل فني يتطلب الإلمام الكامل من الباحث القياسي بكافة أساليب التحليل القياسي حيث يتم معالجة المعلومات المتوفرة رياضيا وإحصائيا وذلك بتقدير معلمات النموذج، من بين الطرق الممكن استخدامها في عملية التقدير ومنها: طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية

المرحلة الخامسة: تقييم النموذج القياسي

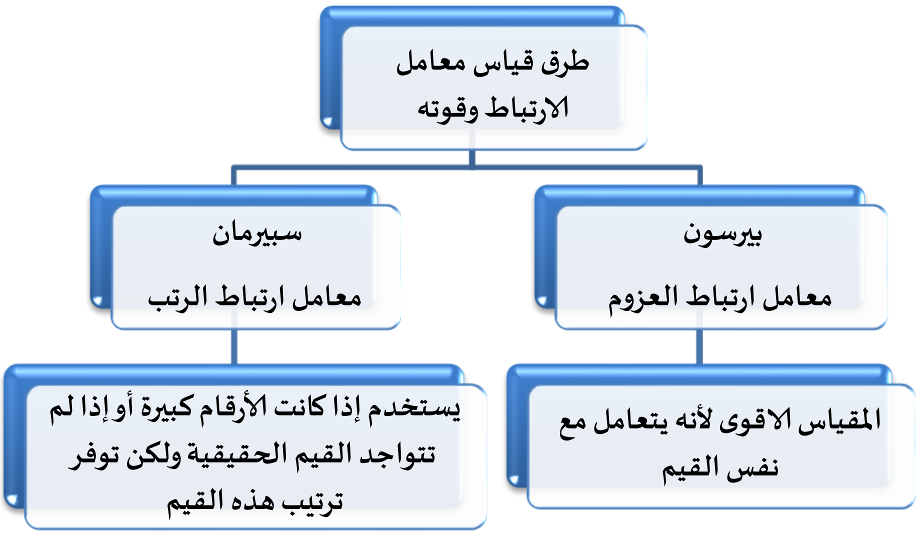
وتمثل هذه المرحلة الأخيرة من مراحل البحث في الاقتصاد القياسي ويتم التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير التابع على أساس قيم المتغير المستقل ولكن قبل استخدام النموذج المقدر في التنبؤ يجب التأكد من جودة الأداء العام للنموذج المقدر وبعدئذ يتم التطبيق النتائج التي تم التوصل إليها على الواقع واستخدامها في عملية التنبؤ، لغرض رسم السياسات واتخاذ القرار.

المحاضرة الأولى: نظــرية الارتبـــاط

أبرز ما يمكن الاهتمام به عند دراسة الارتباط بشكل عام هو معرفة إذا كانت هناك علاقة بين متغيرين أو مجموعة من المتغيرات. ويمكن أن تكون العلاقة بين ظاهرتين ولتكن X وY علاقة طردية: إذا كان تقييم Y تميل إلى الارتفاع كلما ارتفعت قيم X، أما إذا كانت قيم Y تميل إلى الانخفاض كلما ارتفعت قيم X في قالب أن الارتباط سالب .

1. طرق قياس معامل الارتباط

<u>الشكل رقم 03</u>: طرق قياس معامل الارتباط



- **معامل الارتباط البسيط:** r

والذي يدعى أيضا بمعامل ارتباط بيرسون، وهو مؤشر إحصائي <u>يستخدم لقياس القوة الارتباطية الخطية بين متغيرين كميين</u> أي(يمكن قياسهما كميا)، كقياس العلاقة بين الدخل الشهري للأسرة وحجم إنفاق العائلة الشهري، ويرجع الفضل للعالم الإنجليزي كارلبيرسون (Karl Pearson) ويمكن إيجاده وفق الصيغة التالية:

$$r_{xx} = \frac{cov(x,y)}{\delta_x \delta_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

حيث أن:

$\mathbf{cov(x,y)}$ التباين المشترك أو التغاير بين XوY حيث :

$$cov(x,y) = \frac{\sum x_i \sum y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n}$$

<u>δ_x: الانحراف المعياري ل Xهو δ_x</u>

$$var(x) = \delta_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2$$

الانحراف المعياري ل Y هو y :

$$var(y) = \delta_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2$$

n : عدد المشاهدات

ويمكن أن نكتب مع أمل ارتباط بيرسون بصيغة بديلة على النحو التالي:

$$r_{xx} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}$$

- **خصائص معامل الارتباط البسيط**

يتصف معامل الارتباط البسيط لـ بيرسون بالخصائص التالية:

أن قيمة معامل الارتباط البسيط r تقع ضمن المجال $-1 \leq r \leq 1$ وعليه:

- (r=1): يوجد ارتباط تام موجب (علاقة طردية)؛
- (r=-1): يوجد ارتباط تام سالب (علاقة عكسية)؛
- (r=0): لا يوجد ارتباط بين المتغيرين (ارتباط معدوم).

- **معامل ارتباط الرتب:**

يستخدم معامل ارتباط الرتب عندما تكون البيانات وصفية ويمكن إعطاءها رتبة معينة، وهنا كنوع ان من معاملات ارتباط الرتب وهما معامل ارتباط الرتب لسبيرمان ومعامل ارتباط الرتب لكندال

- **معامل ارتباط سبيرمان**

ويعطى معامل ارتباط الرتب بالعلاقة التالية:

$$rs = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث أن:

rs: معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

: هي الفرق بين رتب أزواج المتغيرين

n:عدد المشاهدات

- **معامل ارتباط كندال:**

يستخدم معامل ارتباط كندال في حساب العلاقة بين متغيرين في القياس الرتبي، أي نفس الغرض من استخدام معامل ارتباط سبيرمان في قياس ارتباط الرتب، وقيمته أقل من قيمتي معامل بيرسون ومعامل سبيرمان،

ويمكن إيجاده وفق الصيغة التالية:

$$r_{x.y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D}{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

حيث أن:

$\sum_{i=1}^{n} D$: عدد الرتب الأكبر منها الموجود على اليسار – عدد الرتب الأصغر منها الموجود على اليمين

- **معنوية معامل ارتباط:**

الفرض الصفري: لا يوجد ارتباط بين المتغيران $H_0: r=0$

الفرض البديل: يوجد ارتباط بين المتغيران $H_1: r\neq 0$

$$t_{cal} = \frac{|r|}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} \quad t_{tab} = t_{n-k}$$

وبمقارنة قيمة t المحسوبة و t الجدولية يكون:

t المحسوبة أكبر من t المجدولة قبولا لفرض البديل.

tالمحسوبة أقل من tالمجدولة قبولا لفرض الصفري

المثال الأول:

لدراسة العلاقة بين أعمار طلاب إحدى المدارس x بالسنة وأوزانهم y بالكيلوجرام – اختير12طالب فحصلنا على النتائج الآتية:

$\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = 157$	
$\sum_{i=1}^{12}(y_i-\bar{y})^2 = 230.67$	$\sum_{i=1}^{12}(x_i-\bar{x})^2 = 274.25$

أ- احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين.

ب- اختبر المعنوية الإحصائية عند مستوى دلالة إحصائية 0.05 ؟

الحل:

أ- احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين.

$$r_{xx} = \frac{cov(x,y)}{\delta_x \delta_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{157}{\sqrt{274.25}\sqrt{230.67}} = \mathbf{0.62}$$

ب- اختبر المعنوية الإحصائية عند مستوى دلالة إحصائية 0.05 ؟

الفرض الصفري: لا يوجد ارتباط بين المتغيران $H_0{:}r=0$

الفرض البديل: يوجد ارتباط بين المتغيران $H_1{:}r\neq0$

$$t_{cal}=\frac{|0.62|}{\sqrt{\frac{1-0.62^2}{12-2}}}=2.53$$

$$t_{tab}=t_{12-2}=\mathbf{2.228}$$

بما أن t المحسوبة أكبر من t المجدولة قبولا لفرض البديل أي يوجد ارتباط بين المتغيران

المثال الثاني:

لدراسة العلاقة بين x وy حصلنا على النتائج الآتية:

x	16	18	23	24	28	29	26	31	32	34
y	20	24	28	22	32	28	32	36	41	**41**

ا – احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين؟

ب – احسب معامل ارتباط سبيرمان بين المتغيرين؟

ج -**اختبر** المعنوية الإحصائية عند مستوى دلالة إحصائية 0.05 ؟

الحل:

أ- حساب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين.

t	x	y	X^2	Y^2	Xy
1	16	20	256	400	320
2	18	24	324	576	432
3	23	28	529	784	644
4	24	22	576	484	528
5	28	32	784	1024	896
6	29	28	841	784	812
7	26	32	676	1024	832
8	31	36	961	1296	1116
9	32	41	1024	1681	1312
10	34	41	1156	1681	1394
Σ	261	304	7127	9734	8286

$$r_{xx}=\frac{\mathbf{10.8286-261.304}}{\sqrt{\mathbf{10.7127-(261)^2}}\sqrt{\mathbf{10.9734-(304)^2}}}=\frac{\mathbf{3516}}{(56.11)(70.17)}=\mathbf{0.89}$$

ب- احسب معامل ارتباط سبيرمان بين المتغيرين؟

t	*x*	*y*	*RANKx*	*RANKy*	*D*	D^2
1	16	20	1	1	0	**0**
2	18	24	2	3	-1	**1**
3	23	28	3	4.5	-1.5	**2.25**
4	24	22	4	2	-2	**4**
5	28	32	6	6.5	0 .5	**0.25**
6	29	28	7	4.5	2.5	**6.25**
7	26	32	5	6.5	1.5	**2.25**
8	31	36	8	8	0	**0**
9	32	41	9	9.5	-0.5	**0.25**
10	34	41	10	9.5	0.5	**0.25**

$$rs=1-\frac{6\sum_{i=1}^{n}D^2}{n(n^2-1)}=1-\frac{16.50}{10(100-1)}=1-\frac{16.50}{990}=\mathbf{0.98}$$

ت- اختبر المعنوية الإحصائية عند مستوى دلالة إحصائية 0.05 ؟

الفرض الصفري: لا يوجد ارتباط بين المتغيران $H_0{:}r=0$

الفرض البديل : يوجد ارتباط بين المتغيران $H_1{:}r\neq0$

$$t_{cal}=\frac{|0.98|}{\sqrt{\frac{1-0.98^2}{10-2}}}=13.92$$

$$t_{tab}=t_{10-2}=2.306$$

بما أن t المحسوبة أكبر من t المجدولة قبول الفرض البديل **أي يوجد ارتباط بين المتغيران**

المحاضرة الثانية : تقدير الانحدار الخطي البسيط

1. التعريف بالنموذج

هو علاقة خطية بين متغيرين ويهتم بدراسة أثر أحد المتغيرين ويسمى بالمتغير المستقل على المتغير الثاني ويسمى المتغير التابع ومن الأمثلة على ذلك الإنفاق والدخل العائلي.ومن ثم يمكن عرض نموذج الانحدار الخطي في شكل معادلة خطية من الدرجة الأولى، تعكس المتغير التابع كدالة في المتغير المستقل كما يلي:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$$

حيث أن:

y_i: هو المتغير التابع

x_i: هو المتغير المستقل

α: الثابت الذي يعكس قيمة المتغير التابع في حالة انعدام المتغير المستقل أي x_i=0.

β: ميل الحط المستقيم، ويعكس مقدار التغير في y_i إذا تغيرت x_i بوحدة واحدة.

u_i: هو الخطأ، والذي تمت إضافته إلى المعادلة لمعالجة بعض المشاكل كأخطاء في القياس أو بعض العوامل الغير القابلة للقياس

2. المتغير العشوائي

- **أسباب إضافة المتغير العشوائي: يمكن إرجاع أسباب إضافة المتغير العشوائي إلى عدة أسباب أهمها ما يلي:**
  - حذف بعض المتغيرات من الدالة المدروسة؛
  - السلوك العشوائي للجنس البشري؛
  - الصياغة الناقصة للنموذج القياسي؛
  - أخطاء التجميع؛
  - أخطاء القياس.
- **الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي :**
  - القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي مساوية للصفر أي أنّ: $E(\varepsilon_I)$ =0
  - تباين المتغير العشوائي ثابت عند كل قيمة من قيم X_i

أي:

$$var(u_i) = E[u_i - E(u_i)]^2 \Rightarrow E[u_i - 0]^2 \Rightarrow E[{u_i}^2] = \sigma^2$$

مع العلم أن:

$$E(u_i) = 0$$

وفي حالة عدم ثبات التباين للخطأ العشوائي تظهر مشكلة عدم تجانس التباين

- المتغير العشوائي يتوزع توزيعا طبيعيا حول القيمة المتوقعة أو الوسط الحسابي بمعنى أن المتوسط الحسابي للمتغير العشوائي مساوي للصفر وتباين ^{2} أي: $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
- قيم المتغير العشوائي غير مرتبطة بالمتغيرات المستقلة،أي انعدام التباين المشترك

$$COV(u_i, X_i) = 0$$

- قيم المتغير العشوائي غير مترابطة فيما بينها

$$COV(\ _i, u_j) = 0$$

3. تقدير النموذج الخطي البسيط:

يمكن الحصول على مقدرات المعلمات بعدة طرق ومنها هذه الطريقة والتي تعتبر هذه الطريقة هي الأحسن مقارنة بمثيلتها حيث تعتمد على الحصول على مقدرات الخاصة للانحدار التالي:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$$

وتهدف هذه الطريقة إلى تصغير وتدنئة مجموع مربعات البواقي إلى أدني قيمه لها بمعنى آخر مجموع مربعات الأخطاء يكون أقل ما يمكن، بحيث يجري تعريف مكون يليق عليه مجموع المربعات البواقي $\sum u_i^2$ والتي تمثل انحرافات القيم المقدرة $\hat{Y}$ عن القيم الحقيقية أو الفعلية للمتغير التابع Y_i

ويعبر عنه رياضيا بالكتابة على الشكل التالي:

- معادلة خط الانحدار هو كما يلي:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i \qquad \text{................(1)}$$

- النموذج المقدر هو كما يلي:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X \qquad \text{........................(2)}$$

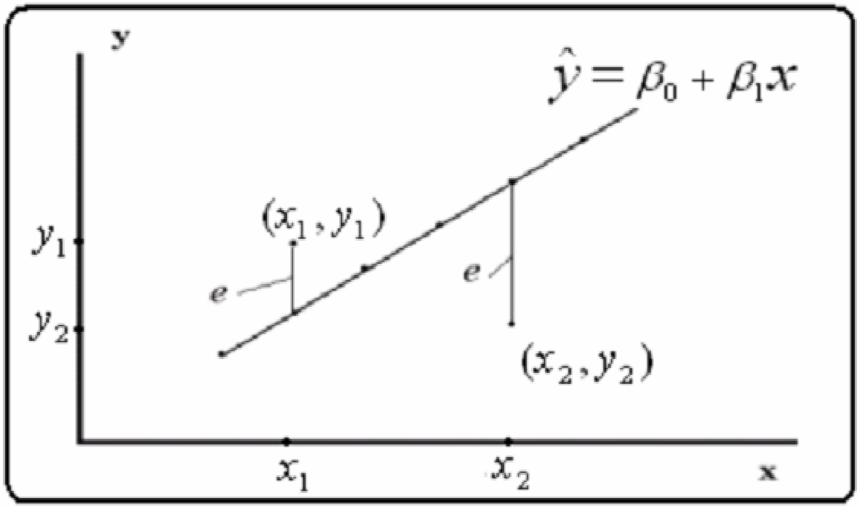
- معادلة البواقي: الفرق بين المعادلتين (1) و (2) نجد $\boldsymbol{u_i}$

$$\boldsymbol{u_i = y_i - \hat{y}_i}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{u_i = y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i)}$$

حيث يعبر عن الفرق بين القيمة الفعلية y، والقيمة المقدرة $\hat{y} = b + a\,x$ ويمكن توضيح هذا الخطأ على الشكل التالي لنقط الانتشار:



نرمز إلى مجموع مربعات البواقي ب $\sum u^2$ حيث:

$$u_t^2 = (Yi - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X))^2$$
$$\sum u_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)^2$$

وبالتالي تصغير مجموع مربعات البواقي

$$Min\sum u_i^2 = Min\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)^2$$

- **اشتقاق المعلمات المقدرة:**

باستخدام التفاضل الجزئي على قيم المقدرات.

- نقوم بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة $\hat{\alpha}$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\alpha}} = (2)\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-1) = 0$$
$$\Rightarrow (-2)\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة على (-2) وإدخال المجموع Σ

مع العلم أن α عدد ثابت فأن $\Sigma\alpha = n\alpha$

$$\sum Y_i - \sum \hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum Xi = 0$$
$$\Rightarrow \sum Y_i - n\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum Xi = 0$$

ثم بقسمة المعادلة على n نحصل على مايلي:

وبالتالي نتحصل على

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}\frac{\sum Xi}{n} \quad ....(3)$$

المعادلة التالية:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

- نقوم بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة $\hat{\beta}$

$$\frac{\partial(\sum u_i^2)}{\partial\hat{\beta}} = (2)(\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-X) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(\sum u_i^2)}{\partial\hat{\beta}} = -2\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة على (2) وإدخال المجموع Σ نحصل على:

$$-\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

$$\Rightarrow -\sum XY + \sum X\hat{\alpha} + \sum \hat{\beta}X^2 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \hat{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \hat{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

بالتعويض بقيمة $\hat{\alpha}$ المعادلة (3)نحصل على

$$\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \left(\frac{\sum Y}{n} - \hat{\beta}\frac{\sum X}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) + \hat{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

بالتوزيع و بالضرب فيnنحصل على:

$$n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) - \hat{\beta}(\sum X)^2 + n\hat{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

$$\Rightarrow n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = -\hat{\beta}(\sum X)^2 + n\hat{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

$$\Rightarrow n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \hat{\beta}\left(n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - (\sum X)^2\right]$$

نحصل على

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

ومن المفيد استخدام صيغ أخرى:

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}$$

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}$$

وبتعويض قيمة $\hat{\beta}$ في المعادلة رقم (4)نحصل على المقدرة $\hat{\alpha}$

مثال:

البيانات التالية تبين الكميات المعروضة من سلعة معينة (y) و سعر السلعة (x)

الكمية y المطلوبة	18	20		22	20	22	24	23	21	22
السعر X	6	8	9	10	7	11	12	11	10	8

- أرسم شكل الانتشار وحدد ما إذا كانت توجد علاقة خطية تقريبية بين Y وX؟
- قدر نموذج الانحدار الخطي بين Y وX.
- تقدير الكمية المعروضة عند السعر 40

الحل:

تقدير معادلة انحدار الكمية المعروضة على السعر كالتالي:

الطريقة الأولى:

- تكوين الجدول التالي:

	X	Y	XY	x_i^2	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - y)$	$(x_i - \bar{x})(y_i - y)$
1	6	18	108	36	-3,2	10,24	-3,3	10,56
2	8	20	160	64	-1,2	1,44	-1,3	1,56
3	9	21	189	81	-0,2	0,04	-0,3	0,06
4	10	22	220	100	0,8	0,64	0,7	0,56
5	7	20	140	49	-2,2	4,84	-1,3	2,86
6	11	22	242	121	1,8	3,24	0,7	1,26
7	12	24	288	144	2,8	7,84	2,7	7,56
8	11	23	253	121	1,8	3,24	1,7	3,06
9	10	21	210	100	0,8	0,64	-0,3	-0,24
10	8	22	176	64	-1,2	1,44	0,7	-0,84
Σ	92	213	1986	880		33,6		26,4

- تقدير كلا من $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ كما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x)^2} = \frac{10 * 1986 - (92 * 213)}{10 * 880 - (92)^2}$$

$$= \frac{19860 - 19596}{8800 - 8464} = 0.78$$

الطريقة الثانية

-

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - y)}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{26.40}{33.6} = 0.78$$

لحساب $\hat{\alpha}$ نستعمل المعادلة التالية: $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{92}{10} = 9.2 \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{213}{10} = 21.3$$

ومنه: $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{\ } \Rightarrow \hat{\alpha} = 21.3 - 0.78 * 9.2 \Rightarrow \hat{\alpha} = 14.124$

معادلة الانحدار المقدرة هي:

$$\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i \Rightarrow \hat{y}_i = 14.124 + 0.78\, x_i$$

- تقدير الكمية المعروضة عند السعر 20. بالتعويض في معادلة الانحدار المقدرة (X=40)

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x \Rightarrow \hat{y}_i = 14.124 + 0.78(40) = 45.324$$

المحاضرة الثالثة: المميزات العددية والخصائص الإحصائية للمعلمات

1. الخصائص الإحصائية:

للمعلمات المقدرة بطريقة المربعات الصغرى ثلاث خصائص إحصائية وهي خاصية عدم التحيز وخاصية الكفاءة وخاصية الاتساق

- **خاصية عدم التحيز:**

التحيز هو ذلك الفرق بين مقدرة ما ووسط توزيعها نقولأن $\widehat{\beta}$ هوأفضل مقدر غير متحيز للمعلمة B اذا كانت وقع المعلمة المقدرة $\widehat{\beta}$ يساوي B حيث وبعد إجراء التقدير نجد أن متوسط المقدرات هو نفسه القيمة الحقيقية.

- **خاصية الكفاءة:**

تنطلق هذه الفكرة من نظرية غوس ماركوف نقول أن المعلمة المقدرة $\widehat{\beta}$ مقدر كفؤ إذا كان يتميز بأصغر تباين.

- **خاصية الاتساق :**

نقول أن المعلمات المقدرة هي مقدرات متسقة إذا تحقق مايلي :

كلما كبر حجم العينة فان قيمة المعلمة المقدرة $\widehat{\beta}$ تقترب من قيمة المعلمة الحقيقية B،وتباين المعلمة المقدرة يقترب من الصفر، يمكن التعبير رياضيا ذلك كما يلي:

أولا:

$$\lim_{n\to\infty} E(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \beta \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\widehat{\alpha}) = \alpha$$

ثانيا:

$$\lim_{n\to\infty} v(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \beta \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \mathrm{v}(\widehat{\alpha}) = \alpha$$

2. المميزات العددية:

نتناول في هذه الفقرة المميزات العددية للمعلمات المقدرة لنموذج الانحدار البسيط ليكن النموذج الهيكلي الخطي البسيط التالي:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$$

حيث النموذج المقدر له هو :

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X$$

- **التوقع الرياضي والتباين للمعلمات المقدرة:**

¬ التوقع الرياضي ل $\widehat{\beta}$

$$\hat{B} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})y_i}{\sum(X_i - \bar{X})^2} \qquad \hat{B} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(\propto + Bx + \varepsilon_i)}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{B} = \frac{\propto \sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} + \frac{B \sum x \sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} + \frac{\sum \varepsilon_i \sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{B} = \frac{\propto \sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} + \frac{B \sum(X_i - \bar{X})^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2} + \frac{\sum \varepsilon_i \sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

لدينا: $E(\varepsilon_i) = 0$ و $\sum(\ {}_i - \bar{X}) = 0$ ومنه:

$$\hat{B} = B + \frac{\sum \varepsilon_i \sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

بوضع: $C_i = \frac{\sum(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$ نحصل على:

$$\hat{B} = B + \sum \varepsilon_i C_i$$
$$\Longrightarrow E(\hat{B}) = E(B) + \sum C_i E(\varepsilon_i)$$
$$\Longrightarrow E(\hat{B}) = B + 0$$

$$\boxed{E(\hat{B}) = B}$$

¬ التوقع الرياضي ل$\hat{\alpha}$

لدينا:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$
$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\sum y_i}{n} - \hat{\beta}\bar{X} = \frac{\sum(\alpha + \beta x_i + u_i)}{n} - \hat{\beta}\bar{X}$$

وبالتالي:

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \alpha + \beta\bar{X} + \frac{\sum(u_i)}{n} - \hat{\beta}\bar{X}$$
$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \alpha + \frac{\sum(u_i)}{n} + \bar{X}(\hat{\beta} - \beta)$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = \alpha + \frac{\sum(u_i)}{n} + \bar{X}(\hat{\beta} - \beta)$$

بإدخال التوقع على المعادلة أعلاه مع العلم أن:

$$E(\hat{B}) = B \Longrightarrow (\hat{\beta} - \beta) = 0$$
$$E(u_i) = 0$$

يصبح لدينا

$$\boxed{E(\hat{\alpha}) = \alpha}$$

¬ تباين $\widehat{\beta}$

$$v(\hat{\beta}) = \frac{\frac{\sum(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}{\sum(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^2}$$

$$= \frac{\boldsymbol{\delta^2_{\varepsilon_i}}}{\sum(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^2}$$

¬ تباين $\widehat{\alpha}$

$$\hat{\propto} = \bar{Y} - \hat{B}\bar{X}$$

$$\hat{\propto} = \frac{\sum y}{n} - \hat{B}\bar{X} = \frac{\propto + Bx + \varepsilon_i}{n} - \hat{B}\bar{X}$$

$$\hat{\propto} = \propto + B\overline{X} + \frac{\sum \varepsilon_i}{n} - \hat{B}\overline{X}$$

$$\hat{\propto} = \propto + \frac{\sum \varepsilon_i}{n} - \overline{X}(\hat{B} - B)$$

$$= \propto + \frac{\sum \varepsilon_i}{n} - \bar{x} = \sum \varepsilon_i C_i$$

$$(\hat{\propto} - \propto) == \sum \varepsilon_i (\frac{1}{n} - \bar{x}C_i)$$

بوضع : $d_i = (\frac{1}{n} - \bar{x} \cdot C_i)$ ثم نعوض في المعادلة الأخيرة نجد:

$$(\hat{\propto} - \propto) = \sum \varepsilon_i d_i$$

$$v(\hat{\propto}) = v(\hat{\propto} - \propto) = v(= \sum \varepsilon_i d_i) = \sum d_i^2 V(\varepsilon_i)$$

$$v(\hat{\propto}) = V(\varepsilon_i) \cdot \sum (\frac{1}{n} - \bar{x}C_i)^2 = V(\varepsilon_i) \cdot (\frac{1}{n} + \bar{X}^2 \cdot \sum C_i^2)$$

$$v(\hat{\propto}) = V(\varepsilon_i) \cdot (\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2})$$

$$v(\hat{\propto}) = \frac{V(\varepsilon_i)}{n} + \frac{V(\varepsilon_i) \cdot \overline{X}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{V(\varepsilon_i)}{n} + \overline{X}^2 \cdot v(\hat{B})$$

وبالتعويض

$$v(\varepsilon_i) = S^2 = \frac{(y_i - \hat{y})^2}{n-2}$$

$$v(\widehat{\alpha}) = \delta_{\widehat{\alpha}}^2 = \delta_{u_i}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

يمكن اختصارها في الجدول التالي:

	$\widehat{\alpha}$	$\widehat{\beta}$
التوقع الرياضي	$\mathbb{E}(\widehat{\alpha}) = \alpha$	$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta$
التباين	$v(\widehat{\alpha}) = \delta_{\widehat{\alpha}}^2 = \delta_{u_i}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right]$	$v(\hat{\beta}) = \frac{\frac{\sum(y_i - \hat{y})^2}{n-2}}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\delta_{u_i}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$
حيث أن: $\delta^2{}_i = \frac{\sum u_i^2}{n-2}$		

تابع للمثال السابق:

المطلوب: أحسب التباين والانحراف المعياري للمعلمات المقدرة؟

y_i	x_i	x_i^2	$\sum(x_i - \bar{x})^2$	$\hat{y}_i$	u_i	u_i^2
18	6	36	10,24	18.804	0.804	0,646
20	8	64	1,44	20.364	0.364	0,132
21	9	81	0,04	21.144	0.1440	0,021
22	10	100	0,64	21.924	-0.076	0,006
20	7	49	4,84	19.584	-0.416	0,173
22	11	121	3,24	22.704	0.704	0,496
24	12	144	7,84	23.484	-0.516	0,266
23	11	121	3,24	22.704	-0.296	0,088
21	10	100	0,64	21.924	0.924	0,854
22	8	64	1,44	20.364	-1.636	2,676
213	92	880	33,6	213		5,358

باستخدام معادلة التقدير السابقة: $\hat{y}_i = .124 + 0.78\, x_i$ يمكن احتساب قيم $\widehat{\imath}$ ويمكن احتساب قيم i

باستخدام المعادلة التالية: $u_i = \hat{y}_i - y_i$

- بالنسبة إلى: $\hat{\beta}$

لدينا:

$$v(\hat{\beta}) = \delta^2{}_{\hat{\beta}} = \frac{\delta^2_{u_i}}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

لذا يجب احتساب: $\delta^2{}_i$ باستخدام المعادلة التالية:

$$\delta^2_u = \frac{\sum \boldsymbol{u_i^2}}{\boldsymbol{n-2}} = \frac{5{,}358}{10-2} = \boldsymbol{0.668}$$

حساب التباين والانحراف المعياري للمعلمة ($\hat{\beta}$)

$$v(\hat{\beta}) = \delta^2{}_{\hat{\beta}} = \frac{\delta^2_{u_i}}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{0.668}{33{,}6} = \mathbf{0.02}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\delta_{\hat{\beta}}} = \boldsymbol{0.141}$$

- بالنسبة إلى: $\hat{\alpha}$

حيث:

$$\boldsymbol{\delta^2_{\varepsilon_i}} = \frac{\sum \boldsymbol{u_i^2}}{\boldsymbol{n-2}} = \boldsymbol{0.668}$$

حساب التباين والانحراف المعياري للمعلمة ($\hat{\alpha}$)

$$v(\hat{\alpha}) = \delta^2_{\hat{\alpha}} = \delta^2_{u_i}\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right] = 0.668 * \left[\frac{1}{10} + \frac{84.64}{\mathbf{33,6}}\right] = \mathbf{1.75}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\delta\hat{\alpha}} = \sqrt{\boldsymbol{\delta^2_{\hat{\alpha}}}} = \mathbf{1,32}$$

المحاضرة الرابعة: اختبار الفرضيات

1.اختبار المعنوية للمعاملات المقدرة:

لاختبار معنوية المعلمات المقدرة بالنسبة لنموذج الانحدار البسيط نستعمل اختبار ستودنت، ويمكن توضيح خطوات تطبيق هذا الاختبار لدراسة معنوية المعلمات المقدرة كما يلي:

- **بالنسبة لـ $\widehat{\alpha}$**

- الخطوة الأولى: وضع الفرضية الصفرية والفرضية البديلة

الفرضية العدمية: عدم وجود علاقة بين المتغيرين(المتغير غير معنوي)

الفرضية البديلة: وجود علاقة بين المتغيرين(المتغير معنوي)

$$\begin{cases} H_0: \alpha = 0 \\ H_1: \alpha \neq 0 \end{cases}$$

- الخطوة الثانية: حساب قيمة ستودنت المحسوبة $t$cal

نستخدم اختبار t لاختبار معنوية المعلمات المقدرة، وذلك لغرض معرفة ما إذا كان المتغير المستقل مفسر إحصائيا للمتغير التابع ولأجل ذلك يتم صياغة الفرضية العدمية والفرضية البديلة ويكتب حساب اختبارt بالصيغة التالية:

$$t_{\hat{\alpha}} = \frac{|\hat{\alpha} - \alpha|}{\delta_{\hat{\alpha}}} = \frac{|\hat{\alpha} - 0|}{\delta_{\hat{\alpha}}} = \frac{\hat{\alpha}}{\delta_{\hat{\alpha}}} \sim t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha}}{\delta_{\hat{\alpha}}}}}$$

مع العلم أن:

$$\boldsymbol{\delta\hat{\alpha} = \sqrt{\delta_{\hat{\alpha}}^2}} \qquad \boldsymbol{\delta_{u_i}^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-2}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{\hat{\alpha}}^2 = \delta_{u_i}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right]}$$

- الخطوة الثالثة: اتخاذ القرار

لاتخاذ القرار حول معنوية $\hat{\alpha}$ نقوم بمقارنة قيمة ستودنت المحسوبة $tcal$ مع قيمة ستودنت الجدولية $t$tab(n−2) عند درجة حرية n−2 ومستوى معنوية $\propto$

فإذا كانت:

- t المحسوبة أكبر من t الجدولية نقبل الفرضية البديلة و بالتالي الثابت معنوي.

- t المحسوبة أقل من t الجدولية نقبل الفرضية العدمية و بالتالي الثابت غير معنوي

✦ بالنسبة ل $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$

الفرضية العدمية: عدم وجود علاقة بين المتغيرين(المتغير غير معنوي)

الفرضية البديلة: وجود علاقة بين المتغيرين(المتغير معنوي)

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

ويكتب اختبار (t)بالصيغة التالية:

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{|\hat{\beta} - \beta|}{\delta_{\hat{\beta}}} = \frac{|\hat{\beta} - 0|}{\delta_{\hat{\beta}}} = \frac{\hat{B}}{\delta_{\hat{\beta}}} \sim t_{n-2,\frac{\beta}{2}}$$

$$\boxed{t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\beta}}{\delta_{\hat{\beta}}}}$$

حيث أن: $\delta_{\hat{}} = \sqrt{\delta^2{}_{\hat{\beta}}}$

$$\boldsymbol{\delta^2{}_{\hat{\beta}} = \frac{\delta^2_{u_i}}{\sum(x_i - \overline{x})^2}}$$

مع العلم أن:

$$\boldsymbol{\delta^2_{u_i} = \frac{\sum u_i^2}{n-2}}$$

وبعد حساب قيمة(t) تقارن قيمته مع القيمة الجدولية بدرجة حرية (n-2) وعند مستوى معنوية معين لتحديد قبول أو رفض فرضية العدم، فإذا كانت:

- t المحسوبة أكبر من t الجدولية نقبل الفرضية البديلة وبالتالي المتغير المستقل X يؤثر في المتغير التابع (المتغير معنوي)
- t المحسوبة أقل من t الجدولية نقبل الفرضية العدمية وبالتالي المتغير المستقل X لا يؤثر في المتغير التابعY (المتغير غير معنوي)

$t_{\mathrm{cal}} > t_{tab} \Leftrightarrow$ نقبل الفرضية البديلة

$t_{\mathrm{cal}} < t_{tab} \Leftrightarrow$ نقبل الفرضية العدمية

<u>**مع العلم أن:**</u>

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$: القيمة التقديرية ل $\boldsymbol{\beta}$ الحقيقية

$\boldsymbol{\delta_{\widehat{B}}}$: الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$

$\boldsymbol{\delta_{u_i}}$: الانحراف المعياري للخطأ العشوائي$\boldsymbol{u_i}$

$\delta^2_{u_i}$: تباين الخطأ العشوائي

تابع للمثال السابق:

اختبر معنوية المعلمات المقدرة

- بالنسبة إلى: $\widehat{\beta}$

الخطوة الأولى: وضع الفرضية الصفرية والفرضية البديلة

الفرضية العدمية: عدم وجود علاقة بين المتغيرين (المتغير غير معنوي)

الفرضية البديلة: وجود علاقة بين المتغيرين (المتغير معنوي)

$$\begin{cases} H_0: \alpha = 0 \\ H_1: \alpha \neq 0 \end{cases}$$

الخطوة الثانية: حساب قيمة ستودنت المحسوبة t_{cal}

لدينا:

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{B}}{\delta_{\hat{\beta}}} = \frac{0.78}{0,141} = 5.53$$

الخطوة الثالثة: اتخاذ القرر:

$$t_{cal} = 5.53 > t^{5\%}_{tab(10-2)} = 2.306$$

t-المحسوبة أكبر من t الجدولية نقبل الفرضية العدمية وبالتالي المعامل **معنوي احصائيا**

- بالنسبة إلى: $\widehat{\alpha}$

لدينا:

$$t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha}}{\delta_{\hat{\alpha}}} = \frac{14.124}{1,32} = 10.70$$

$$t_{cal} = 10.70 > t^{\alpha\%}_{tab(10-2)} = 2.306$$

t-المحسوبة أكبر من t الجدولية نقبل الفرضية العدمية وبالتالي المعامل **معنوي احصائيا**

2. اختبار وجود النموذج القوة التفسيرية وجدول تحليل التباين (*ANOVA*)

تساعد البواقي على قياس مدى تمثيل المعادلة المفروضة في النموذج لمشاهدات العينة، كلما كبرت قيمة البواقي دل ذلك على رداءة النموذج

- **معامل التحديد:** R^2

وهو عبارة عن النسبة بين التغير في القيم المقدرة على التغير الكلي، كما يمكن حسابه عن طريق المتممة بالنسبة لتغير البواقي على التغير الكلي:

يستخدم معامل التحديد كمقياس يحدد القوة التفسيرية لنموذج الانحدار الخطي حيث يعتبر مقياس يوضح نسبة التغير في المتغير التابع Yi الذي سببه التغير في المتغير المستقل Xi معبرا عنها بمجموع مربعات انحراف قيم المتغير التابع Yi عن وسطه الحسابي $\bar{y}$بمعنى:

لدينا المعادلة التالية :

$$y_i = \hat{y}_i + u_i$$

بإدخال $\bar{y}$ نجد

$$y_i - \bar{y} = \hat{y}_i - \bar{y} + u_i$$

وبتربيع طرفي المعادلة أعلاه وجمعها بالنسبة نجد:

$$\sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum u_i^2$$

$$SST = SSE + SSR$$

$SST \Leftrightarrow \sum(y_i - \bar{y})^2$ **هو مجموع مربعات الانحر افات الكلية في المتغير**y

$SSE \Leftrightarrow \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$ **فهو مجموع مربعات الانحر افات المفسرة (الجزء المفسر)**

$SSR \Leftrightarrow \sum u_i^2 = \sum(y_i - \hat{y})^2$ **الذي هو مجموع مربعات البواقي (الجزء الغيرمفسر)**

وبتقسيم كل الأطراف على الانحرافات الكلية (SST) نجد:

$$1 = \frac{SSE}{SST} + \frac{SSR}{SST}$$

وحسب الشرح السابق يمكن حسابه بالطريقة التالية:

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$
$$= \frac{\hat{\beta}\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

بتعويض قيمة $SSE = SST - SSR$**نحصل على:**

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{\sum u_i^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$
$$= 1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

يعتبر من أهم المعاملات التي تقيس علاقة الارتباط بين المتغيرين، تتراوح قيمته مابين الواحد الصحيح والصفر أي أن

$$0 \le R^2 \le 1$$

العلاقة بين معامل التحديد R^2 ومعامل الانحدار الخطي $\hat{\beta}$

يمكن حساب هذا المعامل حسب الصيغة التالية:

$$R^2=\frac{[cov(x_i y_i)]^2}{[\delta_{x_i}\delta_{y_i}]^2}=\frac{\left[\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right]^2}{\left[\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum(y_i-\bar{y})^2}\right]^2}$$

فنحصل على

$$R^2=\frac{\frac{1}{n^2}[\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})][\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})]}{\frac{1}{n^2}\sum(x_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})^2}$$

ومنه:

$$\boxed{\Rightarrow R^2=\frac{\hat{\beta}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(y_i-\bar{y})^2}}$$

معامل التحديد المعدل أو المصحح $\bar{R}^2$

يعتبر كوسيلة لقياس جودة التوفيق أفضل من معامل التحديد وهو حساس لدرجات الحرية ويكتب على الشكل التالي:

$$\boxed{\bar{R}^2=1-(1-R^2)\left[\frac{n-1}{n-2}\right]}$$

جدول تحليل التباين (ANOVA)

يمكن اختبار المعنوية الكلية لنموذج الانحدار البسيط من خلال تشكيل جدول التباين، وهو تحليل مجموع المربعات الصغرى إلي مجموع مربعات البواقي ومجموع مربعات الانحدا .

الغرض من هذا التحليل لاختبار معنوية مجموع مربعات الانحدار وهذا أيضا يدخل في اختبار معنوية المعاملβ

ونمثل هذا التحلنل في جدول تحلنل التباين:

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	*F*
الانحرافات	$SSE=\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2$	*K- 1*	$F=\dfrac{\frac{SSE}{K-1}}{\frac{SSR}{n-k}}$
الانحرافات الغيرموضحة $\sum u_i^2$	$SSR=\sum(y_i-\hat{y})^2$	*n-k*	
الانحرافات الكلية	$SST=\sum(y_i-\bar{y})^2$	*n-1*	

✦ اختبار التفسير الإحصائي العام للنموذج اختبار-F -

يستخدم اختبار F لاختبار المعنوية الإحصائية للنموذج ككل، وذلك بغرض معرفة ما إذا كان النموذج قابل للتنبؤ بقيم المتغير التابع وللقيام بذلك يجب إتباع الخطوات التالية:

¬ الخطوة الأولى :وضع الفرضية الصفرية والفرضية البديلة

يعتمد الاختبار على نوعين من الفرضيات:

الفرضية العدمية: وتنص على عدم معنوية أو جوهرية العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل،أي أن

$$H_0: \alpha = 0, \beta = 0$$

الفرضية البديلة :وتنص على وجود علاقة جوهرية من الناحية الإحصائية بين المتغير التابع والمتغير المستقل، أي النموذج معنوي أي:

$$H_1: \alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

¬ الخطوة الثانية :حساب قيمة فيشر المحسوبة Fcal

يمكن أن تكون اختبار المعنوية في شكل توزيع *Fisher* والصيغة الرياضية لهذا الاختبار:

$$\boldsymbol{F = \frac{\frac{SSE}{K-1}}{\frac{SSR}{n-k}} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2/K-1}{\sum(y_i - \hat{y}_i)/_{n-K}} = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{1-R^2}{n-2}}}$$

¬ الخطوة الثالثة :اتخاذ القرار:

وبعد حساب قيمة F يتم مقارنتها معF الجدولية

حيثk يمثل عدد المعاملات المقدرة وهو مساوي إلى 2 في الانحدار الخطي البسيط أما القيمة الحرجة فهي

$$\boldsymbol{F_{tab} = F^{\alpha}_{(K-1,n-k)}}$$

¬**F** المحسوبة أكبر من Fالجدولية **نقبل <u>الفرضية البديلة وبالتالي النموذج معنوي</u>**

¬**F** المحسوبة أقل من Fالجدولية **نقبل <u>الفرضية العدمية وبالتالي النموذج غير معنوي</u>**

<u>ويمكن كتابتها بالشكل الرياضي التالي</u>:

نقبل الفرضية البديلة وبالتالي النموذج معنوي $\mathbf{F_{cal}} > \boldsymbol{F_{tab}} \Leftrightarrow$

نقبل الفرضية العدمية وبالتالي النموذج معنويغير $\mathbf{F_{cal}} < \boldsymbol{F_{tab}} \Leftrightarrow$

تابع للمثال السابق:

- **احسب معامل التحديد**
- اختبار معنوية النموذج ككل ورسم جدول تحليل التباين

حساب معامل التحديد

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

y_i	x_i	$\hat{y}_i$	$(\hat{y}_i - \bar{y})$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
18	6	18.804	-2.496	6.230	10.89
20	8	20.364	-0.954	0.910	1.690
21	9	21.144	-0.936	0.8760	0.090
22	10	21.924	-0.156	0.024	0.489
20	7	19.584	0.623	0.389	1.690
22	11	22.704	-1.716	2.945	0.489
24	12	23.484	1.404	1.972	7.289
23	11	22.704	2.184	4.769	2.889
21	10	21.924	1.404	1.971	0.0900
22	8	20.364	0.623	0.389	0.489
213	92	213		20.44	26.10

لحساب معامل التحديد يمكن استخدام عدة قوانين

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

$$\boldsymbol{R^2} = \frac{\mathbf{20.44}}{\mathbf{26.10}} = \mathbf{0.78}$$

ويمكن احتسابه بطريقة ثانية باستعمال علاقته بمعامل الانحدار الخطي

$$\Rightarrow \boldsymbol{R^2} = \frac{\hat{\beta}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\mathbf{0.78 * 26,4}}{\mathbf{26.10}} = \mathbf{0.78}$$

<u>التفسير الاقتصادي:</u> أي أن معادلة الانحدار تفسر *78*% من التغير الإجمالي في النموذج أما نسبة *22*% الباقية فيمكن نسبتها إلى عوامل أخرى تدخل في حد الخطأ.

اختبار المعنوية الكلية لنموذج:

<u>الخطوة الأولى :</u>

$$H_0: \alpha = 0, \beta = 0$$

$$H_1: \alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

الخطوة الثانية :

$$SST \Leftrightarrow \sum(y_i - \bar{y})^2 = 26.10$$

$$SSE \Leftrightarrow \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = 20.44$$

$$SSR \Leftrightarrow \sum \varepsilon_i^2 = \sum(y_i - \hat{y})^2 = SST - SSE = 5.66$$

$$F = \frac{\frac{SSE}{K-1}}{\frac{SSR}{n-k}} = \frac{20.44/1}{5.66/8} = 28.89$$

الخطوة الثالثة: **اتخاذ القرار**

$$F_{cal} = 28.89 > F_{tab} = F_{(1,8)}^{0.05} = 5.32$$

نقبل الفرضية البديلة وبالتالي النموذج معنوي

- **جدول تحليل التباين**

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	F
SSE	20.44	1	$F = 28.89$
SSR	5.66	8	
SST	26.10	9	

المحاضرة الخامسة: مجال الثقة للمعلمات والتنبؤ

1. مجال الثقة للمعلمات

- بالنسبة للمعلمة α :

$$\alpha \in \left[\hat{\alpha} - t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\alpha}} \quad , \quad \hat{\alpha} + t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}\right]$$

- بالنسبة للمعلمة β:

$$\beta \in \left[\hat{\beta} - t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\beta}} \quad , \quad \hat{\beta} + t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\beta}}\right]$$

- بالنسبة تباين الأخطاء

$$\delta_u^2 \in \left[\frac{(n-k)\delta_u^2}{\mathcal{X}^2(n-k, 1-\frac{\alpha}{2})} \frac{(n-k)\delta_u^2}{\mathcal{X}^2(n-k \ , \ \frac{\alpha}{2})}\right]$$

$$\mathcal{X}^2\left(n-k, 1-\frac{\alpha}{2}\right) \text{ و } \mathcal{X}^2\left(n-k \ , \ \frac{\alpha}{2}\right)$$

القيم الحرجة لتوزيع كاي تربيع عند مستوى معنوية $\boldsymbol{\alpha}$ ودرجة حرية $\boldsymbol{n-k}$

حيث K تمثل عدد المعلمات المقدرة

تابع للمثال السابق:

تقدير معالم النموذج عند مستوى ثقة **95%** ، حيث

$$\delta\hat{\alpha} = 1{,}32 \qquad \delta_{\hat{\beta}} = 0.141 \qquad \delta_{u_i}^2 = 0.668$$

- بالنسبة للمعلمة α :

$$\alpha \in \left[\hat{\alpha} - t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\alpha}} \quad , \quad \hat{\alpha} + t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\alpha}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \alpha \in [14.124 - 2.306 * (1{,}32) \ , \ \ 14.124 + 2.306 * (1{,}32)]$$

$$\boldsymbol{\alpha \in [11.08, \ \ 17.17]}$$

- بالنسبة للمعلمة β

$$\beta \in \left[\hat{\beta} - t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\beta}} \quad , \quad \hat{\beta} + t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\beta}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \beta \in [0.78 - 2.306 * (0.141) \ , \quad 0.78 + 2.306 * (0.141)\ ]$$

$$\beta \in [\mathbf{0.45}, \quad \mathbf{1.105}]$$

- هذا يعني أن هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع αبين الحدين الأعلى 17.17 والأدنى11.08 ، وأن هناك احتمال **%** 5أن تقع خارج هذين الحدين.
- نفس الشيء بالنسبة للمعلمة βهناك احتمال**95%** أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع βبين الحدين الأعلى1.105 والأدنى 0.45 ، وأن هناك احتمال **5%**أن تقع خارج هذين الحدين.

تقدير تباين الأخطاء عند مستوى ثقة 95% :

$$\delta_\varepsilon^2 \in \left[\frac{(n-k)\delta_u^2}{\chi^2(n-k,1-\frac{\alpha}{2})} \frac{(n-k)\delta_u^2}{\chi^2(n-k\ ,\ \ \frac{\alpha}{2})}\right]$$

$$\delta_u^2 \in \left[\frac{(8)0.668}{17.535} \qquad \frac{(8)0.668}{2.180}\right]$$

$$\delta_u^2 \in [0.304 \quad , \quad 2.451]$$

هذا يعني أن هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لتباين الأخطاء σ_ε^2 بين الحدين الأعلى 2.451 والأدنى 0.304، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين

2. التنبؤ باستخدام معادلة الانحدار

من الأهداف الرئيسية لتقدير النموذج القياسي هو استخدام النموذج المقدر للتنبؤ بقيمة المتغيرات التابعة استنادا إلى قيم المتغيرات المستقلة من أجل التعرف على مسار الظاهرة موضوع البحث في المستقبل

يمكن تعريف التنبؤ بأنه تحليل بيانات الماضي وتطبيق نتائجها على المستقبل من خلال استخدام نموذج رياضي،

بعد تقييم نموذج الانحدار والتأكد من استيفاء الفرضيات والمعايير الإحصائية، يصبح بالإمكان استخدامه لأغراض التنبؤ:

$$\boldsymbol{\hat{Y}_{n+1} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_{n+1}}$$

من أخطاء التنبؤ:

خطأ التقدير	$\boldsymbol{y_{n+1} - E(y_{n+1})}$
خطأ المعاينة	$\boldsymbol{E(y_{n+1}) - \hat{y}_{n+1}}$

فيكون الخطأ الحاصل في التنبؤ هو مجموع نوعين من الانحراف:

$$\boldsymbol{y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} = [y_{n+1} - E(y_{n+1})] + [E(y_{n+1}) - \hat{y}_{n+1}\ ]}$$

- **مجال الثقة للتنبؤ:**

$$y_{n+1} \in \left[\hat{y}_{n+1} - t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{u_{n+1}} . \hat{y}_{n+1} + t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{u_{n+1}}\right]$$

- **تباين خطأ التنبؤ:**

$$\hat{\delta}_{\hat{y}_{n+1}}^2 = Var(\boldsymbol{y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}}) = Var(\hat{\alpha}) + X_{n+1}^2 Var(\hat{\beta}) + 2X_{n+1}COV(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) + VAR(u_{n+1})$$

$$\Rightarrow \delta_u^2\left[\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right]+\delta_u^2\frac{X_{n+1}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}-2X_{n+1}\,\delta_u^2\frac{\bar{X}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}+\delta^2$$

$$\hat{\delta}_{u_{n+1}}=\delta_{u_i}^2\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(x_{n+1}-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]$$

مثال:

بمعلومة نموذج الانحدار السابق $\hat{y}_i = 14.124 + 0.78\,x_i$، حدد مجال الثقة ل في حالة x=16 عند مستوى معنوية 5%

الحل:

لدينا المعطيات التالية الخاصة بالنموذج السابق:

n=10 $\quad \bar{x}=9.2 \quad \sum u_i^2 = 5{,}358 \quad \sum(x_i-\bar{x})^2 = 33.6$

حسب القانون:

$$y_{n+1}\in\left[\hat{y}_{n+1}-t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{u_{n+1}}\,.\,\hat{y}_{n+1}+t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{u_{n+1}}\right]$$

من الواجب إيجاد:

- تباين خطأ التنبؤ:

$$\delta_{u_i}^2=\frac{\sum u_i^2}{n-2}=\frac{5{,}358}{10-2}=0.668$$

$$\hat{\delta}_{\varepsilon_{n+1}}=\delta_{\varepsilon_i}^2\left[1+\frac{1}{n}+\frac{(x_{n+1}-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right]\Rightarrow\hat{\delta}_{u_{n+1}}=0.668\left[1+\frac{1}{10}+\frac{(16-9.2)^2}{33.6}\right]$$

$$\Longrightarrow\hat{\delta}_{u_{n+1}}=1.654$$

- قيمة $\hat{y}_{n+1}$:

$$\hat{y}_{n+1}=14.124+0.78*16=26.604$$

- من جدول student:

$$t_{n-2}^{\alpha/2}=t_{10-2}^{5\%}=2.306$$

- مجال الثقة للتنبؤ:

$$y_{n+1}\in[26.604-2.306(1.654)26.604+2.306(1.654)]$$

$$y_{n+1}\in[22.79 \quad 30.42]$$

المحاضرة السادسة: الانحدار الخطي المتعدد

1. التعريف بالنموذج:

الانحدار الخطي المتعدد هو عبارة عن انحدار للمتغير التابع (Y) على العديد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ,..., X_k$ لذا فهو في التنبؤ بتغيرات المتغير التابع الذي يؤثر فيه عدة متغيرات مستقلة

يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير تابع Y_i وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2 ..., ,..., X_k$ وحد عشوائي u_i ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لـn من المشاهدات وk من المتغيرات المستقلة بالشكل الاتي:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \cdots \beta_K X_{Ki}, \quad i = 1, \dots \dots \dots . \dots \dots \dots . . (1)$$

هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الاتي :

$$\begin{aligned}
i = 1&: y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \cdots \dots \dots \dots \beta_K X_{1K} + u_1\\
i = 2&: y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \cdots \dots \dots \dots \beta_K X_{2K} + u_2\\
&\dots \dots \dots \dots \dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots\\
&\dots \dots \dots \dots \dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad \dots \dots \dots \dots \dots\\
i = n&: y_n = \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \cdots \dots \dots \dots \beta_K X_{nK} + u_n
\end{aligned}$$

هذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلومات المطلوب تقديرها علما بان الحد الأول منها β_0 يمثل الحد الثابت الآمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كآلاتي :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & y_{12} & \dots . & y_{1k} \\ 1 & x_{21} & y_{22} & \dots . & y_{2k} \\ . & . & . & \dots . & . \\ 1 & y_{n1} & y_{n2} & \dots . & y_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

<u>وباختصار يمكن كتابة العلاقة السابقة كالآتي:</u>

$$\underset{(n,\,1)}{\boldsymbol{y}} = \underset{(n,\,k+1)}{\boldsymbol{X}} \; \underset{(k+1\,,1)}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{(n\,,1)}{\boldsymbol{u}}$$

Y: متجه عمودي أبعاده $(n\times1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع .

X : مصفوفة أبعادها $(n\times k+1)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح ليمثل الحد الثابت .

β : متجه عمودي أبعاد $(k+1\times1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها .

u: متجه عمودي أبعاده $(n\times1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية .

2. الفرضيات التي يقوم عليها نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

- u_i يتوزع توزيعا طبيعيا متعدد المتغيرات.
- القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفرا أي أن: $E(\ \ _i) = 0$
- تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفرا أي أن:

$$\begin{cases} var(u_i) = \delta^2 , & \forall_i = 1 \dots \dots \dots . . n \\ cov(u_i, u_j) = 0 & \forall_i \neq j \end{cases}$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه **بمصفوفة التباين والتباين المشترك** "Variance -CovarianceMatrix" **لحد الخطأ** ε_i ، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين قيم u_i، بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم u_i .

ويمكن تلخيص الفرضيات السابقة رياضيا كما يلي: $u_i \sim N\left(0, \sigma^2 I_n\right)$

- $\frac{1}{n}(X'X)$ تؤول الى مصفوفة محدودة غير فردية.
- عدم وجود **ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة** كما أن **عدد المشاهدات يجب أن يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها** أي أن : $\rho(X) = K+1 \prec n$ حيث أن ρ رتبة مصفوفة البيانات و X عدد المتغيرات المستقلة $K+1$ ، وهي أصغر من عدد المشاهدات (n) ،

هذه الفرضية ضرورية جدا لضمان أيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$ إذ أن عدم توفر هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) اقل من $K+1$ وبالتالي فان رتبة $(X'X)$ التي تستخدم في الحصول على مقدرات OLS بدورها اقل من $K+1$ ولا يمكن إيجاد معكوسا لها أي أن : $(X'X)^{-1}$ غير معرفة لن محدده يؤول الى الصفر وهذا ما يسبب ما يسمى **بمشكلة الارتباط الخطي المتعدد**، وبالتالي لا يمكن الحصول على المقدرات باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS).

- (X) مصفوفة غير عشوائية، وتعني هذه الفرضية أنه إذا أخذنا عينة أخرى تتكون من (n) مشاهدة فإن المصفوفة (X) (مصفوفة المتغيرات المفسرة) تبقى دون تغيير، المصدر الوحيد للتغير هنا هو شعاع الخطأ العشوائي (ε) وهذا ما يؤثر على الشعاع (Y) أي؛ $cov(x, u) = \mathrm{E}(x'u) = 0$

3. تقدير شعاع المعالم $\hat{\beta}$:

باستعمال طريقة((OLS)) وبإتباع نفس خطوات التقدير التي رأيناها في النموذج الخطي البسيط نستطيع تقدير النموذج الخطي المتعدد باستعمال طريقتي المعادلات الطبيعية وجبر المصفوفات كالآتي:

✦ **طريقة المحددات :**

يمكن أن تحل هذه المعادلات بواسطة قاعدة كرا يمر للحصول على قيم $\hat{\beta}_K$ من المعلمات وعلى النحو الآتي :

$$\sum_i Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 . \sum X_{2i} .$$

$$\sum_i (Y_i X_{1i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i}^{\ 2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{1i} X_{2i}$$

$$\sum_i (Y_i X_{2i}) = \hat{\beta}_0 \sum_i X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_i X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^{\ 2}$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن أيجاد المحددات الآتية :

$$|D| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_1 & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}$$

$$|N2| = \begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i} Y_i \end{vmatrix}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{i2i} Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i} X_{2i} \\ \sum X_{2i} Y_i & \sum X_{1i} X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{|N_2|}{|D|}=\frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum Y_i \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{i2i}Y_i & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i}Y_i & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i}Y_i & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{vmatrix}}$$

أما بالنسبة ل $\hat{\beta}_0$ فيتم الحصول عليه عن طريق : $\boxed{\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}_1-\hat{\beta}_2\bar{X}_2}$

- **طريقة المصفوفات :**

تهدف هذه الطريقة إلى إيجاد **تقدير للشعاع** β الذي **يُصَغِّر مجموع مربعات الانحراف** $\hat{u}_i$ **بين القيمة المقدرة** $\hat{Y}$ **والقيمة الحقيقية** Y

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2=Min(y_i-\hat{y}_i)^2$$

$$\hat{u}_i=Y_i-\hat{Y}_i \qquad i=1\dots\dots n$$

$$Min\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2=Min\,\grave{u}u=Min\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)'\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)$$

$$Min\,\grave{u}u=Min\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)'\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)=y_i'\,\hat{y}_i\ -\ 2\hat{y}_i'\,y+y'y$$

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2=\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}-2\hat{\beta}'X'Y+Y'Y$$

للحصول على النهاية الصغرى فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial\sum e_i^2}{\partial\hat{\beta}'}=0\Leftrightarrow 2(X'X)\hat{\beta}-2X'Y=0$$

وبما أن رتبة (X) هي $k+1$ فإن : $(X'X)$ مصفوفة مربعة $((k+1)\times(k+1))$ رتبتها $k+1$ وتقبل معكوس $(X'X)^{-1}$.

ومنه: $$2(X'X)\hat{\beta}-2X'Y=0 \quad\Rightarrow (X'X)\hat{\beta}-X'Y=0$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(X'X)^{-1}$ لنحصل على: $\hat{\beta}=(\grave{x}x)^{-1}\grave{x}y$ وهو تقدير لـ β.

وللتأكد من أن $\hat{\beta}$ المتحصل عليه هو قيمة دنيا لـ $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2$، يجب تحقيق الشرط من الدرجة الثانية:

$\frac{\delta^2\sum u_i^2}{\delta\hat{\beta}'\delta\hat{\beta}}=(X'X)>0$ هو نهاية صغرى $\hat{\beta}$ وهي مصفوفة موجبة معرفة ومنه فإن المصفوفة $(X'X)$ تكتب على الشكل التالي :

$$(\grave{x}x) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \dots\dots\dots.\dots\dots.. & \sum_{i=1}^{n} x_{Ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x^{2}{}_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & \dots\dots\dots.\dots\dots\dots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{Ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x^{2}{}_{2i} & \dots\dots\dots.\dots\dots\dots. & \sum_{i=1}^{n} x_{2i}x_{Ki} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} & \dots\dots\dots.\dots\dots\dots. & \sum_{i=1}^{n} x^{2}{}_{ki} \end{bmatrix}$$

المصفوفة $(X'Y)$ تكتب على الشكل التالي:

$$(\boldsymbol{x}\grave{\boldsymbol{y}}) = \begin{pmatrix} \sum \boldsymbol{y} \\ \sum \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x}_1 \\ \sum \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x}_2 \\ \sum \boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$$

المصفوفة $\hat{\beta}$ هي على الشكل التالي:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}}_0 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\grave{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}\grave{\boldsymbol{y}}}$$

✦ طريقة الانحرافات

من الممكن الحصول على المقدرات **باستخدام الانحرافات** وذلك بواسطة y و x عن وسطهما الحسابي:

$$y_i = \left(Y_i - \bar{Y}\right)$$

$$x_{1i} = \left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)$$

$$x_{2i} = \left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)$$

إذن تصبح معادلة الانحدار بالمعطيات المركزة بالشكل الآتي:

نلاحظ من هذه المعادلة أن الحد الثابت لا يوجد.

$$y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \cdots\ \beta_K X_{Ki} + u_i \ \dots.1$$

وفي واقع الآمر فإن هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الآتي:

$$i = 1: y_1 = \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + \cdots \ldots\ldots\ldots \beta_K X_{1K} + u_1$$
$$i = 2: y_1 = \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + \cdots \ldots\ldots\ldots \beta_K X_{2K} + u_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$i = n: y_n = \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + \cdots \ldots\ldots\ldots \beta_K X_{nK} + u_n$$

هذه المعادلة تتضمن $(k+1)$ من المعلومات المطلوب تقديرها علما بان الحد الأول منها β_0 يمثل الحد الثابت الأمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات والمتجهات لتقدير تلك المعلمات، عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كالآتي :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & y_{12} & \ldots. & y_{1k} \\ 1 & x_{21} & y_{22} & \ldots. & y_{2k} \\ . & . & . & \ldots. & . \\ 1 & y_{n1} & y_{n2} & \ldots. & y_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . \\ \beta_1 \\ . \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ . \\ u_n \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots (2)$$

وباختصار يمكن كتابة العلاقة السابقة كالآتي:

$$y = X\,\beta + u$$

y: متجه عمودي أبعاده $(n\times1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع.

X : مصفوفة أبعادها $(n\times k)$ تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة لا يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح لأنه لا يوجد الحد الثابت.

β : متجه عمودي أبعاده $(k\times1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها.

u: متجه عمودي أبعاده $(n\times1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية.

مثلا يمكننا ببساطة إيجاد $\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1$ كالآتي:

لدينا :

$$Min \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = Min(y_i - \hat{y}_i)^2$$
$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad i = 1 \ldots\ldots n$$
$$Min\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = Min\, \grave{u}u = Min\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)'\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)$$
$$Min\, \grave{u}u = Min\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)'\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = y_i'\,\hat{y}_i \ - \ 2\hat{y}_i'\, y + y'y$$
$$Min \textstyle\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2 = \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} - 2\hat{\beta}'X'Y + Y'Y$$

للحصول على النهاية الصغرى فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial \sum e_i^{\,2}}{\partial \hat{\beta}'} = 0 \Leftrightarrow 2(x'x)\hat{\beta} - 2x'y = 0$$

وبما أن رتبة (X) هي k فإن : $(x'x)$ مصفوفة مربعة $((k)\times(k))$ رتبتها k وتقبل معكوس $(x'x)^{-1}$.

ومنه: $2(x'x)\hat{\beta} - 2x'y = 0 \quad \Rightarrow (x'x)\hat{\beta} - x'y = 0$

نضرب طرفي المعادلة بـ $(x'x)^{-1}$ لنحصل على :

$$\boxed{\hat{\beta} = (x'x)^{-1} x'y}$$ وهو تقدير لـ β .

$$(x'x) = \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^{2} & \sum x_{1i}x_{2i} & \dots & \sum x_{1i}x_{ki} \\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^{2} & \dots & \sum x_{2i}x_{ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{ki}x_{1i} & \sum x_{ki}x_{2i} & \dots & \sum x_{ki}^{2} \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad (x'y) = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \\ \dots \\ \dots \\ \sum x_{ki}y_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum x_{1i}^{2} & \sum x_{1i}x_{2i} & \dots & \sum x_{1i}x_{ki} \\ \sum x_{2i}x_{1i} & \sum x_{2i}^{2} & \dots & \sum x_{2i}x_{ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_{ki}x_{1i} & \sum x_{ki}x_{2i} & \dots & \sum x_{ki}^{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \\ \dots \\ \dots \\ \sum x_{ki}y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \cdot \\ \hat{B}_K \end{bmatrix}$$

يمكننا إيجاد عناصر هذه المصفوفة انطلاقا من المعطيات الأصلية كما يلي :

$$\sum x_{1i}^{2} = \sum X_{1i}^{2} - \frac{\left(\sum X_{1i}\right)^2}{n} \qquad \sum x_{1i}y_i = \sum X_{1i}Y_i - \frac{\sum X_{1i}\sum Y_i}{n}$$

$$\sum x_{2i}^{2} = \sum X_{2i}^{2} - \frac{\left(\sum X_{2i}\right)^2}{n} \qquad \sum x_{2i}y_i = \sum X_{2i}Y_i - \frac{\sum X_{2i}\sum Y_i}{n}$$

$$\sum y_i^{2} = \sum Y_i^{2} - \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n} \qquad \sum x_{1i}x_{2i} = \sum X_{1i}X_{2i} - \frac{\sum X_{1i}\sum X_{2i}}{n}$$

حالة خاصة في المعطيات المركزة:

المصفوفة $(x'x)$ بالانحرافات وباستخدام المعطيات الأصلية هي على الشكل التالي:

$$(x'x) = \begin{pmatrix} \sum\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)^2 & \sum\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right) & \dots & \sum\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)\left(X_{ki}-\overline{X}_k\right) \\ \sum\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right) & \sum\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)^2 & \dots & \sum\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right)\left(X_{ki}-\overline{X}_k\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum\left(X_{ki}-\overline{X}_k\right)\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right) & \sum\left(X_{ki}-\overline{X}_k\right)\left(X_{2i}-\overline{X}_2\right) & \dots & \sum\left(X_{ki}-\overline{X}_k\right)^2 \end{pmatrix}$$

أي أن:

$$(x'x) = n\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum(X_{1i}-\overline{X}_1)^2 & \frac{1}{n}\sum(X_{1i}-\overline{X}_1)(X_{2i}-\overline{X}_2) & \dots & \frac{1}{n}\sum(X_{1i}-\overline{X}_1)(X_{ki}-\overline{X}_k) \\ \frac{1}{n}\sum(X_{2i}-\overline{X}_2)(X_{1i}-\overline{X}_1) & \frac{1}{n}\sum(X_{2i}-\overline{X}_2)^2 & \dots & \frac{1}{n}\sum(X_{2i}-\overline{X}_2)(X_{ki}-\overline{X}_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n}\sum(X_{ki}-\overline{X}_k)(X_{1i}-\overline{X}_1) & \frac{1}{n}\sum(X_{ki}-\overline{X}_k)(X_{2i}-\overline{X}_2) & \dots & \frac{1}{n}\sum(X_{ki}-\overline{X}_k)^2 \end{pmatrix}$$

أي أن $(x'x)$ تصبح على الشكل التالي:

$$(x'x) = n\begin{pmatrix} V(X_1) & COV(X_1, Y) & \dots & COV(X_K, Y) \\ COV(Y, X_1) & V(X_2) & \dots & COV(X_2, Y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ COV(Y, X_k) & COV(X_K, Y) & \dots & V(X_K) \end{pmatrix}$$

$$(\grave{x}x) = n\begin{bmatrix} v(X_1) & cov(X_1, y) & \dots\dots\dots cov(X_1, y) \\ cov(y, X_1) & v(X_2) & \dots\dots\dots cov(X_1, y) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ cov(y, X_1) & cov(X_k, y) & \dots\dots\dots v(X_K) \end{bmatrix}$$

المصفوفة $(x'y)$ بالانحرافات وباستخدام المعطيات الأصلية هي على الشكل التالي:

$$(x'y) = \begin{bmatrix} \sum(X_{1i}-\overline{X}_1)(Y_i-\overline{Y}) \\ \sum(X_{2i}-\overline{X}_2)(Y_i-\overline{Y}) \\ \text{-------------} \\ \text{-------------} \\ \sum(X_{ki}-\overline{X}_k)(Y_i-\overline{Y}) \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$(x'y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum(X_{1i}-\overline{X}_1)(Y_i-\overline{Y}) \\ \frac{1}{n}\sum(X_{2i}-\overline{X}_2)(Y_i-\overline{Y}) \\ \text{-------------} \\ \text{-------------} \\ \frac{1}{n}\sum(X_{ki}-\overline{X}_k)(Y_i-\overline{Y}) \end{bmatrix}$$

اي أن $(x'y)$ تصبح على الشكل التالي:

$$(\grave{x}y) = n\begin{bmatrix} .\,cov(X_1, y) \\ cov(X_1, y) \\ . \\ . \\ v(X_K) \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{pmatrix} \widehat{B}_1 \\ \widehat{B}_2 \\ \cdots \\ \widehat{B}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(X_1) & cov(X_1،X_2) & \cdots & cov(X_1،X_K) \\ cov(X_2،X_1) & v(X_2) & \cdots & cov(X_2،X_K) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ cov(X_K،X_1) & cov(X_K،X_2) & \cdots & v(X_K) \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} cov(X_1،Y_t) \\ cov(X_2،Y_t) \\ \cdots \\ cov(X_K،Y_t) \end{pmatrix}$$

أما $\hat{\beta}_0$ فيحسب بالطريقة التالية:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{X}_1 - \hat{\beta}_2\overline{X}_2 - \hat{\beta}_3\overline{X}_3 - \ldots\ldots\ldots\ldots - \hat{B}_K\overline{X}_K$$

مثال تطبيقي:

	Y	x_1	x_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	x_1y	x_2y	
1	35	12	8	96	144	64	420	280	1225
2	36	8	12	96	64	144	288	432	1296
3	33	11	10	110	121	100	363	330	1089
4	30	9	7	63	81	49	270	210	900
5	32	10	6	60	100	36	320	192	1024
6	31	12	4	48	144	16	372	124	961
7	37	11	10	110	121	100	407	370	1369
8	35	10	9	90	100	81	350	315	1225
9	40	15	13	195	225	169	600	520	1600
10	29	4	7	28	16	49	116	203	841
11	35	8	9	72	64	81	280	315	1225
12	30	7	10	70	49	100	210	300	900
Σ	**403**	**117**	**105**	**1038**	**1229**	**989**	**3996**	**3591**	**13 655**

- التقدير باستخدام طريقة المصفوفات:

$$\hat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1}\grave{x}y$$

$$(\grave{x}x) = \begin{bmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 \\ \sum x_2 & \sum x_1x_2 & \sum x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow (\grave{x}x) = \begin{bmatrix} 12 & 117 & 105 \\ 117 & 1229 & 1038 \\ 105 & 1038 & 989 \end{bmatrix}$$

$$(\grave{x}y) = \begin{pmatrix} \sum y \\ \sum y\,x_1 \\ \sum y\,x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow (\grave{x}y) = \begin{pmatrix} \mathbf{403} \\ \mathbf{3996} \\ \mathbf{3591} \end{pmatrix}$$

حساب مقلوب المصفوفة:

- محدد مصفوفة:

$$det(\grave{x}x) = \begin{bmatrix} 12 & 117 & 105 \\ 117 & 1229 & 1038 \\ 105 & 1038 & 989 \end{bmatrix}$$

$$= 12\begin{vmatrix} 1229 & 1038 \\ 1038 & 989 \end{vmatrix} - 117\begin{vmatrix} 117 & 1038 \\ 105 & 989 \end{vmatrix} + 105\begin{vmatrix} 117 & 1229 \\ 105 & 1038 \end{vmatrix}$$
$$= 12(138037) - 117(6723) + 105(-7599) =$$

$$\boxed{det(\grave{x}x) = 71\,958}$$

- إيجاد المصفوفة المساعدة:

$$adj(\grave{x}x) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1229 & 1038 \\ 1038 & 989 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 117 & 1038 \\ 105 & 989 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 117 & 1229 \\ 105 & 1038 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 117 & 105 \\ 1038 & 989 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 12 & 105 \\ 105 & 989 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 12 & 117 \\ 105 & 1038 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 117 & 105 \\ 1229 & 1038 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 12 & 105 \\ 117 & 1038 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 12 & 117 \\ 117 & 1229 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$adj(\grave{x}x) = \begin{vmatrix} +(138037) & -(6723 & +(-7599 \\ -(6723) & +(843) & -(171) \\ +(-7599) & -(171) & +(1059) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (\grave{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x})^{-1} = \frac{1}{71\,958}\begin{pmatrix} 138037 & -6723 & -7599 \\ -6723 & 843 & -171 \\ -7599 & -171 & 1059 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1}(x\grave{y}) \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{1}{71\,958}\begin{pmatrix} 138037 & -6723 & -7599 \\ -6723 & 843 & -171 \\ -7599 & -171 & 1059 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 403 \\ 3996 \\ 3591 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.51 \\ 0.63 \\ 0.79 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{y}} = \mathbf{20.51 + 0.63}\boldsymbol{x_1} + \mathbf{0.79}\boldsymbol{x_2}}$$

التفسير الإحصائي لنموذج الانحدار المتعدد

- معامل الانحدار $\widehat{B}_0$ يساوي **20.51** أي في حالة عدم وجود تأثير معنوي ل X_1 و X_2 على Y فان قيمة هذا الاخير سوف تقدر ب **20.51**

- معامل الانحدار $\widehat{B}_1$ يساوي $\mathbf{0.63}$ أي أن في حالة تغير 1 بوحدة واحدة ومع ثبات X_2 فان Y يتغير ب $\mathbf{0.63}$

- معامل الانحدار $\widehat{B}_2$ يساوي $\mathbf{0.79}$ أي أن في حالة تغير 2 بوحدة واحدة ومع ثبات X_1 فان Y يتغير ب $\mathbf{0.79}$

المحاضرة السابعة: المميزات العددية والخصائص الإحصائية للمعلمات المقدرة

1. المميزات العددية

نتناول في هذه الفقرة المميزات العددية للمعلمات المقدرة لنموذج الانحدار المتعدد :

✦ التوقع:

لدينا:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y.............01$$

و أيضا:

$$y = X\beta + u$$

بتعويض قيمة Y في المعادلة 01 نجد:

$$\widehat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1}\grave{x}[X\beta + u] = (\grave{x}x)^{-1}(x'x)\beta + (\grave{x}x)^{-1}x'u$$

حيث ان:

$$(\grave{x}x)^{-1}(x'x) = 1$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \beta + (\grave{x}x)^{-1}x'u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(02)$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$E(\hat{\beta}) = \beta + (\grave{x}x)^{-1}x'E(u) \quad /E(u) = 0$$

نتحصل على:

$$\boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$$

✦ التباين والانحراف المعياري للمعلمات المقدرة:

لدينا :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E\left[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$$

من المعادلة رقم 02 نجد أن:

$$(\hat{\beta} - \beta) = (\grave{x}x)^{-1}x'$$

$$(\hat{\beta} - \beta)' = u'x(\grave{x}x)^{-1}$$

نعوض $\widehat{\ } - \beta$ في المعادلة رقم 03 نجد:

$$\Omega_{\widehat{\beta}} = E[((\grave{x}x)^{-1}x'u)((\grave{x}x)^{-1}x'u)']$$

$$\Longrightarrow \Omega_{\widehat{\beta}} = E[(\grave{x}x)^{-1}x' \; \boldsymbol{uu'} \; x(\grave{x}x)^{-1}]$$

بإدخال التوقع الرياضي :

$$\Longrightarrow \Omega_{\widehat{\beta}} = [(\grave{x}x)^{-1}x' \; E(\boldsymbol{uu'}) \; x(\grave{x}x)^{-1}] \ldots\ldots\ldots\ldots(04)$$

بمعلومية:

$$\Omega_{\hat{u}} = E(uu) = \sigma_u^2 I_n$$

بتعويض هذه العلاقة في المعادلة رقم : (04) نجد:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = [(\grave{x}x)^{-1}\, x'\ \ \sigma_u^2 I_n\ (\grave{x}x)^{-1} x] \dots \dots \dots \dots (04)$$

نتحصل على:

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2(\grave{x}x)^{-1}}}$$

حيث $\boldsymbol{\sigma_u^2}$: تباين الحد العشوائي.

وتسمى المصفوفة العددية $\boldsymbol{\Omega_{\hat{\beta}}}$ أعلاه **بمصفوفة التباين والتباين المشترك** "Variance –CovarianceMatrix" للمعالم المقدرة، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين المعالم المقدرة ، بينما العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) التباين المشترك والترابط بين أي إثنين من هاته المعالم المقدرة.

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} var(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & \dots & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_K) \\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & \dots & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_K) \\ . & . & \dots & . \\ Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_K\hat{\beta}_1) & \dots & Var(\hat{\beta}_K) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2(\grave{x}x)^{-1}}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} var(\hat{\beta}_0) & cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2) \\ cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & var(\hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_0) & cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

قيم التباين للمعلمات المقدرة فتتمثل في قيم التباين المشترك بين مقدرات المربعات الصغرى

- **تقدير تباين الأخطاء** $\hat{\sigma}_u^2$:

إحدى فرضيات النموذج هي:

$$E(u'u) = \Omega_u = \sigma^2 I_n$$

وبما أن σ^2 غير معروف، فينبغي تقديره:

$$\hat{u} = y - x\,\hat{\beta}$$

$$\hat{u} = My \quad where \;\; M = I - (\grave{x}x)^{-1}x'$$

$$\hat{u} = M(x\beta + u) \;\; \Rightarrow \;\; \hat{u} = Mx\beta + Mu \Longrightarrow \boldsymbol{\hat{u} = Mu} \qquad (Mx=0)$$

$$\hat{u} = y - x(\grave{x}x)^{-1}x'y$$

$$\hat{u} = (I_n - X(\grave{x}x)^{-1}x')y$$

نضع:

$$M_X = (I_n - X(X'X)^{-1}X')$$ ، حيث M_X تسمى المصفوفة الدورية

ومنه:

$$\hat{u} = Mu$$

$$\hat{u}'\hat{u} = M'u'Mu$$
$$\Rightarrow \hat{u}'\hat{u} = u'M'Mu \ldots\ldots\ldots..(1)$$
$$M'M = [I - (\grave{x}x)^{-1}x']'[I - (\grave{x}x)^{-1}x']$$
$$\Rightarrow M'M = [I - (x')'\langle(\grave{x}x)^{-1}\rangle x']'[I - (\grave{x}x)^{-1}x']$$
$$\Rightarrow M'M = [I - x(\grave{x}x)^{-1}x']'[I - x(\grave{x}x)^{-1}x']$$
$$\Rightarrow M'M = I - x(\grave{x}x)^{-1}x' - x(\grave{x}x)^{-1}x' + x(\grave{x}x)^{-1}x'$$
$$\Rightarrow M'M = I - x(\grave{x}x)^{-1}x' \qquad \Rightarrow \boldsymbol{M'M = M}$$

من المعادلة رقم (1) نجد :

$$\hat{u}'\hat{u} = M'u'Mu \Rightarrow \hat{u}'\hat{u} = u'Mu$$
$$E(\hat{u}'\hat{u}) = E(u'Mu)$$

ونعلم أيضا أن أثر (AB) =أثر (BA).

ونعلم أيضا أن توقع أثر $E(tr\ (A) = tr\ E(A)$

$$E(\hat{u}'\hat{u}) = E[tr(u'Mu)] \Rightarrow trE[(Mu'u)] \Rightarrow tr[ME(u'u)]$$
$$E(\hat{u}'\hat{u}) = trE[(M\sigma^2 I)]$$
$$\boldsymbol{E(\hat{u}'\hat{u}) = \sigma^2 tr[(M)]}$$

بمعلومية:

$$tr[(M)] = n - k$$

نجد:

$$E(\hat{u}'\hat{u}) = \sigma^2[n - k]$$

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \frac{E(\hat{u}'\hat{u})}{n-k} = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-k}}$$

في حالة الانحدار المتعدد حيث هناك $k+1$ معلم للتقدير و n عدد المشاهدات، وهذا يُعطي عدد درجات الحرية $n-k-1$ إذن :

$$\boxed{\hat{\sigma}_u^2 = \frac{u'u}{n-k-1} = \frac{\sum u^2}{n-k-1}}$$

2. الخصائص الإحصائية للمعالم المقدرة:

✦ خاصية عدم التحيز:

نقول أن $\hat{\beta}$ أفضل متحيز للمعلمة β إذا كان توقع المعلمة المقدرة $\hat{\beta}$ يساوي β وهذا ما تم البرهان عليه سابقا في توقع المعلمات المقدرة حيث نجد أن $\hat{\beta}$ **المحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى مقدرة غير متحيزة**

$$\boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$$

- **خاصية الكفاءة:**

نقول عن المعلمة $\hat{\beta}$ مقدر كفؤ إذا كان يتميز بأصغر تباين، حسب نظرية " **Gausse – Marcov"** والتي تقول من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية "OLS" أفضل مقدرات خطية غير متحيزة" ***BLUE*** " حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى. تتضمن هذه النظرية خاصية أقل تباين للمقدرات ويمكن البرهنة عليها بعد إيجاد تباينات المقدرات كما يلي:

من المصفوفة أعلاه يمكن استنتاج ما يلي:

$$Var\ (\hat{\beta}) = diag\ \ \Omega_{\hat{\beta}}$$

$$var(\hat{\beta}) = diag\sigma_u^2(\grave{x}x)^{-1}$$

أي أن:

$$VAR(\hat{\beta}) = \sigma_u^2\ \ diag\ \ (\grave{x}x)^{-1}$$

يمكن الاستنتاج التالي:

تباين أي عنصر من عناصر $\hat{\beta}$ هو عبارة عن حاصل ضرب قيمة $\sigma_\varepsilon{}^2$ بما يقابلها من العناصر الواقعة على قطر المصفوفة $(X'X)^{-1}$، كما أن قيمة التباين المشترك بين أي اثنين من عناصر $\hat{\beta}$ هو عبارة عن حاصل ضرب $\sigma_\varepsilon{}^2$ بالعنصر المقابل لها والواقع خارج نطاق القطر للمصفوفة $(X'X)^{-1}$.

يمكن أن نبرهن عن هذا التباين $\Omega_{\hat{\beta}}$ هو الأقل بحساب نهايته عندما يكون n كبير نسبيا :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2\ \ (\grave{x}\ \ x)^{-1} = \sigma_u^2\ \frac{n}{n}\ (\grave{x}\ \ x)^{-1} = \frac{\sigma_u^2}{n}\left(\frac{1}{n}\ \grave{x}\ x\right)^{-1}$$

بتحقق الفرضيتين الرابعة والخامسة فإن :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \frac{\sigma_u^2}{n}\left(\frac{\grave{x}\ x}{n}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{lim\ \Omega_{\hat{\beta}}\ = 0\ \ si\ \ \ n \longrightarrow \infty}$$

- **خاصية الاتساق:**

نقول أن المعلمات المقدرة هي **مقدرات متسقة** إذا تحقق ما يلي: **كلما كبر حجم العينة فإن قيمة المعلمة المقدرة** $\hat{\beta}$ **تقترب من قيمة المعلمة الحقيقية β، وتباين المعلمة المقدرة يقترب من الصفر**

يمكن التعبير رياضيا كما يلي:

بما أن $\hat{\beta}$ تحقق الشروط :

$$\boxed{\underset{\lim}{\mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}})} = \boldsymbol{\beta}}$$

فإن المقدرات $\hat{\beta}$ هي مقدرات متسقة للمعالم $\hat{\beta}$

المحاضرة الثامنة: اختبار الفرضيات وجودة النموذج

نقوم بإجراء اختبار معنوية الانحدار المتعدد والمقدر باستخدام:

توزيع اختبار إحصاءه F ومقارنته باختبار t ومن ثم تقييم كفاءة الأداء العام لنموذج الانحدار المتعدد R^2 ومقارنته بمعامل

التحديد المقدر المعدل $\bar{R}^2$ ،

وكذلك اختبار العلاقة بين F و R^2 من خلال جدول تحليل التباين $ANOVA$, ثم علاقة R^2 بقيمة المتغير العشوائي $\sum u_i^2$

1. اختبار معنوية المعالم (t) :

يستخدم اختبار t لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \ldots, \ldots, X_k$ في المتغير التابع y في نموذج الانحدار المتعدد يعتمد على نوعين من الفروض:

- **الخطوة الأولى :**وضع الفرضية الصفرية والفرضية البديلة
  - الفرضية العدمية: عدم وجود علاقة بين المتغيرين (المتغير غير معنوي)
  - الفرضية البديلة: وجود علاقة بين المتغيرين (المتغير معنوي)

$$\begin{cases} \boldsymbol{H_0}: \hat{B}_i = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{H_1}: \hat{B}_i \neq \mathbf{0} \end{cases} \qquad i = 0,1,\ldots,k$$

- **الخطوة الثانية :**حساب قيمة ستودنت المحسوبة t_{cal}.

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية لتحديد قبول او رفض فرضية العدم ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر، والصيغة الرياضية لهذا الاختبار يمكن بيانها كما يلي:

القيمة المحسوبة:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_i فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي: $t_c = \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}$ ،

- **الخطوة الثالثة :**اتخاذ القرار

يتم قبول أو رفض الفرضية H_0 بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ على أساس مقارنة t_C مع القيمة المجدولة t_t حيث أن : t_t يتم قراءتها من جدول ستودينت كالتالي: $t_{n-k}^{\alpha/2}$ حيث أن:

$\frac{\alpha}{2}$: مستوى المعنوية　　و k: <u>عدد المعلمات المقدرة</u> في نموذج الانحدار الخطي المتعدد المراد دراسته .

إذا كانت　$\left|\frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}\right| \leq t_{n-k}^{\alpha/2}$: ففي هذه الحالة المعلمة **ليس لها معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر**

إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}}\right| > t_{n-k}^{\alpha/2}$ أي المعلمة لها معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر.

ملاحظة: عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n \geq 30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

2. معامل التحديد R^2 : Multiple Coefficient of determination

هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع ويعتبر كمؤشر أساسي في تقييم مدى معنوية العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات المستقلة (X_k) قيمته محصورة بين الصفر والواحد الصحيح $0 \leq R^2 \leq 1$

هو عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قيل خط الانحدار إلى الانحرافات الكلية " Total variation "فانه يمثل نسبة مجموع مربعات التغير في المتغيرات المستقلة إلى مجموع المربعات الكلية:

لدينا :

- **مجموع مربعات الانحدار**

SST: تمثل الانحرافات الكلية

SSE: تمثل الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار

SSR=u'u: تمثل الانحرافات غير الموضحة .

$$\sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum(y_i - \hat{y})^2 + \sum(\hat{y} - \bar{y})^2$$

$$SST = \quad SSE \quad + \quad SSR$$

- **الانحرافات الكلية:**

$$SST = \sum(y_i - \bar{y})^2$$

- $SST = \sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2$

- **الانحرافات المفسرة:**

- $SSE = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum \hat{y}_i - n\bar{y}^2$

- **الانحرافات الغير المفسرة :**

- $\boldsymbol{SSR} = \sum(\hat{y} - \bar{y})^2$

$$\boxed{\boldsymbol{R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}}}$$

- **طريقة الانحر افات لإيجاد معامل التحديد:**

يمكن إيجاد معامل التحديد بالانحرافات كما يلي:

$$y_i = Y_i - \bar{Y} \quad , \quad x_i = X_i - \bar{X} \qquad \forall i = 1......n$$

$$\hat{u} = y - \hat{y} = y - x\,\hat{\beta}$$
$$\hat{u}'\hat{u} = (y - x\,\hat{\beta})'(y - x\,\hat{\beta})$$
$$\hat{u}'\hat{u} = (y' - x'\,\hat{\beta}')(y - x\,\hat{\beta})$$
$$\hat{u}'\hat{u} = y'y - (y'x\,\hat{\beta}) - (x'\hat{\beta}'y) + \hat{\beta}'x'x\,\hat{\beta})$$
$$\hat{u}'\hat{u} = y'y - \left(x'\hat{\beta}'y\right) - (x'\hat{\beta}'y) + (\hat{\beta}'x'x\,\hat{\beta})$$

منقول مصفوفة رقمية مساوي مصفوفة رقمية $(y'x\,\hat{\beta}) = (x'\hat{\beta}'y$

$$\hat{u}'\hat{u} = y'y - 2(x'\hat{\beta}'y) + (\hat{\beta}'x'x\,\hat{\beta})$$

لدينا:

$$x'x\,\hat{\beta} = x'x\,(x'x\,)^{-1}\,x'y = x'y$$

ومنه:

$$\hat{u}'\hat{u} = y'y - \hat{\beta}'x'y$$
$$\Longrightarrow y'y = \hat{\beta}'x'y + \hat{u}'\hat{u} \text{ ....(1)}$$

حيث:

الانحرافات الكلية $SST = y'y$

الانحرافات المفسرة $SSE = \hat{\beta}'x'y$

الانحرافات الغير مفسرة $SSR = \hat{u}'\hat{u}$

بتقسيم طرفي المعادلة (1)على y' نحصل على :

$$1 = \frac{\hat{\beta}'x'y}{y'y} + \frac{\hat{u}'\hat{u}}{y'y}$$
$$1 = \frac{SSE}{SST} + \frac{SSR}{SST}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}}}$$

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'x'y}{y'y} = \frac{\hat{\beta}'x'x\hat{\beta}'}{y'y} = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}}{y'y} \qquad y'y = \sum y_i^2$$
$$\Longrightarrow R^2 = \frac{\hat{\beta}'x'y - n\bar{y}^2}{y'y - n\bar{y}^2}$$

$$\boxed{R^2 = \frac{\hat{\beta}'x'y - n\bar{y}^2}{y'y - n\bar{y}^2} = \frac{\hat{\beta}'x'y - n\bar{y}^2}{y'y - n\bar{y}^2}}$$

ملاحظة :

- إذا كان: R^2 قريب من الواحد فهذا يدل على جودة التوفيق وقوة القدرة التفسيرية للنموذج والعكس صحيح.
- إذا كان: SSR=0 فهذا يعني أن النموذج هو عبارة عن خط مستقيم ولا توجد أخطاء في النموذج وهي حالة نادرة الحدوث.
- إذا كان: SSE=0 فهذا يعني ان المتغيرات المستقلة لا تفسر إطلاقا المتغير التابع وهي حالة نادرة الحدوث ايضا.

3. معامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$:

إن إضافة متغيرات مستقلة جديدة إلى المعادلة يؤدي إلى رفع قيمة R^2 ، وذلك لثبات قيمة المقام وتغير قيمة البسط بمقدار $(\hat{\beta}'X'Y)$ غير أن الاستمرار بإضافة المتغيرات المستقلة سيؤدي إلى انخفاض درجات الحرية $(n-k-1)$ ، مما يتطلب استخراج معامل التحديد المعدل أو المصحح $\bar{R}^2$ على النحو الآتي:

$$\bar{R}^2 = \left[1 - \frac{SSR/_{n-k}}{SST/_{n-1}}\right]$$

$$\bar{R}^2 = \left[1 - \left(\frac{SSR}{SST}\right)\frac{n-1}{n-k}\right]$$

- **علاقة معامل التحديد بمعامل التحديد المصحح**

$$\bar{R}^2 = \left[1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}\right]$$

- إذا كان حجم العينة كبير، فإن $\bar{R}^2$ و R^2 يقتربان في قيمتهما، فإن R^2 يؤول إلى $\bar{R}^2$

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}^2 = 1 - \lim_{n\to\infty}(1 - R^2)\frac{n-1}{n-k} = R^2$$

- إذا كان حجم العينة صغير، وعدد المتغيرات المستقلة كبيرا بالمقارنة بحجم العينة فإن $\bar{R}^2$ يقل بكثير على ^{2}

كما يمكنه ان يأخذ قيم سالبة

4. اختبار فيشر F – Statistics

يستهدف هذا الاختبار معرفة مدى معنوية العلاقة الخطية بين المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \ldots X_K$ على المتغير التابع Y ، وكما هو الحال في الانحدار البسيط فإنه يعتمد على نوعين من الفروض:

- **الخطوة الأولى**:وضع الفرضية الصفرية والفرضية البديلة

الفرضية العدمية:عدم معنوية العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل

$$H_0:\ B_0 = B_1 = B_2 \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

<u>**الفرضية البديلة**:</u>وجود علاقة بين المتغير التابع المستقل، النموذج معنوي :

$$H_0:\ B_0 \neq B_1 \neq B_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \neq 0$$

- **الخطوة الثانية**:حساب إحصائية فيشر المحسوبة والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي :

$$F = \frac{\frac{SSR}{K-1}}{\frac{SSE}{n-k}} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2/K-1}{\sum(y_i - \hat{y}_i)/_{n-k}} = \frac{\grave{\hat{\beta}}\grave{x}y - n\bar{y}}{\sum u_i^2/_{n-k}}$$

- **الخطوة الثالثة : اتخاذ القرار:** وبعد احتساب قيمة F تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية (k) و $n-k$ للبسط والمقام ولمستوى معنوية معين .

- عندما تكون $F_{Tab} \langle |F_{Cal}|$ نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن **معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.**
- عندما تكون $F_{Tab} \leq |F_{Cal}|$ نقبل فرضية العدم (H_0) أي جميع المتغيرات التفسيرية لا تمارس أي تأثير على المتغير التابع وتكون **معادلة الانحدار المقدرة غير معنوية إحصائيا.**

علاقة معامل التحديد بإحصائية فيشر:

$$F = \frac{R^2/K-1}{(1-R^2)/n-k} \simeq F_\alpha(k.n-k)$$

5. جدول تحليل التباين ANOVA:

لغرض الوقوف على تأثير كل من (X_1) ، (X_2) في المتغير التابع Y ، لابد من عمل جدول تحليل التباين لبيان أثر المتغيرين المستقلين (X_1) و (X_2) في النموذج.

جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	F
الانحرافات المفسرة	$SSE=\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2$ $SSE=\hat{\beta}'x'y$	K-1	$F=\dfrac{\frac{SSE}{k-1}}{\frac{SSR}{n-k}}$
الانحرافات الغير موضحة $\sum u_i^2$	$SSR=\sum(y_i-\hat{y})^2$ Ou $SSR=u'u$	n-k	
الانحرافات الكلية	$SST=\sum(y_i-\bar{y})^2$ $SST=y'y$	n-1	

تابع للمثال السابق: في المثال التطبيقي السابق اوجد ما يلي:

1. التوقع والانحراف المعياري للمعلمات المقدرة؟
2. احسب معامل التحديد ومعامل التحديد المصحح؟
3. اعداد جدول تحليل التباين اختبر إحصائية فيشر؟

¬ حساب الانحراف المعياري المقدر للمعلمات المقدرة.

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} var(\hat{\beta}_0) & cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2) \\ cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & var(\hat{\beta}_1) & cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_0) & cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

حسب القانون:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_u^2(\grave{x}x)^{-1}$$

الخطأ المعياري يساوي:

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{u'u}{n-k} = \frac{\sum u_i^2}{n-k} = \frac{SSR}{n-k}$$

لحساب الانحراف الغير المفسر لدينا:

$$\sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum(y_i - \hat{y})^2 + \sum(\hat{y} - \bar{y})^2$$

- **حساب التباين الإجمالي:**

$$SST = \sum(y_i - \hat{y})^2 + \sum \hat{u}_i^2$$

$$SST = \sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2$$

$$\Rightarrow SST = 13\,655 - 12\,(33.58)^2 = 123.60$$

$$\boxed{SST = 123.60}$$

- **حساب التباين المفسر:**

$$SSE = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}(\grave{x}y) - n\bar{y}^2$$

$$SSE = (20.51 \quad 0.63 \quad 0.79)\begin{pmatrix} 403 \\ 3996 \\ 3591 \end{pmatrix} - 12(33.58)^2$$

$$SSE = 13\,619{,}9 - 13\,531{,}3968 = 88.51$$

$$\boxed{SSE = 88.51}$$

- **حساب التباين الغير المفسر:**

$$SSR = \sum e_i^2 = SST - SSE = 123{,}60 - 88{,}51 = 35{,}09$$

$$\boxed{SSR = 35{,}09}$$

ومنه الخطأ المعياري يساوي

$$\hat{\delta}_e^2 = \frac{u\prime u}{n-k} = \frac{SSR}{n-k-1} = \frac{35{,}09}{12-3} = 3{,}89$$

$$\boxed{\hat{\delta}_e^2 = 3{,}89}$$

وبالتعويض نحصل على مصفوفة التباين المشترك

$$\Omega_{\hat\beta}=\begin{bmatrix} var(\hat\beta_0) & cov(\hat\beta_0\hat\beta_1) & cov(\hat\beta_0\hat\beta_2)\\ cov(\hat\beta_1\hat\beta_0) & var(\hat\beta_1) & cov(\hat\beta_1\hat\beta_2)\\ cov(\hat\beta_2\hat\beta_0) & cov(\hat\beta_2\hat\beta_1) & var(\hat\beta_2)\end{bmatrix}$$

$$\Omega_{\hat\beta}=\delta_{ui}^2(x\grave{x})^{-1}=3{,}89*\frac{1}{71\,958}\begin{pmatrix}138037 & -6723 & -7599\\ -6723 & 843 & -171\\ -7599 & -171 & 1059\end{pmatrix}$$

- حساب تباين والانحراف المعياري للمعلمات المقدرة:

$$\Omega_{\hat\beta}=\sigma_u^2(\grave{x}x)^{-1}$$

$$Var(\hat\beta_0)=3{,}89*\frac{1}{71\,958}*(138037)=7.46 \qquad \delta_{\hat\beta_0}=\sqrt{7.46}=2{,}46$$

$$Var(\hat\beta_1)=3{,}89*\frac{1}{71\,958}*(843)=0.04 \qquad \delta_{\hat\beta_0}=\sqrt{0.04}=0{,}2$$

$$Var(\hat\beta_2)=3{,}89*\frac{1}{71\,958}*(1059)=0.057 \qquad \delta_{\hat\beta_2}=\sqrt{0.057}=0.23$$

- إيجاد معامل التحديد مع التفسير R^2:

$$R^2=\frac{SSE}{SST}=\frac{SST-SSR}{SST}=\frac{\sum(\hat y_i-\bar y)^2}{\sum(y_i-\bar y)^2}=\frac{88.51}{123.60}=0.7161$$

أو:

$$R^2=1-\frac{SSR}{SST}=1-\frac{35{,}09}{123.60}=0.7161$$

التفسير: المتغير التابع (Y) مفسر ب : **71.61** % عن طريق المتغيرات المستقلة (X_1) و (X_2) وتبقى 28.39 % تدخل ضمن هامش الخطأ وهي متغيرات أخرى لم تدرج في النموذج أو أخطاء تم ارتكابها أثناء القياس

- إيجاد معامل التحديد المصحح $\bar R^2$:

$$\bar R^2=1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-k}$$

$$\bar R^2=1-(1-0.71)\frac{12-1}{12-3}=0.64$$

K: يمثل عدد المعلمات المقدرة

- إيجاد جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	F
الانحرافات المفسرة	88.51	2	$F=\frac{88.51/2}{\frac{35.09}{9}}$ =11.37
الانحرافات الغير موضحة	35,09	9	
الانحرافات الكلية	123.60	11	

✦ **اختبار إحصائية فيشر:**

$$F_{cal} = 11.37 > F_{tab} = F_{(2,9)}^{0.05} = 4.26$$

- عندما تكون $F_{Tab} \rangle |F_{Cal}|$ نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع **بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.**

المحاضرة التاسعة: مجال الثقة للمعلمات والتنبؤ

1. قياس حدود الثقة

عند مستوى معنوية $(\alpha\%)$ يكون مجال الثقة لكلا المعلمين :

مجال الثقة للمعلمات

$$\boldsymbol{\beta} \in \left[\hat{\boldsymbol{B}}_i - t_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{\hat{B}_i} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{B}}_i + t_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{\hat{B}_i} \quad \right]$$

$t_{n-k}^{\alpha/2}$: القيمة الحرجة لتوزيع $Student$ بدرجة حرية $n-k$ و نسبة معنوية $\left(\%\frac{\alpha}{2}\right)$ ونجدها من جدول لتوزيع القيمة المحسوبة.

<u>ملاحظة:</u> عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n \geq 30)$تصدر الإشارة القيم الجدولية لجدول ستيودنت تقترب من القيم الجدولية للتوزيع الطبيعي تبعا لتقارب التوزيعات الاحتمالية.

يمكن استعمال العلاقة السابقة كالآتي:.

$$\beta \in \left[\hat{B}_i - Z_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{B}_i} \quad , \quad \hat{B}_i + Z_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{B}_i} \quad \right] \qquad i= \ 0 ,1,2,3 \ .....K$$

<u>يمكن حساب مجال الثقة بالطريقة التالية:</u>

$$\boldsymbol{\beta} \in \left[\hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{n-2}^{\alpha/2}\sqrt{(x\grave{x})^{-1}}, \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{n-2}^{\alpha/2}\sqrt{(x\grave{x})^{-1}}\right]$$

$$\beta \in \left[\hat{B}_i - Z_{n-k}^{\alpha/2}\sqrt{(x\grave{x})^{-1}} \ , \ \hat{B}_i + Z_{n-k}^{\alpha/2}\sqrt{(x\grave{x})^{-1}}\right]$$

مجال الثقة لتباين الأخطاء :

عند مستوى معنوية $(\alpha\%)$ يكون مجال الثقة لتباين الخطاء:

$$pr\left[\mathcal{X}^2(n-k \ ,\frac{\alpha}{2}) \leq \frac{(n-k)\delta_u^2}{\delta_u^2} \ \leq \mathcal{X}^2(n-k, 1-\frac{\alpha}{2})\right] = 1-\alpha$$

$$\delta_u^2 \in \left[\frac{(n-k)\delta_u^2}{\mathcal{X}^2(n-k, 1-\frac{\alpha}{2})} \quad , \quad \frac{(n-k)\delta_u^2}{\mathcal{X}^2(n-k \ , \ \frac{\alpha}{2})}\right]$$

$\mathcal{X}^2\left(n-k, 1-\frac{\alpha}{2}\right)$ و $\mathcal{X}^2\left(n-k \ , \ \frac{\alpha}{2}\right)$

القيم الحرجة لتوزيع **كاي تربيع** عند مستوى معنوية α ودرجة حرية $n-k$ حيث K تمثل عدد المعلمات المقدرة

✦ التنبؤ باستعمال الانحدار الخطي المتعدد

لاحتساب حدود الثقة لأية مشاهدة (نقطة) من مشاهدات الانحدار للمجتمع أو بعبارة أخرى لحساب القيمة الحقيقية ل Y عند مستوى معنوية معين للمتغير المستقل في النموذج، نفترض أن النقطة المراد تقدير حدود ثقتها هي Y_f. ولتقدير المجال الذي يمكن أن تقع فيه قيمة Y_f المقابلة لتشكيلة معينة من قيم المتغيرات المستقلة (k) يجب اشتقاق متباينة القيمة Y_f. ومقدر المربعات الصغرى الاعتيادية

$$\hat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1}\grave{x}y = AY$$

التنبؤ في المستقبل باستخدام نموذج الانحدار المتعدد بفترة واحدة كما يلي:

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1,n+1} + \hat{\beta}_2 X_{2,n+1} + \cdots + \cdots\ \hat{\beta}_K X_{K,n+1}$$

التنبؤ في المستقبل باستخدام نموذج الانحدار المتعدد بفترتين كما يلي:

$$\hat{y}_{n+2} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1,n+2} + \hat{\beta}_2 X_{2,n+2} + \cdots + \cdots\ \hat{\beta}_K X_{K,n+2}$$

التنبؤ في المستقبل بعد m فترة كما يلي:

$$\hat{y}_{n+h} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1,n+h} + \hat{\beta}_2 X_{2,n+h} + \cdots + \cdots\ \hat{\beta}_K X_{K,n+h}$$

ويكون المقدر بفترة h في المستقبل

$$\hat{y}_{n+h} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1,n+h} + \hat{\beta}_2 X_{2,n+h} + \cdots + \cdots\ \hat{\beta}_K X_{K,n+h}$$

شعاع القيم التقديرية يكون كما يلي:

$$\hat{y}_n^h = \begin{bmatrix} \hat{y}_{n+1} \\ \hat{y}_{n+2} \\ . \\ . \\ \hat{y}_{n+h} \end{bmatrix}$$

مصفوفة ملاحظة المتغيرات المستقلة المستقبلية كما يلي:

$$x_n^h = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \cdots\cdot & x_{k,n+1} \\ 1 & x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & \cdots\cdot & x_{k,n+2} \\ . & . & . & \cdots\cdot & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_{1,n+h} & x_{2,n+h} & \cdots\cdot & x_{K,n+h} \end{bmatrix}$$

النموذج الخطي العام المتنبئ به كما يلي:

$$\hat{y}_n^h = x_n^h \beta + u_n^h$$

تمارين مع الحل

التمرين الأول: لتكن لديك المعطيات التالية الخاصة بتقدير نموذج الانحدار الخطي البسيط

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X + u_i$$

$$\sum x_i y_i = 22206745 \qquad \sum x_i = 92\,599.98 \qquad \sum x_i^2 = 68301935$$

$$n=204 \qquad \sum y_i = 43\,649.77 \qquad \sum y_i^2 = 9\,598\,710$$

المطلوب:

1. قدر معلمات النموذج
2. احسب قيم SST .SSE مع العلم أن SSR=40 966.20
3. قدر تباين الخطأ وتباين المعلمة $\hat{\beta}$
4. احسب معامل التحديد

الحل:

1. تقدير معلمات النموذج

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{204(22206745) - (92599.98)(43649.77)}{204(68301935) - (92599.98)^2} = 0.091$$

$$\boxed{\hat{\beta} = 0.091}$$

بحساب قيم $\bar{x}$ و $\bar{y}$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\mathbf{92\,599.98}}{204} = 435.9215 \qquad \bar{y} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\mathbf{43649.77}}{204} = 213.9695$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \Rightarrow \hat{\alpha} = 213.9695 - 0.091(435.9215) = 174.3006$$

$$\boxed{\hat{\alpha} = 174.3006}$$

معادلة التقدير:

$$\boxed{\hat{y}_i = 174.3006 + 0.091\, x_i}$$

2. احسب قيم SST .SSE

$$SST \Leftrightarrow \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2$$

$$= 9\,598\,710 - 204(213.9695)^2 = 258\,988.8262$$

$$\boxed{SST = 258\,988.8262}$$

$$SSE = SST - SSR = 258\,988.8262 - 40\,966.20$$

$$\boxed{\boldsymbol{SSE} = 218\,022.6262}$$

3. تقدير تباين الخطأ وتباين المعلمة $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$

$$\delta^2_{u_i} = \frac{\sum u_i^2}{n-2} = \frac{SSR}{n-2} = \frac{40\,966.20}{202}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\delta^2_{u_i}} = 202{,}8029}$$

بمعلومية

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 68\,301\,935 - 204(435{,}9215)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 29\,536\,313.9509$$

$$\delta^2{}_{\widehat{\beta}} = \frac{\delta^2_{u_i}}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{202{,}8029}{29\,536\,313.9509}$$

4. حساب معامل التحديد:

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = \frac{218\,022.6262}{258\,988.8262}$$

$$\boxed{R^2 = 0{,}84}$$

التمرين الثاني: لتكن لديك المعطيات التالية :

$$\widehat{\boldsymbol{y}}_i = 174.3006 + 0.091\, \boldsymbol{x_i}$$

$\delta_{u_i} = 177$ $\qquad$ $R^2 = 0.88$ $\qquad$ $n=27$

المطلوب:

1. احسب قيم SST ,SSE ,SSR؟
2. احسب إحصائية فيشر؟
3. اوجد جدول تحليل التباين؟

الحل:

1. **حساب قيم SST ,SSE ,SSR**

لدينا:

$$\delta_{u_i} = 177 \Rightarrow \delta^2_{ui} = 31\,329$$

$$\delta^2_{u_i} = \frac{\sum u_i^2}{n-2} = \frac{SSR}{n-2} \Rightarrow SSR = \delta^2_{u_i}\,(n-2)$$

$$\Rightarrow SSR = 31\,329(25) = 783\,225$$

$$\boxed{SSR = 783\,225}$$

حسب القانون:

$$R^2 = 1 - \frac{SSR}{SST} \Rightarrow \frac{SSR}{SST} = 1 - R^2 \Rightarrow \frac{SSR}{SST} = 1 - 0.88$$

$$SST = \frac{SSR}{0.12}$$

$$\boxed{SST = 6\ 526\ 875}$$

$$SSE = SST - SSR = 5\ 221\ 500 - 783\ 225$$

$$\boxed{SSE = 5\ 743\ 650}$$

2. حساب إحصائية فيشر

$$\mathrm{F} = \frac{\frac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{K}-1}}{\frac{\mathrm{SSR}}{\mathrm{n}-\mathrm{k}}} = \frac{\frac{5\ 743\ 650}{2-1}}{\frac{783\ 225}{27-2}}$$

$$\boxed{\mathrm{F} = 183.33}$$

3. جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	F
الانحرافات	$SSE = 5\ 743\ 650$	1	$\boldsymbol{F = 183.33}$
الانحرافات الغير موضحة $\sum \boldsymbol{u_i^2}$	$SSR = 783\ 225$	25	
الانحرافات الكلية	$SST = 6\ 526\ 875$	26	

التمرين الثالث: إذا توفرت لديك البيانات التالية:

$\sum y_i^2 = 1524.716$ $n=37$ $\sum x_i y_i = 3301$

$\delta_y = 2.91$ $\delta_{u_i} = 2.53$ $\sum x_i^2 = 124\ 806$ $\delta_x = 32.90$

المطلوب:

1. أحسب SST، SSR, SSE؟
2. قدر معلمات النموذج ؟
3. اختبر معنوية $\widehat{\beta}$ عند مستوى معنوية5%؟
4. اختبر معنوية النموذج ككل؟

الحل:

1. حساب SST، SSR, SSE؟

$$\delta_y^2 = \frac{\sum(\boldsymbol{y_i} - \overline{\boldsymbol{y}})^2}{n} = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{SST}{n}$$

$$\Rightarrow SST = n * \delta_y^2 \Rightarrow SST = 37 * (2.91)^2 = 313.32$$

$$\boxed{SST = 313.32}$$

$$\delta_{u_i}^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-2} = \frac{SSR}{n-2} \Rightarrow SSR = (n-2) * \delta_{u_i}^2$$

$$\Rightarrow SSR = 35 * (2.53)^2 = 224.03$$

$$\boxed{SSR = 224.03}$$

$$SST=SSE+SSR \Longrightarrow SSE = SST - SSR$$

$$\Longrightarrow SSE = 313.32 - 224.03 = 89.29$$

$$\boxed{SSE = 89.29}$$

2. تقدير معلمات النموذج:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$\delta_x = 32.90 = \sqrt{\frac{\sum(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$\Longrightarrow \delta_x^2 = (32.90)^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \Longrightarrow \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \delta_x^2$$

$$\Longrightarrow \bar{x}^2 = \frac{124\,806}{37} - (32.90)^2 = 3373.135 - 1082.41$$

$$\Longrightarrow \bar{x}^2 = 2290.725$$

$$\boxed{\bar{x} = 47.86}$$

$$\delta_y^2 = (2.91)^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2 \Longrightarrow \bar{y}^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \delta_y^2$$

$$\Longrightarrow \bar{y}^2 = \frac{1524.716}{37} - (2.91)^2 = 41.208 - 8.468 \Longrightarrow \bar{y}^2 = 32.74$$

$$\boxed{\bar{y} = 5.72}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{3301 - 37*5.72*47.86}{124\,806 - 37*(47.86)^2} = \frac{-6828.09}{40054.55} = 0.17$$

$$\boxed{\hat{\beta} = -0.17}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \Rightarrow \hat{\alpha} = 5.72 + 0.17 * 47.86$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = 13.85$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{y}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{13.85 - 0.17\, x_i}}$$

3. اختبر معنوية ^ عند مستوى معنوية 5%

$$\begin{cases} H_0: \beta = 0 \\ H_1: \beta \neq 0 \end{cases}$$

$$t_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\beta}}{\delta_{\hat{\beta}}}$$

$$\delta^2{}_{\hat{\beta}} = \frac{\delta^2_{u_i}}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

لدينا:

$$\delta_x^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow \sum(x_i - \bar{x})^2 = n * \delta_x^2 = 37 * (32.90)^2$$

$$\Rightarrow \sum(x_i - \bar{x})^2 = 40\,049.17$$

$$\delta^2{}_{\hat{\beta}} = \frac{(2.53)^2}{40\,049.17} = 0.00015$$

$$\delta_{\hat{\beta}} = 0.012$$

$$t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\beta}}{\delta_{\hat{\beta}}} = \frac{-0.17}{0.012} = -14.16$$

$$t_{cal} = 14.16 > t_{tab(10-2)}^{\alpha\%} = 2.00$$

tالمحسوبة أكبر من t الجدولية نقبل الفرضية العدمية وبالتالي المعامل معنوي احصائيا

4. اختبار معنوية النموذج ككل

$$F = \frac{\frac{SSE}{K-1}}{\frac{SSR}{n-k}} = \frac{89.29}{\frac{224.03}{35}}$$

$$\boxed{F = 13.94}$$

$$\mathrm{F_{cal}} = 13.94 > F_{tab} = F_{(1,35)}^{0.05} = 4.11$$

نقبل الفرضية البديلة وبالتالي النموذج معنوي

التمرين الرابع:

لتكن لدينا المعطيات التالية :

$\boldsymbol{var(x) = 3}$	$\boldsymbol{\bar{y} = 32}$	$\boldsymbol{\bar{x} = 8}$
$var(y) = 30.2$	$cov(x,y) = 7.4$	$\boldsymbol{x_{n+1} = 24}$

المطلوب:

1. قدر النموذج التالي بطريقة المربعات الصغرى؟
2. -حدد مجال الثقة ل $\hat{y}_{i+1}$ عند مستوى معنوية 5% بمعلومية $\delta_{u_i} = 3.8643$، SST=302؟

الحل:

1. **تقدير معلمات النموذج بطريقة المربعات الصغرى؟**

لدينا:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\begin{cases} cov(x,y) = 7.4 \\ var(x) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = 7.4 \\ \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 7.4n \\ \sum(x_i - \bar{x})^2 = 3n \end{cases}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{7.4n}{3n} = 2.47$$

لحساب $\hat{\alpha}$:

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

$$\hat{\alpha} = 32 - (2.47)8 = 12.24$$

معادلة التقدير

$$\boxed{\hat{y}_i = 12.24 + 2.47\, x_i}$$

$$y_{n+1} \in \left[\hat{y}_{n+1} - t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{u_{n+1}}, \hat{y}_{n+1} + t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{u_{n+1}}\right]$$

$$\hat{y}_{n+1} = 12.24 + 2.47x_{n+1} \Rightarrow \hat{y}_{n+1} = 12.24 + 2.47 * (24) \Rightarrow \hat{y}_{n+1} = 71.5$$

$$\delta_{u_i} = 3.8643 \Rightarrow \boldsymbol{\delta^2_{u_i}} = 14.9328$$

تباين خطأ التنبؤ

لحساب n نستعمل المعادلة التالية:

$$SST = n * var(y) \Leftrightarrow n = SST/var(y) = \frac{302}{30.2} = 10$$

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = n * var(x) \Rightarrow \sum(x_i - \bar{x})^2 = 10 * 3 = 30$$

$$\hat{\delta}_{u_{n+1}} = \delta^2_{u_i}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

$$\hat{\delta}_{u_{n+1}} = 14.9328\left[1 + \frac{1}{10} + \frac{(24-8)^2}{30}\right] = 143.85$$

$$y_{n+1} \in [71.52 - 2.306 * (143.85) \quad , \quad 71.52 + 2.306 * (143.85)]$$

$$\boxed{y_{n+1} \in [-260.19 \quad , \quad 403.23]}$$

التمرين الخامس: لدينا المعطيات التالية

$$\sum x_1 = 19.50 \qquad \sum x_2 = 1.33 \qquad \sum x_3 = 29.87 \qquad \sum y^2 = 0.0115$$

$\sum yx_1 = 0.272$　　$\sum yx_2 = 0.0239$　　$\sum yx_3 = 0.433$　　n=40

$\sum x_1x_2 = 0.566$　　$\sum x_1x_3 = 14.67$　　$\sum x_2x_3 = 0.993$　　$\sum y = 0.596$

$\sum x_1^2 = 10.269$　　$\sum x_2^2 = 0.078$　　$\sum x_3^2 = 22.608$

1. قدر معاملات هذا النموذج؟
2. أوجد $\boldsymbol{R^2}$ و $\boldsymbol{\bar{R}^2}$ ؟
3. اختبر المعنوية الكلية للانحدار المقدر عند مستوى 5% ؟

الحل:

1. **تقدير معاملات هذا النموذج؟**

$$\hat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1}\grave{x}y$$

$$(\grave{x}x) = \begin{bmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 & \sum x_3 \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 & \sum x_1x_3 \\ \sum x_2 & \sum x_2x_1 & \sum x_2^2 & \sum x_2x_3 \\ \sum x_3 & \sum x_3x_1 & \sum x_3x_2 & \sum x_3^2 \end{bmatrix} \Rightarrow = \begin{bmatrix} 40 & 19.50 & 1.33 & 29.87 \\ 19.50 & 10.269 & 0.566 & 14.67 \\ 1.33 & 0.566 & 0.078 & 0.993 \\ 29.87 & 14.67 & 0.993 & 22.608 \end{bmatrix}$$

$$(\grave{x}y) = \begin{pmatrix} \sum y \\ \sum y\,x_1 \\ \sum y\,x_2 \\ \sum y\,x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\grave{x}y) = \begin{pmatrix} 0.596 \\ 0.272 \\ 0.0239 \\ 0.433 \end{pmatrix}$$

حساب مقلوب المصفوفة: حسب الطريقة المتبعة في الدرس نجد

$$(\grave{x}x)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.075 & -0.577 & -2.404 & -2.262 \\ -0.577 & 1.910 & 4.656 & -0.681 \\ -2.404 & 4.656 & 40.952 & -1.643 \\ -2.262 & -0.681 & -1.643 & 3.548 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1}(\grave{x}y) \Rightarrow \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 2.075 & -0.577 & -2.404 & -2.262 \\ -0.577 & 1.910 & 4.656 & -0.681 \\ -2.404 & 4.656 & 40.952 & -1.643 \\ -2.262 & -0.681 & -1.643 & 3.548 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.596 \\ 0.272 \\ 0.0239 \\ 0.433 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0428 \\ -0.008 \\ 0.1006 \\ -0.036 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\hat{y} = 0.0428 - 0.008\,x_1 + 0.1006\,x_2 - 0.036\,x_3}}$$

<u>التفسير الاحصائي لنموذج الانحدار المتعدد</u>

- معامل الانحدار $\widehat{B}_0$ يساوي -1.832 أي في حالة عدم وجود تأثير معنوي ل X_1 و X_2 و X_3على Y فان قيمة هذا الاخير سوف تقدر ب -1.832
- معامل الانحدار $\widehat{B}_1$ يساوي 0.946 أي أن في حالة تغير $_1$ بوحدة واحدة ومع ثبات X_2 و X_3 فان Y يتغير ب 0.946
- معامل الانحدار $\widehat{B}_2$ يساوي 10.802أي أن في حالة تغير $_1$ و X_3بوحدة واحدة ومع ثبات X_2 فان Y يتغير ب 10.802
- معامل الانحدار $\widehat{B}_3$ يساوي 1.376أي أن في حالة تغير $_1$ و X_2بوحدة واحدة ومع ثبات X_3 فان Y يتغير ب 1.376

2. إيجاد $\boldsymbol{R^2}$ و $\boldsymbol{\overline{R}^2}$ ؟

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = \frac{\grave{\hat{\beta}} \grave{x} y - n\bar{y}^2}{\grave{y}\, y - n\bar{y}^2}$$

حساب التباين الإجمالي:

$$\neg \quad SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2$$

$$\neg \quad \Rightarrow SST = 0.0115 - 40(0.0149)^2$$

$$\boxed{SST = 0.0026196}$$

حساب التباين المفسر

$$SSE = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \grave{\hat{\beta}}(\grave{x}y) - n\bar{y}^2$$

$$SSE = (0.0428 \quad -0.008 \quad 0.100 \quad -0.036)\begin{pmatrix} 0.596 \\ 0.272 \\ 0.0239 \\ 0.433 \end{pmatrix} - 40(0.0149)^2$$

$$\boxed{SSE = 0.0012544}$$

حساب التباين الغير المفسر

$$SSR = \sum u_i^2 = SST - SSE = 0.0026196 - 0.0012544 = 0.0013652$$

$$\boxed{SSR = 0.0013652}$$

ومنه:

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = \frac{\grave{\hat{\beta}} \grave{x} y - n\bar{y}^2}{\grave{y}\, y - n\bar{y}^2} = \frac{0.0012544}{0.0026196} = 0.4788$$

$$\boxed{R^2 = 0.4788}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - 0.4788)\left[\frac{40-1}{40-2}\right] = 0.4650$$

$$\boxed{\bar{R}^2 = 0.4650}$$

3. اختبار المعنوية الكلية للانحدار المقدر عند مستوى 5%

$$F = \frac{R^2/K-1}{(1-R^2)/n-k} = \frac{0.4788/2}{0.5212/37} = \frac{0.2394}{0.014} = 17.1$$

وبعد احتساب قيمة F تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية $K-1$ و $n-k$ للبسط والمقام ولمستوى معنوية معين .

عندما تكون $F_{Tab} \rangle |F_{Cal}|$ نرفض فرضية العدم (H_0) ونقبل الفرضية البديلة (H_1) مما يدل على أنه من بين معلمات النموذج يوجد واحد على الأقل يختلف عن الصفر أي أن هناك متغيرا مفسرا له تأثير جوهري على المتغير التابع بمعنى أن معادلة الانحدار المقدرة لها معنوية إحصائيا.

التمرين السادس : في دراسة شملت 51 شهرا لإحدى الدول حول العلاقة بين الناتج المحلي الإجمالي كمتغير تابع وكل من الصادرات، الاستثمار الأجنبي المباشر استخدام الطاقة كمتغيرات مستقلة وبعد التقدير تحصلنا على مخرجات الجدول التالي:

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 05/20/22 Time: 12:04
Sample (adjusted): 1969 2019
Included observations: 51 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X1	-0.305800	**VM2**	-0.564386	**VM3**
X2	-9.32E-10	1.45E-10	-6.445276	0.0000
X3	-0.234980	0.461522	-0.509143	0.6130
C	**VM1**	11.66477	6.089411	0.0000

R-squared	**VM5**	Mean dependent var	33.21606
Adjusted R-squared	**VM6**	S.D. dependent var	23.90140
S.E. of regression	16.16871	Akaike info criterion	8.479218
Sum squared resid	VM4	Schwarz criterion	8.630734
Log likelihood	-212.2201	Hannan-Quinn criter.	8.537117
F-statistic	**VM7**	Durbin-Watson stat	0.249944
Prob(F-statistic)	0.000000		

المطلوب :

1. إيجاد المجاهيل في النموذج: VM1,VM2,VM3,VM4,VM5,VM6,VM7؟
2. كتابة معادلة الانحدار المقدر؟
3. كون حدود الثقة للمعلمات المقدرة عند مستوى معنوية **5 %** ؟
4. تنبأ بقيمة الناتج المحلي الإجمالي عندما يكون: $\boldsymbol{x_1 = 124 \quad x_2 = 130 \quad x_2 = 204}$

الحل:

1. إيجاد المجاهيل في النموذج

$$t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha}}{\delta_{\hat{\alpha}}} = \frac{VM1}{11.66477} = 6.089411 \Rightarrow VM1 = 6.089411 * 11.6647 = 71.0315$$

$$\boxed{VM1 = \hat{\alpha} = 71.0315}$$

$$t_{\hat{\alpha}} = \frac{\hat{\alpha}}{\delta_{\hat{\alpha}}} = \frac{-0.305800}{VM2} = -0.564386 \Rightarrow VM2 = \frac{-0.305800}{-0.564386} = 0.54182$$

$$\boxed{VM2 = \delta_{\hat{\alpha}} = 0.54182}$$

من جدول ***Student***

$$t^{\alpha\%}_{tab(51-4)\Rightarrow} t^{VM3}_{(51-4)} = -0.564 \Rightarrow t^{0.6}_{47} = -0.564$$

$$\boxed{VM3 = \alpha\% = 0.6}$$

$$S.E.\ of\ régression = 16.16871 = \delta_{u_i} = \sqrt{\frac{\sum u_i^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{SSR}{n-4}} = \sqrt{\frac{VM4}{n-4}}$$

$$\Rightarrow \delta^2_{u_i} = 261.4272 = \frac{SSR}{51-4}$$

$$\Rightarrow SSR = VM4 = 261.4272 * (47) = 12\,287.08$$

$$\boxed{SSR = VM4 = 12\,287.08}$$

$$\hat{\delta}_y = S.D.\,dependent\ var = 23.90140 = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{SST}{n-1}}$$

$$\Rightarrow SST = (23.90)^2 * 50 \Longrightarrow SST = 28\,560.5$$

$$VM5 = R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST} \Longrightarrow 1 - \frac{12\,287.08}{28\,560.5} \Longrightarrow R^2 = 0.5697$$

$$\boxed{VM5 = R^2 = 0.5697}$$

$$VM6 = \bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\left[\frac{n-1}{n-4}\right]$$

$$\Longrightarrow \bar{R}^2 = 1 - (1 - 0.5697)\left[\frac{50}{47}\right]$$

$$\boxed{VM6 = \bar{R}^2 = 0.5422}$$

$$VM7 = F = \frac{\frac{SSE}{K-1}}{\frac{SSR}{n-k}} = \frac{\frac{R^2}{K-1}}{\frac{1-R^2}{n-K}}$$

$$\Rightarrow VM7 = F = \frac{\frac{0.5697}{3}}{\frac{0.4303}{47}}$$

$$\boxed{VM7 = F = 20.7420}$$

2. **معادلة الانحدار المقدر:**

$$\hat{y} = 71.03 - 0.3057x_1 - 9.32x_2 - 0.23x_3$$

3. **مجال الثقة للمعلمات**

بالنسبة للمعلمة β_0:

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\beta}_0} \quad , \ \hat{\beta}_0 + t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\Rightarrow \beta_0 \in [71.03 - 2.00 * 0.54182 \, , \ 71.03 + 2.00 * 0.54182\,]$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_0 \in [69.94 \ , \ 72.11]$$

بالنسبة للمعلمة β_1

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\beta}_1} \quad , \ \hat{\beta}_1 + t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$$\beta_1 \in [-0.3057 - 2.00 * 1.45 \, , \ -0.3057 + 2.00 * 1.45]$$

$$\Rightarrow \beta_1 \in [-3.2057 \quad , \quad 2.5943]$$

بالنسبة للمعلمة β_2

$$\beta_2 \in [-9.32 - 2.00 * 0.46 \quad , \ -9.32 + 2.00 * 0.46\,]$$

$$\Rightarrow \beta_1 \in [-10.24 \quad , -8.4]$$

بالنسبة للمعلمة β_3

$$\beta_3 \in [-0.23 - 2.00 * 0.46 \quad , \ -0.23 + 2.00 * 0.46\,]$$

$$\Rightarrow \beta_3 \in [-1.15 \quad , -0.69]$$

4. تنبأ بقيمة الناتج المحلي الإجمالي عندما يكون: $x_1 = 6 \quad x_2 = 6 \quad x_2 = 5$

$$\hat{y}_{52} = 71.03 - 0.3057 * (124) - 9.32 * (130) - 0.23 * (204)$$

$$\boxed{\hat{y}_{52} = 12.1258}$$

التمرين الثامن :

لتكن لدينا المعطيات التالية :

$\sum y = 1562.588$　　$\sum X_1 y = 55878.40$　　$\sum X_2 y = 226\,161.5$

$F_{tab} = F^{\alpha}_{(K-1,n-k)} = 3.29$　　$cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = 0.007824$　　$\delta_{ui} = 22.406$

$Var(\hat{\beta}_0) = 356.00$　　$cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -7.113714$　　$Var(\hat{\beta}_1) = 0.1823$

$\delta_y = 31.32$　　$cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2) = -0.753962$　　$Var(\hat{\beta}_2) = 0.0029$

المطلوب:

1. قدر النموذج التالي بطريقة المربعات الصغرى علما أن كل الفرضيات محققة ؟
2. احسب معامل التحديد (R^2) ، ثم أحسب $(\bar{R}^2)$ ؟
3. احسب احصائية فيشر ؟

الحل

1. **إيجاد المعادلة المقدرة باستخدام "OLS" علما أن كل الفرضيات محققة.**

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

لدينا من العلاقة ومن خلال المعطيات المتوفرة $X'Y$ وبالتالي للتقدير تنقصنا $(X'X)^{-1}$

من المعطيات لدينا $\Omega_{\hat{\beta}}$ ونعلم أن :

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \delta_u^2 (\grave{x}x)^{-1} = \begin{bmatrix} 356.00 & -7.113714 & -0.753962 \\ -7.113714 & 0.1823 & 0.007824 \\ -0.753962 & 0.007824 & 0.0029 \end{bmatrix}$$

$$\delta_{ui} = 22.406 \Rightarrow \delta_{ui}^2 = 510.94$$

$$\Rightarrow (\grave{x}x)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.709097 & -0.013923 & -0.001476 \\ -0.013923 & 0.000364 & 1.531237 \\ -0.001476 & 1.531237 & 0.0029 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1} \grave{x}y$$

$$(\grave{x}y) = \begin{pmatrix} \sum y \\ \sum y\, x_1 \\ \sum y\, x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (\grave{x}y) = \begin{pmatrix} 1562.588 \\ 55878.40 \\ 226161.5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1} \grave{x}y$$

$$\Leftrightarrow \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0.709097 & -0.013923 & -0.001476 \\ -0.013923 & 0.000364 & 1.531237 \\ -0.001476 & 1.531237 & 0.0029 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1562.588 \\ 55878.40 \\ 226161.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.689 \\ 2.035 \\ -3.689 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{y} = -3.689 + 2.035x_1 - 3.689x_2}$$

2. حساب معامل التحديد $\left(R^2\right)$ ، ثم أحسب $\left(\bar{R}^2\right)$ ؟

$$F_{tab} = F^{\alpha}_{(K-1,n-k)} = 3.29$$
$$F_{tab} = F^{\alpha}_{(2,32)} = 3.29$$
$$n - k = 32 \Rightarrow n = 35$$
$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{SSR}{n-k} \Rightarrow SSR = \hat{\sigma}_u^2(n-k)$$
$$\Rightarrow SSR = 510.94 * (32) = 16\,350.08$$

$$\boxed{SSR = 16\,350.08}$$

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = n * v(y) = 980.94 * 35 = 34\,332.94$$
$$v(y) = (31.32)^2 = 980.94$$

$$\boxed{SST = 34\,332.94}$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{16\,350.08}{34\,332.94} = 0.476$$

$$\boxed{R^2 = 0.476}$$

$$\bar{R}^2 = \left[1 - (1 - 0.476)\frac{34}{32}\right]$$

$$\boxed{\bar{R}^2 = 0.443}$$

3. حساب احصائية فيشر

$$F = \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}} = \frac{0.476/2}{0.524/32} = \frac{0.238}{0.0164} = 14.512$$

$$\boxed{F = 14.512}$$

التمرين التاسع

لدينا النموذج التالي

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \cdots \beta_K X_{Ki} + u_i$$

إذا كان اختبارنا لكل معلمة من معالم هذا النموذج أعطت النتائج التالية:

$$t_{\widehat{\beta_0}}=4.79 \qquad t_{\widehat{\beta_1}} = -2.08 \qquad t_{\widehat{\beta_2}}=8.95$$

وكان لدينا المعطيات التالية :

$$t_{n-k}^{0.025} = 2.00 \qquad F_c = 40.52$$

$$var_y = 43.82$$

$$(x'x)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.229 & -0.004 & -0.14 \\ -0.004 & 9.21 & 0.0027 \\ -0.14 & 0.0027 & 0.418 \end{bmatrix}$$

المطلوب :

1. احسب كل من معامل التحديد (R^2) ثم $(\bar{R}^2)$ ؟
2. قدر النموذج التالي بطريقة المربعات الصغرى ؟
3. كون مجال الثقة ل: Y_f عند 95% ؟

الحل

1. حساب كل من معامل التحديد (R^2) ثم $(\bar{R}^2)$

لدينا من جدول توزيع ستودينت: $t^{0.025} = 2.00$ وبالتالي فإن :

$$t_{n-k}^{0.025} = 2.00 \Rightarrow n\text{-}k=n\text{-}3=60 \Rightarrow n = 63$$

كما أنه لدينا :

$$F = \frac{R^2/_{K-1}}{(1-R^2)/_{n-k}} \Rightarrow 40.52 = \frac{R^2/_2}{(1-R^2)/_{60}} \Rightarrow 40.52 = \frac{60R^2}{2(1-R^2)}$$

$$\Rightarrow 60R^2 = 81.04 - 81.04R^2 \Rightarrow 141.04\, R^2 = 81.04$$
$$\Rightarrow R^2 = 0.57$$

$$\boxed{R^2 = 0.57}$$

$$\bar{R}^2 = \left[1 - (1-0.57)\frac{62}{60}\right]$$

$$\boxed{\bar{R}^2 = 0.55}$$

2. **تقدير النموذج التالي بطريقة المربعات الصغرى**

$$\hat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1}\grave{x}y$$

$$SST = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = n * v(y)$$
$$= 43.82 * 63 = 2760.66$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 0.57 \Rightarrow SSR = 0.57 \ * SST = 1573.57$$

$$\hat{\delta}_u^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-k} = \frac{SSR}{n-k} \Rightarrow \hat{\delta}_u^2 = \frac{1573.57}{60} = 26.23$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \delta_u^2(x\grave{x})^{-1} = 26.23 * \begin{pmatrix} 0.229 & -0.004 & -0.14 \\ -0.004 & 9.21 & 0.0027 \\ -0.14 & 0.0027 & 0.418 \end{pmatrix}$$

- <u>حساب تباين والانحراف المعياري للمعلمات المقدرة:</u>

$Var(\hat{\beta}_0) = 26.23 *(0.229) = 6.00$ $\quad$ $\delta_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{6.00} = 2,44$

$Var(\hat{\beta}_1) = 26.23 *(9.21)=241.57$ $\quad$ $\delta_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{241.57} = 15.54$

$Var(\hat{\beta}_2) = 26.23 * (0.418)= 10.96$ $\quad$ $\delta_{\hat{\beta}_2} = \sqrt{10.96} = 3.31$

$$t_{\hat{\beta}_0} = \frac{\hat{\beta}_0}{\delta_{\hat{\beta}_0}} \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \delta_{\hat{\beta}_0} * t_{\hat{\beta}_0} = 2.44 * 4.79 = 11.69$$

$$t_{\hat{\beta}_1} = \frac{\hat{\beta}_1}{\delta_{\hat{\beta}_1}} \Rightarrow \hat{\beta}_1 = \delta_{\hat{\beta}_1} * t_{\hat{\beta}_1} = 15.54 * (-2.08) = -32.32$$

$$t_{\hat{\beta}_2} = \frac{\hat{\beta}_2}{\delta_{\hat{\beta}_2}} \Rightarrow \hat{\beta}_2 = \delta_{\hat{\beta}_2} * t_{\hat{\beta}_2} = 3.31 * 8.95 = 29.62$$

معادلة التقدير:

$$\boxed{\hat{y} = 11.69 - 32.32\, x_1 + 29.62\, x_2}$$

3 <u>تكوين مجال الثقة:</u>

لدينا حجم العينة كبيرا ($n \geq 30$) تصدر الإشارة القيم الجدولية لجدول ستيودنت تقترب من القيم الجدولية للتوزيع الطبيعي تبعا لتقارب التوزيعات الاحتمالية.

$$\beta \in \left[\hat{B}_i - t_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{B}_i} \quad , \quad \hat{B}_i + t_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{B}_i}\right] \qquad i= 0 ,1,2,3 .....K$$

$$\beta_0 \in \left[\hat{B}_0 - t_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{B}_0} \quad , \quad \hat{B}_0 + t_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{B}_0}\right]$$

$$\beta_0 \in [11.69 - 2.00 \ * 2,44 \, , \ 11.69 + 2.00 \ * 2,44\,]$$

$$\boxed{\beta_0 \in [6.81 \ , 16.57]}$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{B}_1 - t_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{B}_1} \quad , \quad \hat{B}_1 + t_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{B}_1}\right]$$

$$\beta_1 \in [-32.32 - 2.00 \ * 15.54 \, , \ -32.32 + 2.00 \ * 15.54\,]$$

$$\boxed{\beta_1 \in [-63.4 \ , -1.24]}$$

$$\beta_2 \in \left[\hat{B}_2 - t_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{B}_2} \quad , \quad \hat{B}_2 + t_{n-k}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\hat{B}_2}\right]$$

$$\beta_2 \in [29.62 - 2.00 \ * 3.31 \, , \ 29.62 + 2.00 \ * 3.31]$$

$$\boxed{\beta_1 \in [23\ \ ,36.24]}$$

ايجاد مجال الثقة لتباين الأخطاء :

$$pr\left[\mathcal{X}^2(n-k\ \ ,1-\frac{\alpha}{2}) \leq \frac{(n-k)\delta_u^2}{\delta_u^2}\ \ \leq \mathcal{X}^2(n-k,\frac{\alpha}{2})\right] = 1-\alpha$$

$$\delta_u^2 \in \left[\frac{(60)26.23}{83.29}\quad ,\quad \frac{(60)40.48}{83.29}\right]$$

$$\boxed{\delta_u^2 \in [18.89\quad ,\quad 29.16]}$$

هذا يعني أن هناك احتمال **95%** أن تقع القيمة الحقيقية لتباين الأخطاء σ_ε^2 بين الحدين الأعلى29.16 والأدنى 18.89 ، وأن هناك احتمال **5%** أن تقع خارج هذين الحدين.

التمرين العاشر

لدينا المعطيات التالية :

السعر Y_i	35	25	37	20	32	30	33	26	35
X_1	14.68	10	11	11.50	10	9	11	8	12.67
X_2	13	9	10	4	6	7	10	11	8

المطلوب:

1. أوجد مقدرات النموذج باستخدام طريقة الانحرافات ؟
2. أوجد مصفوفة التباين $(\hat{\Omega}_{\hat{\beta}})$ ؟
3. أوجد تباين المقدرات ؟ ثم أوجد (R^2) ؟

الحل:

1. تقدير المعلمات باستخدام الانحرافات :

$$(\grave{x}x) = \begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 \\ \sum x_1x_2 & \sum x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$y_i = (Y_i - \bar{Y})$$

$$x_i = (X_i - \bar{X})$$

$$\sum x_1y = \sum X_1Y - \frac{\sum X_1 \sum Y}{n} = 3005{,}25 - \frac{(97{,}85)(273)}{9} = 37{,}133$$

$$\sum x_2y = \sum X_2Y - \frac{\sum X_2 \sum Y}{n} = 2428 - \frac{(78)(273)}{9} = 62$$

$$\sum x_1x_2 = \sum X_1X_2 - \frac{\sum X_1 \sum X_2}{n} = 859{,}20 - \frac{(97{,}85)(78)}{9} = 11{,}16$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n} = 1095{,}28 - \frac{(97{,}85)^2}{9} = 31{,}433$$
$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n} = 736 - \frac{(78)^2}{9} = 60$$
$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n} = 8533 - \frac{(273)^2}{9} = 252$$

$$(\grave{x}x) = \begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1x_2 \\ \sum x_1x_2 & \sum x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31{,}433 & 11{,}16 \\ 11{,}16 & 60 \end{bmatrix}$$

$$(\grave{x}y) = \begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix} = [62]$$

$$\hat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1}\grave{x}y = \begin{bmatrix} 31{,}433 & 11{,}16 \\ 11{,}16 & 60 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 37{,}133 \\ 62 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (\grave{x}x)^{-1}\grave{x}y = \begin{bmatrix} 0{,}0034063 & -0{,}006336 \\ -0{,}006336 & 0{,}017845 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37{,}133 \\ 62 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5193 \\ -1{,}3416 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_1 - \hat{\beta}_2\bar{x}_2 \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{(273)}{9} - 0.5193\frac{(97{,}85)}{9} + 1{,}3416\frac{(78)}{9}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_0 = 30{,}34 - 5{,}6459 + 11{,}6272$$
$$\Rightarrow \hat{\alpha} = 36{,}3213$$

$$\boxed{\hat{y}_i = 36{,}3213 + 0.5193\, x_1 - 1{,}3416\, x_2}$$

2. **إيجاد التباين المقدر للمقدرات " بطريقة الانحر افات :**

بالانحرافات مصفوفة التباين والتباين المشترك على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} var(\hat{\beta}_1) & \operatorname{cov}(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ \operatorname{cov}(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 & var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$
$$SST = \sum y_i^2 = 252$$

$$\boxed{\boldsymbol{SST = 252}}$$

حساب التباين المفسر

$$SSE = \grave{\hat{\beta}}(\grave{x}y) = [0.5193 \quad -1{,}3416] \begin{bmatrix} 37{,}133 \\ 62 \end{bmatrix} = 102{,}46$$

$$\boxed{SSE=102,46}$$

حساب التباين الغير المفسر

$$SSR = \sum u_i^2 = SST - SSE = \mathbf{252} - 102,46 = 149,54$$

$$\boxed{SSR= 149,54}$$

تقدير تباين الخطأ

$$\delta_{u_i}^2 = \frac{\sum u_i^2}{n-3} = \frac{SSR}{n-3} = \frac{149,54}{6}$$

$$\boxed{\delta_{u_i}^2 = 24,92}$$

$$\Omega_{\widehat{\beta}} = \delta_u^2 (x\grave{x})^{-1} = 24,92 * \begin{bmatrix} 0,0034063 & -0,006336 \\ -0,006336 & 0,017845 \end{bmatrix}$$

$\delta_{\widehat{\beta}_1} = \sqrt{0.0848} = 0.291$	$Var(\hat{\beta}_1) = 24,92 * (0.0034063) = 0.0848$
$\delta_{\widehat{\beta}_2} = \sqrt{0.44469} = 0.667$	$Var(\hat{\beta}_2) = 24,92 * (0.017845) = 0.44469$

حساب التباين للحد الثابت باستخدام الانحرافات

$$Var(\hat{\beta}_0) = \delta_u^2 \left[\bar{X}' (x\grave{x})^{-1} \bar{X} + \frac{1}{n} \right] = 24,92 * (0.002502) = 0.014966$$

$$\bar{X}' = (\bar{X}_1, \bar{X}_2) = (10,8722 \ , 8,6666 \ )$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.8722 \\ 8,6666 \end{pmatrix}$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = \delta_u^2 \left[\bar{X}' (x\grave{x})^{-1} \bar{X} + \frac{1}{n} \right]$$

$$= 24,92 * \left[(10,8722 \ , 8,6666 \ ) \begin{bmatrix} 0,0034063 & -0,006336 \\ -0,006336 & 0,017845 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 10.8722 \\ 8,6666 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \right]$$

$$= 24,92 * \left[(-0.01788 \ , \ 1,47767 \ ) \begin{pmatrix} 10.01214 \\ 10.78571 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \right]$$

$$= 24,92 * \left[15,75871 + \frac{1}{9} \right] = 395,47$$

$Var(\hat{\beta}_0) = 395,47$	$\delta_{\widehat{\beta}_0} = \sqrt{395,47} = 19,88$

3. حساب معامل التحديد

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = \frac{102,46}{252}$$

$$\boxed{R^2 = 0.406}$$

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

-السعدي رجال، نظرية الاحتمالات، الجزء الثاني ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،1995

-تومي صالح (1999):"مدخل لنظرية القياس الاقتصادي"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.

-عدنان الصنوي، محاضرات في الاقتصاد القياسي،جامعة صنعاء

-محمد راتول، دروس في الاقتصاد القياسي، جامعة التكوين المتواصل،الجزائر

-نعمة الله نجيب ابراهيم، مقدمة في مبادىء الاقتصاد القياسي، مؤسسة شباب الجامعة الاسكندرية، مصر،

المرسي السيد الحجازي، عبد القادر محمد عطية، مقدمة في الاقتصاد القياسي : المبادئ والتطبيقات، الرياض : النشر العلمي والمطابع، 42001 .

- أموري هادي كاظم الحسناوي، طرق القياس الاقتصادي، عمان : دار وائل للنشر ، 2002 .سمير محمد عبد العزيز، الاقتصاد القياسي: مدخل في اتخاذ القرارات، الإسكندرية : مكتبة الإشعاع للطباعة والنشر والتوزيع، 1997 .

المراجع باللغة الاجنبية

- Bourbonnais, R., et Terraza . M (1998): "Analyse des Séries Temporelles en économie".PUF. Paris.
- Bourbonnais, R., (2004): "Econométrie", Dunod, 5em Edition, Paris.
- Box, G. E. P. and Jenkins, G.M., "Time Series Analysis, Forecasting and Control", Sanfransiscow, Holden-Day
- Christian Labrousse; " Introduction à l'économétrie "; 1°ed, Dunod, Paris- 1985
- Gérald .Baillargeon ; " Probabilités statistique et techniques des régression" ; SMG
- Gabrielle vangrevelinghe,Econometrie,Herman ,paris,1973
- Khaled khaldi, Methode statistique et probabilite,edition casbah,Alger,2000
- Sandrin lardic et valerie migon,econometiedes series temporelles macro economique et financieres, economica, parix, 2002
- Vandaele, W, "Applied Time Series and Box-Jenkins Models", John Wiley & Sons ,1983

LES LIENS
- www.edu-women.uokufa.edu.iq/t/safa.t/2.
- www.ssnpstudents.com/wp/wp-content/uploads/.../stat_20091.
- www.edu-women.uokufa.edu.iq/t/safa.t/2
- www.onefd.edu.dz/3ass/fichiersPDF/322/.../.../F322-MA3e
- www.kenanaonline.com
- www.uobabylon.edu.iq/eprints/pubdc_1_31495_1138.
- http://www.ssnpstudents.com/wp/wp-content/upload
- http://faculty.ksu.edu.sa/2190/Documents/Stat122/
- www.bsofian-ksu.com/agec613/Lecture6.pd